

1. **Calcula y simplifica** las siguientes **derivadas**:

 a) $f(x) = x^6 \cdot 5^{x^2}$ (0,75 pt.)

 b) $f(x) = e^{(\sqrt{x}+1)^2}$ (exponencial) (0,75 pt.)

DERIVABILIDAD EN FUNCIONES A TROZOS

2. Sea la función definida a trozos: $f(x) = \begin{cases} ax^2 + 1 & \text{si } x < 1 \\ x^2 + bx + 3 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

Calcula los valores de a y b para que $f(x)$ sea continua y derivable en $x = 1$. (2 pt.)

ANÁLISIS DE FUNCIONES

3. Sea la función $f(x) = x^4 - 6x^2$:

- a) Calcula los intervalos de **curvatura**. (1,5 pt)
- b) Calcula los puntos de **inflexión** y sus **coordenadas**. (1 pt)
- c) Estudia la **simetría** de la función. (0,5 pt)

 4. Sea la función $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$:

- a) Calcula los intervalos de **monotonía**. (1,5 pt)
- b) Calcula y clasifica los **extremos relativos** y calcula sus **coordenadas**. (1 pt)

 5. Calcula la ecuación de la **recta tangente** a la función:

$f(x) = x + \sqrt{x}$ en el **punto** $x = 4$. (1 pt.)

1. **Calcula y simplifica** las siguientes **derivadas**:

 a) $f(x) = x^6 \cdot 5^{x^2}$ $y' = 6x^5 \cdot 5^{x^2} + x^6 \cdot 5^{x^2} \cdot \ln 5 \cdot 2x = 5^{x^2} \cdot (6x^5 + 2x^7)$

 b) $f(x) = e^{(\sqrt{x}+1)^2}$ (exponencial) $y' = e^{(\sqrt{x}+1)^2} \cdot 2(\sqrt{x}+1) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = e^{(\sqrt{x}+1)^2} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$

2. Sea la función definida a trozos: $f(x) = \begin{cases} ax^2 + 1 & \text{si } x < 1 \\ x^2 + bx + 3 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

Calcula los valores de a y b para que $f(x)$ sea continua y derivable en $x = 1$.

Para que sea derivable, es condición necesaria que sea **continua** en $x=1$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} ax^2 + 1 = a + 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 + bx + 3 = 4 + b = f(1) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Para que } f(x) \text{ sea continua en } x=1, \\ \text{deberán coincidir los límites laterales.} \end{array}$$

$a + 1 = 4 + b \Rightarrow a - b = 3$ [1] Condición de continuidad

La condición de **derivabilidad** es: $f'(1^-) = f'(1^+)$

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax & \text{si } x < 1 \\ 2x + b & \text{si } x > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2ax = 2x + b & \text{en } x=1 \\ 2a = 2 + b \Rightarrow 2a - b = 2 \end{cases} \text{ [2]}$$

Condición de derivabilidad

Resolvemos el sistema: $\left. \begin{array}{l} a - b = 3 \\ 2a - b = 2 \end{array} \right\} \text{Restamos} \Rightarrow a = -1 \Rightarrow b = -4$

$f(x)$ es derivable en $x=1$ si $a = -1$ y $b = -4$

5. Calcula la ecuación de la **recta tangente** a la función:

$f(x) = x + \sqrt{x}$ en el **punto** $x = 4$. Calcula la recta tangente en $x_0 = 4$

$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ Ecuación punto-pendiente

$f(x_0) = x + \sqrt{x} \Rightarrow f(4) = 4 + \sqrt{4} = 6$

$f'(x_0) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(4) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{4}} = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$

recta tangente

$y - 6 = \frac{5}{4} \cdot (x - 4)$

3. Sea la función $f(x) = x^4 - 6x^2$: $Df(x) = \mathbb{R}$; no hay puntos críticos

- Calcula los intervalos de **curvatura**.
- Calcula los puntos de **inflexión** y sus **coordenadas**.
- Estudia la **simetría** de la función.

a) y b) Curvatura . $y'' = 0$ Condición de punto de inflexión. $y = x^4 - 6x^2$

$$y' = 4x^3 - 12x$$

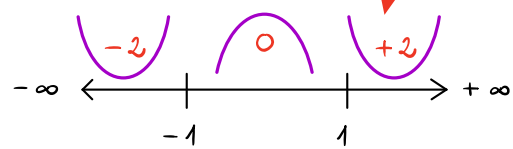
$$y'' = 12x^2 - 12 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \text{ Posibles P.I.}$$

Evalúamos puntos al azar en cada intervalo
escogidos al azar

$$y''(-2) = 12 \cdot (-2)^2 - 12 > 0 \quad \text{convexa}$$

$$y''(0) = 12 \cdot (0)^2 - 12 < 0 \quad \text{cóncava}$$

$$y''(+2) = 12 \cdot (+2)^2 - 12 > 0 \quad \text{convexa}$$



Efectivamente $x = \pm 1$ son P.I.
porque cambia la curvatura.

