

1. **Calcula y demuestra** los siguientes **límites**:

 a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + 1}{5x^2 - 3}$ (1 pt.)

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x-3} \right)^{2x}$ (1 pt.)

 c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} - x \right)$ (1 pt.)

 2. **Calcula** analíticamente el **dominio** y las **asíntotas** de la función $f(x)$:

$$f(x) = \frac{3x^2 + 1}{x - 1} \quad (2 \text{ pt.})$$

 3. Los **gastos** financieros de una organización (en **cientos de miles de euros**) siguen la función:

$$G(t) = \begin{cases} 4 - \frac{t}{3} & \text{si } 0 \leq t \leq 3 \\ \frac{5t-3}{t+1} & \text{si } t > 3 \end{cases} \quad , \text{ siendo } t \text{ el tiempo transcurrido en años.}$$

a) ¿Es la función $G(t)$ **continua**? (0,75 pt.)

b) ¿Cuáles son los **gastos a largo plazo**? (0,75 pt.)

4. **Calcula** el valor de a para que la función $f(x)$ sea **continua** en $x = -1$:

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot x + 1 & \text{si } x \leq -1 \\ \frac{x^2 - 1}{x^2 + 5x + 4} & \text{si } x > -1 \end{cases} \quad (2 \text{ pt.})$$

 5. **Calcula** a de modo que: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 - a \cdot x} - \sqrt{x^2 + x} \right) = -2$ (1,5 pt)

1. **Calcula y demuestra** los siguientes **límites**:

 a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + 1}{5x^2 - 3} = \frac{\infty}{\infty}$ IND, Dividimos por la potencia mayor.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + 1}{5x^2 - 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{2x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}}{\frac{5x^2}{x^2} - \frac{3}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 + \frac{1}{x^2}}{5 - \frac{3}{x^2}} = \boxed{\frac{2}{5}}$$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x-3} \right)^{2x} = \frac{\infty}{\infty}$ IND

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2}{x-3} = \frac{\infty}{\infty} \text{ IND} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = \infty \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-2}{x-3} \right)^{2x} = 1^{\infty} \text{ IND} = e^L = \boxed{e^2}$$

$$L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-2}{x-3} - 1 \right) \cdot 2x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x-3} \cdot 2x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x-3} = \frac{\infty}{\infty} \text{ IND} = 2$$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) = \infty - \infty$ IND, Usamos la técnica del conjugado.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \frac{1}{\infty} = \boxed{0}$$

2. **Calcula** analíticamente el **dominio** y las **asíntotas** de la función $f(x)$:

$f(x) = \frac{3x^2 + 1}{x - 1}$ Para el dominio, estudiamos los ceros del denominador.

Asíntotas verticales: $\boxed{\text{A.V.}}$ $x - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 1}$, Asíntota vertical, $D = \mathbb{R} - \{1\}$

Límites laterales: $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x^2 + 1}{x - 1} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x^2 + 1}{x - 1} = +\infty$

Asíntota horizontal: $\boxed{\text{A.H.}}$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 1}{x - 1} = \frac{\infty}{\infty} \text{ IND} = \infty$ No hay asíntota horizontal

Asíntota oblicua: $\boxed{\text{A.O.}}$ $m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 1}{x^2 - x} = \frac{\infty}{\infty} \text{ IND} = \frac{3}{1} = 3$, luego sí hay oblicua

$$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{3x^2 + 1}{x - 1} - 3 \cdot x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 1 - 3x^2 + 3x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + 1}{x - 1} = \frac{\infty}{\infty} \text{ IND} = \frac{3}{1} = 3$$

$y = mx + n = 3x + 3$ Asíntota oblicua

3. Los **gastos** financieros de una organización (en **cientos de miles de euros**) siguen la función:

$$G(t) = \begin{cases} 4 - \frac{t}{3} & \text{si } 0 \leq t \leq 3 \\ \frac{5t-3}{t+1} & \text{si } t > 3 \end{cases}, \text{ siendo } t \text{ el tiempo transcurrido en años.}$$

a) ¿Es la función $G(t)$ **continua**?

