

1. **Calcula y demuestra** los siguientes **límites**:

 a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + 2x - 1}{6x^3 + 3x^2 + 2}$ (0,75 pt.)

 b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x + 1}{2x - 1} \right)^{3x-1}$ (0,75 pt.)

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 6x - 1} - x$ (1 pt.)

2. **Calcula** analíticamente el **dominio** y las **asíntotas** de la función $f(x) = \frac{2x^2 - 1}{x - 2}$ (1,5 pt.)

3. Estudia la **continuidad** de la siguiente función (**clasifica** las discontinuidades si las hubiera):

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2-x}{x} & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 - 1 & \text{si } 1 < x \leq 3 \\ 2^x & \text{si } x > 3 \end{cases} \quad (2 \text{ pt.})$$

 4. **Calcula** el valor de a para que la función $f(x)$ sea **continua** en $x = -4$:

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot x + 2 & \text{si } x \leq -4 \\ \frac{x^2 - 16}{x^2 + 5x + 4} & \text{si } x > -4 \end{cases} \quad (2 \text{ pt.})$$

 5. **Calcula** a de modo que: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - a \cdot x} \right) = \frac{5}{2}$ (1,5 pt)

 6. **Calcula y simplifica** la **derivada** de la siguiente función: $f(x) = \frac{3x^2 - 1}{2 - x}$ (0,5 pt.)

 **Complementario: Calcula y simplifica** la **derivada** de la siguiente función:

$$f(x) = 7^{\sqrt{x^2 + 1}} \cdot \log(x^3 - x) \quad (1 \text{ pt.})$$

1. **Calcula y demuestra** los siguientes **límites**:

 a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + 2x - 1}{6x^3 + 3x^2 + 2} = \frac{\infty}{\infty} \text{ IND}$, Dividimos por la potencia mayor.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + 2x - 1}{6x^3 + 3x^2 + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{4x^3}{x^3} + \frac{2x}{x^3} - \frac{1}{x^3}}{\frac{6x^3}{x^3} + \frac{3x^2}{x^3} + \frac{2}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3}}{6 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^3}} = \frac{4}{6} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

 b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x-1} \right)^{3x-1} = \frac{\infty}{\infty} \text{ IND}$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{2x-1} = \frac{\infty}{\infty} \text{ IND} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x-1 = \infty \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x+1}{2x-1} \right)^{3x-1} = 1^{\infty} \text{ IND} = e^L = \boxed{e^3}$$

$$L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x+1}{2x-1} - 1 \right) \cdot (3x-1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{2x-1} \cdot (3x-1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x-2}{2x-1} = \frac{\infty}{\infty} \text{ IND} = 3$$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 6x - 1} - x \quad \infty - \infty \text{ IND}$, Usamos la técnica del conjugado.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 6x - 1} - x)(\sqrt{x^2 + 6x - 1} + x)}{\sqrt{x^2 + 6x - 1} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 6x - 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 6x - 1} + x} = \frac{\infty}{\infty} \text{ IND}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{6x}{x} - \frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2} + \frac{6x}{x^2} - \frac{1}{x^2}} + \frac{x}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6 - \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{6}{x} - \frac{1}{x^2}} + 1} = \frac{6}{1+1} = \boxed{3}$$

2. **Calcula** analíticamente el **dominio** y las **asíntotas** de la función $f(x) = \frac{2x^2 - 1}{x - 2}$

Para el dominio, estudiamos los ceros del denominador.

Asíntotas verticales: $\boxed{\text{A.V.}} \quad x - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 2}$, Asíntota vertical , $D = \mathbb{R} - \{2\}$

Límites laterales: $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x^2 - 1}{x - 2} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x^2 - 1}{x - 2} = +\infty$

Asíntota horizontal: $\boxed{\text{A.H.}} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 1}{x - 2} = \frac{\infty}{\infty} \text{ IND} = \infty$ No hay asíntota horizontal

Asíntota oblicua: A.O. $m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 1}{x^2 - 2x} = \frac{\infty}{\infty} \text{ IND} = \frac{2}{1} = 2$, luego sí hay oblicua

$$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2x^2 - 1}{x - 2} - 2 \cdot x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{2x^2} - 1 - \cancel{2x^2} + 4x}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1 + 4x}{x - 2} = \frac{\infty}{\infty} \text{ IND} = \frac{4}{1} = 4$$

$y = mx + n = 2x + 4$

 Asíntota oblicua

3. Estudia la **continuidad** de la siguiente función (**clasifica** las discontinuidades si las hubiera):

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2-x}{x} & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 - 1 & \text{si } 1 < x \leq 3 \\ 2^x & \text{si } x > 3 \end{cases} \quad (2 \text{ pt.})$$

$f(x)$ está definida en todo $\mathbb{R}$. Buscamos los puntos problemáticos.