Convexa $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$
Cóncava $(-1, 1)$

Intervalos
de curvatura

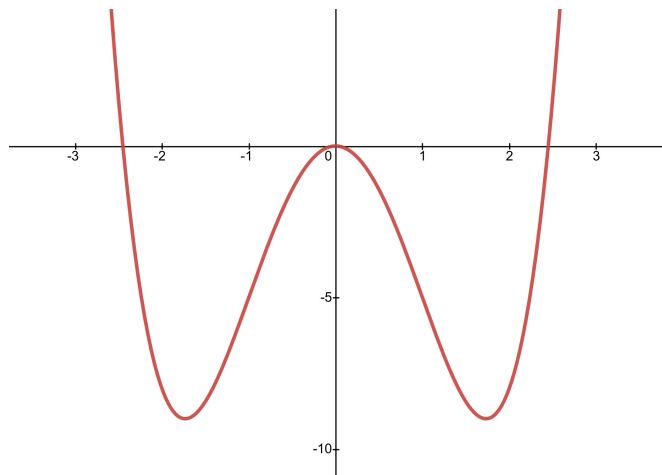
Coordenadas de los puntos de inflexión.

$$y = x^4 - 6x^2 \Rightarrow y(\pm 1) = 1 - 6 = -5 \Rightarrow (1, -5); (-1, -5) \text{ puntos de inflexión}$$

c) Simetría . $f(x) = x^4 - 6x^2$

$$\text{Calculamos } f(-x) = (-x)^4 - 6(-x)^2 = x^4 - 6x^2$$

Luego $f(-x) = f(x)$. Tiene simetría par (con respecto al eje de ordenadas).



4. Sea la función $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$:

a) Calcula los intervalos de **monotonía**.

b) Calcula y clasifica los **extremos relativos** y calcula sus **coordenadas**.

$$y = \frac{x^2}{x-1}, \quad x-1=0 \Rightarrow x=1, \quad D = \mathbb{R} - \{1\}, \quad \text{luego } x=2 \text{ es un punto crítico.}$$

$$y' = 0 \quad \text{Condición de extremo.}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, \quad y' = \frac{2x \cdot (x-1) - x^2 \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

$$y' = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2} = 0 \Rightarrow x(x-2) = 0 \quad \begin{matrix} x=0 \\ x=2 \end{matrix} \quad \text{Posibles extremos}$$

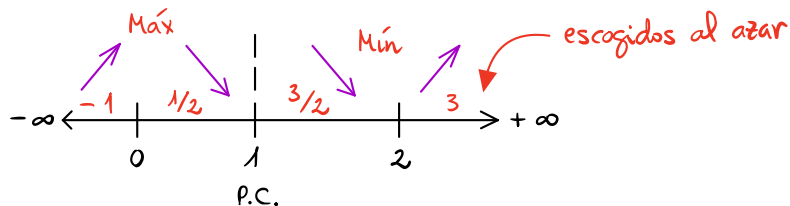
↗ se cancela el denominador

Hay un punto crítico en $x=1$

Tenemos que estudiar lo que ocurre a su izquierda y a su derecha.

Método de la 1ª derivada

$$y' = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2} \quad \text{Evaluamos puntos al azar en cada intervalo}$$



$$y'(-1) = \frac{-(-)}{+} > 0 \quad \nearrow$$

$$y'(1/2) = \frac{+(-)}{+} < 0 \quad \searrow$$

$$y'(3/2) = \frac{+(-)}{+} < 0 \quad \searrow$$

$$y'(3) = \frac{+(+)}{+} > 0 \quad \nearrow$$

Crece $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$
Decrece $(0, 1) \cup (1, 2)$

Intervalos de Monotonía

En $x=0$ hay un máximo relativo

En $x=2$ hay un mínimo relativo

En $x=1$ hay un punto crítico

b) Coordenadas de los extremos: $y = \frac{x^2}{x-1}$

$$\text{Si } x=0, \quad y = \frac{0^2}{0-1} = 0,$$

$$\text{Si } x=2, \quad y = \frac{2^2}{2-1} = 4,$$

máximo relativo $(0, 0)$

mínimo relativo $(2, 4)$