

1. **Calcula y simplifica** las siguientes **derivadas**:

 a) $y = x^5 \cdot \ln(x^3)$ (1,25 pt.)

 b) $y = 5^{x^2-x}$ (exponencial) (0,75 pt.)

DERIVABILIDAD EN FUNCIONES A TROZOS

2. Sea la función definida a trozos: $f(x) = \begin{cases} x^2 - x + a & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ b \cdot x^2 - 5x + 10 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

Calcula los valores de a y b para que $f(x)$ sea continua y derivable en $x = 2$. (2 pt.)

ANÁLISIS DE FUNCIONES

 3. Sea la función $y = \frac{x^2}{3x - 6}$:

a) Calcula los intervalos de **monotonía**. (1,5 pt)

b) Calcula y clasifica los **extremos relativos** y calcula sus **coordenadas**. (1 pt)

 4. Sea la función $f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$:

a) Calcula los intervalos de **curvatura**. (1,5 pt)

b) Calcula los puntos de **inflexión** y sus **coordenadas**. (1 pt)

 5. Calcula la ecuación de la **recta tangente** a la función:

$f(x) = \sqrt{x^3 + 9}$ en el **punto** $x = 3$. (1 pt.)

1. Calcula y simplifica las siguientes derivadas:

 a) $y = x^5 \cdot \ln(x^3)$

 b) $y = 5^{x^2-x}$ (exponencial)

a) $y' = 5x^4 \cdot \ln x^3 + x^5 \cdot \frac{3x^2}{x^3} = 5x^4 \cdot \ln x^3 + 3x^4 = x^4 \cdot (5 \ln x^3 + 3)$

b) $y' = 5^{x^2-x} \cdot \ln 5 \cdot (2x-1)$

DERIVABILIDAD EN FUNCIONES A TROZOS

2. Sea la función definida a trozos: $f(x) = \begin{cases} x^2 - x + a & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ b \cdot x^2 - 5x + 10 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

Calcula los valores de a y b para que $f(x)$ sea continua y derivable en $x = 2$. (2 pt.)

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$

$$f'(a^-) = f'(a^+)$$

Condición de continuidad: $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} x^2 - x + a = 2 + a = f(2) \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} b x^2 - 5x + 10 = 4b \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{Límites laterales iguales} \\ 2 + a = 4b \quad (1) \end{array}$$

Condición de derivabilidad: $f'(a^-) = f'(a^+)$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 2bx - 5 & \text{si } x > 2 \end{cases} ; f'(2^-) = f'(2^+)$$

$$2x - 1 = 2bx - 5, \quad x = 2 \Rightarrow 3 = 4b - 5 \quad (2)$$

$$b = \frac{3+5}{4} = 2, \quad a = 4b - 2 = 6 \Rightarrow$$

$$a = 6, \quad b = 2 \quad \text{para que } f(x) \text{ sea derivable en } x = 2.$$

3. Sea la función $y = \frac{x^2}{3x-6}$:

a) Calcula los intervalos de **monotonía**.

b) Calcula y clasifica los **extremos relativos** y calcula sus **coordenadas**.

$$3x-6=0 \Rightarrow x = \frac{6}{3} = 2, \quad Df(x) = \mathbb{R} - \{2\}, \quad \text{luego } x=2 \text{ es un punto crítico.}$$

$$y' = 0 \quad \text{Condición de extremo.}$$

$$y' = \frac{2x \cdot (3x-6) - x^2 \cdot 3}{(3x-6)^2} = \frac{6x^2 - 12x - 3x^2}{(3x-6)^2} = \frac{3x^2 - 12x}{(3x-6)^2} = 0$$

se cancela el denominador

$$3x^2 - 12x = 0 \Rightarrow 3x(x-4) = 0 \quad \begin{matrix} x=0 \\ x=4 \end{matrix} \quad \text{Posibles extremos}$$