En el 1º trazo $x=0$ anula el denominador; además los puntos 1 y 3 separan los intervalos (fronteras).

Vamos a estudiar la continuidad en $\{0, 1, 3\}$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2-x}{x} &= -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2-x}{x} &= +\infty \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{En } x=0 \text{ hay una discontinuidad de salto infinito.} \\ &\text{Además } \nexists f(0). \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2-x}{x} &= 1 = f(1) \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 - 1 &= 0 \end{aligned} \right\} \text{En } x=1 \text{ hay una discontinuidad de salto finito.}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^-} x^2 - 1 &= 8 = f(3) \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} 2^x &= 8 \end{aligned} \right\} \text{En } x=3 \text{ la función es continua.}$$

Finalmente, $\mathcal{C}f(x) = \mathbb{R} - \{0, 1\}$

4. **Calcula** el valor de a para que la función $f(x)$ sea **continua** en $x = -4$:

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot x + 2 & \text{si } x \leq -4 \\ \frac{x^2 - 16}{x^2 + 5x + 4} & \text{si } x > -4 \end{cases}$$

$f(x)$ está definida en todo $\mathbb{R}$. Buscamos los puntos problemáticos.

Factorizamos el denominador del 2º trozo.

$$x^2 + 5x + 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2} = \frac{-5 \pm 3}{2} \begin{matrix} -4 \\ -1 \end{matrix}, -4 \cdot (-1) = \frac{4}{1} \checkmark$$

Los puntos $-4 \notin (-4, \infty)$, pero $-1 \in (-4, \infty) \Rightarrow \text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \{-1\}$

Continuidad. Estudiamos el punto $\{-4\}$ (frontera del intervalo).

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -4^-} aX + 2 &= -4a + 2 = f(-4) \\ \lim_{x \rightarrow -4^+} \frac{x^2 - 16}{x^2 + 5x + 4} &= \frac{0}{0} \text{ IND} = \lim_{x \rightarrow -4^+} \frac{(x-4)(x+4)}{(x+1)(x+4)} = \frac{8}{3} \end{aligned} \right\}$$

Factorizamos el numerador $x^2 - 16 = 0 \Rightarrow x = \pm 4$

Para que $f(x)$ sea continua en $x = -4$, deberán coincidir los límites laterales.

$$\lim_{x \rightarrow -4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -4^+} f(x) = f(-4) \Rightarrow -4a + 2 = \frac{8}{3} \Rightarrow a = \frac{\frac{8}{3} - 2}{-4} = \frac{\frac{2}{3}}{-4} = -\frac{1}{6}$$

Si $a = -\frac{1}{6}$, $f(x)$ es continua en $x = -4$

5. **Calcula** a de modo que: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - a \cdot x}) = \frac{5}{2} = \infty - \infty \text{ IND}$, Usamos la técnica del conjugado.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - ax})(\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - ax})}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - ax}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1 - x^2 + ax}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - ax}} = \frac{\infty}{\infty} \text{ IND}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x} + \frac{ax}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2} - \frac{1}{x^2}} + \sqrt{\frac{x^2}{x^2} - \frac{ax}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x} + a}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{a}{x}}} = \frac{a}{\sqrt{1} + \sqrt{1}} = \frac{a}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow a = 5$$

enunciado $\uparrow$

6. **Calcula y simplifica la derivada** de la siguiente función: $f(x) = \frac{3x^2 - 1}{2 - x}$

$$f'(x) = \frac{6x \cdot (2-x) - (3x^2-1) \cdot (-1)}{(2-x)^2} = \frac{12x - 6x^2 + 3x^2 - 1}{(2-x)^2} = \boxed{\frac{-3x^2 + 12x - 1}{(2-x)^2}}$$



Complementario: Calcula y simplifica la derivada de la siguiente función:

$$f(x) = 7^{\sqrt{x^2+1}} \cdot \log(x^3 - x) \quad ; \text{ es un producto}$$

$$f'(x) = 7^{\sqrt{x^2+1}} \cdot \ln 7 \cdot \frac{2x}{2 \cdot \sqrt{x^2+1}} \cdot \log(x^3 - x) + 7^{\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{3x^2 - 1}{(x^3 - x) \cdot \ln 10}$$

$$f'(x) = 7^{\sqrt{x^2+1}} \cdot \left[\frac{x \ln 7 \cdot \log(x^3 - x)}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{3x^2 - 1}{(x^3 - x) \cdot \ln 10} \right]$$