(0,75 pt.)

b) ¿Cuáles son los **gastos a largo plazo**?

(0,75 pt.)

a) $G(t)$ está definida en todo $\mathbb{R}^+ = [0, \infty)$. Buscamos los puntos críticos.

En el 2º trazo. $t+1=0 \Rightarrow t=-1 \notin (3, \infty)$ luego no representa un problema de dominio.

$$\text{Dom } f(x) = [0, \infty)$$

Continuidad. Estudiamos el punto crítico $\{3\}$ (frontera del intervalo).

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^-} 4 - \frac{t}{3} &= 4 - \frac{3}{3} = 3 = G(3) \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{5t-3}{t+1} &= \frac{15-3}{3+1} = \frac{12}{4} = 3 \end{aligned} \right\} \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} G(t) = \lim_{x \rightarrow 3^+} G(t) = G(3)$$

luego $G(t)$ es continua en $t=3$

$$b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5t-3}{t+1} = \frac{\infty}{\infty} \text{ IND} = \frac{5}{1} = 5 \text{ (cientos de miles de euros).}$$

A largo plazo los gastos tienden hacia los 500.000 €

4. **Calcula** el valor de a para que la función $f(x)$ sea **continua** en $x = -1$:

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot x + 1 & \text{si } x \leq -1 \\ \frac{x^2-1}{x^2+5x+4} & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

$f(x)$ está definida en todo $\mathbb{R}$. Buscamos los puntos críticos.

Factorizamos el denominador del 2º trazo.

$$x^2+5x+4=0 \Rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25-4 \cdot 1 \cdot 4}}{2} = \frac{-5 \pm 3}{2} < \begin{matrix} -4 \\ -1 \end{matrix}, -4 \cdot (-1) = \frac{4}{1} \checkmark$$

Los puntos -4 y $-1 \notin (-1, \infty)$ luego no representan un problema de dominio. $\text{Dom } f(x) = \mathbb{R}$

Continuidad. Estudiamos el punto crítico $\{-1\}$ (frontera del intervalo).

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^-} ax + 1 &= -a + 1 = f(-1) \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 5x + 4} &= \frac{0}{0} \text{ IND} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)(x+4)} = -\frac{2}{3} \end{aligned} \right\}$$

Factorizamos el numerador $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$ 

Para que $f(x)$ sea continua en $x = -1$, deberán coincidir los límites laterales.

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = f(-1) \Rightarrow -a + 1 = -\frac{2}{3} \Rightarrow a = \frac{-\frac{2}{3} - 1}{-1} = \frac{5}{3}$$

Si $a = \frac{5}{3}$, $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$

5. Calcula a de modo que: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - a \cdot x} - \sqrt{x^2 + x}) = -2 = \infty - \infty \text{ IND}$, usamos la técnica del conjugado.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - ax} - \sqrt{x^2 + x})(\sqrt{x^2 - ax} + \sqrt{x^2 + x})}{\sqrt{x^2 - ax} + \sqrt{x^2 + x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - ax - x^2 - x}{\sqrt{x^2 - ax} + \sqrt{x^2 + x}} = \frac{\infty}{\infty} \text{ IND}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{ax}{x} - \frac{x}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2} - \frac{ax}{x^2}} + \sqrt{\frac{x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-a-1}{\sqrt{1-\frac{a}{x}} + \sqrt{1+\frac{1}{x}}} = \frac{-a-1}{\sqrt{1} + \sqrt{1}} = \frac{-a-1}{2} = -2$$

$$\frac{-a-1}{2} = -2 \Rightarrow -a-1 = -4 \Rightarrow -a = -3 \Rightarrow a = 3$$

enunciado 