Método de la 1ª derivada

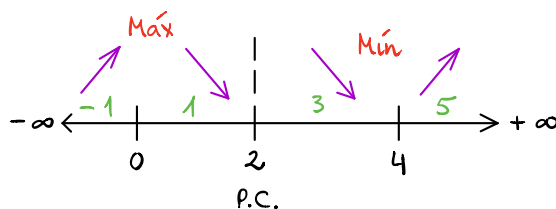
$$y' = \frac{3x^2 - 12x}{(3x-6)^2} \quad \text{Evaluamos puntos al azar en cada intervalo}$$

$$y'(-1) = \frac{3(-1)^2 - 12 \cdot (-1)}{+} > 0 \quad \nearrow$$

$$y'(1) = \frac{3(1)^2 - 12 \cdot (1)}{+} < 0 \quad \searrow$$

$$y'(3) = \frac{3(3)^2 - 12 \cdot (3)}{+} < 0 \quad \searrow$$

$$y'(5) = \frac{3(5)^2 - 12 \cdot (5)}{+} > 0 \quad \nearrow$$



Crece $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$

Decrece $(0, 2) \cup (2, 4)$

Intervalos de Monotonía

En $x=0$ hay un máximo relativo

En $x=4$ hay un mínimo relativo

En $x=2$ hay un punto crítico

b) Coordenadas de los extremos:

$$\text{Si } x=0, \quad y = \frac{x^2}{3x-6} = 0,$$

$$\text{Si } x=4, \quad y = \frac{4^2}{12-6} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3},$$

máximo relativo $(0, 0)$

mínimo relativo $(4, \frac{8}{3})$

4. Sea la función $f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$:

$D = \mathbb{R}$; no hay puntos críticos.

a) Calcula los intervalos de **curvatura**.

b) Calcula los puntos de **inflexión** y sus **coordenadas**.

a) Curvatura. $y'' = 0$ Condición de punto de inflexión. $y = x^4 - 2x^2 - 3$

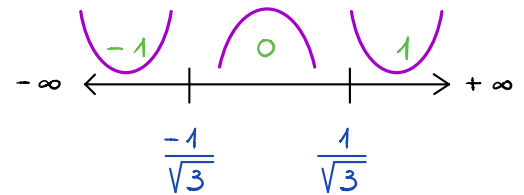
$$y' = 4x^3 - 4x$$

$$y'' = 12x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{Posibles P.I.} \quad \text{Evaluamos puntos al azar en cada intervalo}$$

$$y''(-1) = 12 \cdot (-1)^2 - 4 > 0 \quad \text{convexa}$$

$$y''(0) = 12 \cdot (0)^2 - 4 < 0 \quad \text{cóncava}$$

$$y''(+1) = 12 \cdot (+1)^2 - 4 > 0 \quad \text{convexa}$$



$$\text{Convexa } \left(-\infty, \frac{-1}{\sqrt{3}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty\right)$$

$$\text{Cóncava } \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Intervalos de curvatura

Efectivamente $x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ son P.I. porque cambia la curvatura.

b) Coordenadas de los puntos de inflexión.

$$y = x^4 - 2x^2 - 3 \Rightarrow y\left(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{9} - 2 \cdot \frac{1}{3} - 3 = \frac{1 - 6 - 27}{9} = -\frac{32}{9}$$

$$\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, -\frac{32}{9}\right); \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{32}{9}\right) \quad \text{puntos de inflexión}$$

5. Calcula la ecuación de la **recta tangente** a la función:

$$f(x) = \sqrt{x^3 + 9} \quad \text{en el punto } x = 3.$$

$$y - f(a) = f'(a)(x - a) \quad \text{Ecuación de la tangente en el punto } P(a, f(a))$$

$$f(3) = \sqrt{3^3 + 9} = \sqrt{36} = 6$$

$$f'(x) = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3 + 9}} \Rightarrow f'(3) = \frac{3 \cdot 9}{2 \cdot \sqrt{3^3 + 9}} = \frac{27}{12} = \frac{9}{4}$$

$$y - 6 = \frac{9}{4}(x - 3)$$

Tangente en (3, 6)