

1. **Calcula y demuestra** los siguientes **límites**:

 a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^2 - x}{3x^2 + 1} \right)^{2x+1}$ (1 pt.)

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{4x^2 + x} - 2x \right)$ (1,5 pt.)

 2. **Calcula** analíticamente el **dominio** y las **asíntotas** de la función $f(x)$:

$$f(x) = \frac{3x^2 + 5}{x - 2} \quad (2 \text{ pt.})$$

 3. Estudia el **dominio** y la **continuidad** de la función $f(x)$. **Clasifica** las discontinuidades:

$$f(x) = \begin{cases} x + 4 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{x - 1} & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad (1,5 \text{ pt.})$$

 4. **Calcula** el valor de a para que la función $f(x)$ sea **continua** en $x = 2$:

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot x + 1 & \text{si } x \leq 2 \\ \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x - 10} & \text{si } x > 2 \end{cases} \quad (2 \text{ pt.})$$

5. **Calcula y simplifica** las siguientes **derivadas**:

 a) $y = \frac{x^2 + 5x}{x - 4}$ (1 pt.)

 b) $y = x^5 \cdot 5^{x^3}$ (1 pt.)



Complementarios:

 1. **Calcula** a de modo que: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{a \cdot x^2 + 2x} - \sqrt{a \cdot x^2 - 3} \right) = \frac{1}{2}$ (1 pt.)

2. **Calcula y simplifica** la siguiente **derivada**: $y = x\sqrt{x^2 + 1}$ (1 pt.)

1. **Calcula y demuestra** los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^2 - x}{3x^2 + 1} \right)^{2x+1} = \frac{\infty}{\infty} \infty \text{ IND}$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - x}{3x^2 + 1} = \frac{\infty}{\infty} \text{ IND} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x + 1 = \infty \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^2 - x}{3x^2 + 1} \right)^{2x+1} = 1^{\infty} \text{ IND} = e^L = e^{-2/3} = \frac{1}{\sqrt[3]{e^2}}$$

$$L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^2 - x}{3x^2 + 1} - 1 \right) \cdot (2x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x-1}{3x^2+1} \cdot (2x+1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2-3x-1}{3x^2+1} = \frac{\infty}{\infty} \text{ IND} = -\frac{2}{3}$$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + x} - 2x) = \infty - \infty \text{ IND}$, Usamos la técnica del conjugado.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{4x^2 + x} - 2x)(\sqrt{4x^2 + x} + 2x)}{\sqrt{4x^2 + x} + 2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 + x - 4x^2}{\sqrt{4x^2 + x} + 2x} = \frac{\infty}{\infty} \text{ IND}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x}{\sqrt{4x^2 + x} + 2x}}{\frac{4x^2 + x}{x^2} + \frac{2x}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{4 + \frac{1}{x}} + 2} = \frac{1}{\sqrt{4} + 2} = \frac{1}{4}$$

2. **Calcula** analíticamente el **dominio** y las **asíntotas** de la función $f(x)$:

$$f(x) = \frac{3x^2 + 5}{x - 2} \quad \text{Para el dominio, estudiamos los ceros del denominador.}$$

Asíntotas verticales: $\boxed{\text{A.V.}} \quad x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$, Asíntota vertical, $D = \mathbb{R} - \{2\}$

Límites laterales: $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3x^2 + 5}{x - 2} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x^2 + 5}{x - 2} = +\infty$

Asíntota horizontal: $\boxed{\text{A.H.}} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 5}{x - 2} = \frac{\infty}{\infty} \text{ IND} = \infty$ No hay asíntota horizontal

Asíntota oblicua: $\boxed{\text{A.O.}} \quad m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 5}{x^2 - 2x} = \frac{\infty}{\infty} \text{ IND} = \frac{3}{1} = 3$, luego sí hay oblicua

$$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{3x^2 + 5}{x - 2} - 3 \cdot x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 5 - 3x^2 + 6x}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x + 5}{x - 2} = \frac{\infty}{\infty} \text{ IND} = \frac{6}{1} = 6$$

$y = mx + n = 3x + 6$ Asíntota oblicua

3. Estudia el **dominio** y la **continuidad** de la función $f(x)$. **Clasifica** las discontinuidades:

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} x+4 & \text{si } x \leq 0 \quad (-\infty, 0] \\ \frac{1}{x-1} & \text{si } x > 0 \quad (0, \infty) \end{array} \right\} \quad \text{Todos los puntos están definidos}$$

Punto crítico $x=0$ (frontera)

Posible punto crítico en el 2º trozo: $x-1=0 \Rightarrow x=1 \in (0, \infty)$

Dominio $Df(x) = \mathbb{R} - \{1\}$

Estudiamos la continuidad en los 2 P.C.

$$\begin{array}{c} x+4 \quad \frac{1}{x-1} \quad \frac{1}{x-1} \\ \hline 0 \quad 1 \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} x+4 = 4 = f(0) \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x-1} = \frac{1}{0-1} = -1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Discontinuidad de salto finito} \\ \text{en } x=0 \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Discontinuidad de salto infinito} \\ \text{en } x=1, \nexists f(1) \end{array}$$

La continuidad de $f(x)$ es: $Cf(x) = \mathbb{R} - \{0, 1\}$

4. **Calcula** el valor de a para que la función $f(x)$ sea **continua** en $x=2$:

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} a \cdot x + 1 & \text{si } x \leq 2 \\ \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x - 10} & \text{si } x > 2 \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} ax+1 = 2a+1 = f(2) \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2-3x+2}{x^2+3x-10} = \frac{0}{0} \text{ IND} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x-1)}{(x+5)(x-2)} = \frac{1}{7} \end{array} \right\} \text{Continuidad.}$$

$$\text{Factorizamos } x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9-4 \cdot 1 \cdot 2}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} < \begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array}, \quad 2 \cdot 1 = \frac{2}{1} \checkmark$$

$$x^2 + 3x - 10 = 0 \Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-4 \cdot 1 \cdot (-10)}}{2} = \frac{-3 \pm 7}{2} < \begin{array}{c} -5 \\ 2 \end{array}, \quad -5 \cdot 2 = \frac{-10}{1} \checkmark$$

Para que $f(x)$ sea continua en $x=2$, deberán coincidir los límites laterales.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) \Rightarrow 2a+1 = \frac{1}{7} \Rightarrow a = \frac{\frac{1}{7}-1}{2} = -\frac{3}{7}$$

5. **Calcula y simplifica** las siguientes **derivadas**:

 a) $y = \frac{x^2 + 5x}{x - 4}$

 b) $y = x^5 \cdot 5^{x^3}$

a) $y' = \frac{(2x+5)(x-4) - (x^2+5x) \cdot 1}{(x-4)^2} = \frac{2x^2 - 8x + 5x - 20 - x^2 - 5x}{(x-4)^2} = \frac{x^2 - 8x - 20}{(x-4)^2}$

b) $y' = 5x^4 \cdot 5^{x^3} + x^5 \cdot 5^{x^3} \cdot \ln 5 \cdot 3x^2 = x^4 \cdot 5^{x^3} \cdot (5 + 3x^3 \cdot \ln 5)$



Complementarios:



1. **Calcula** a de modo que: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{a \cdot x^2 + 2x} - \sqrt{a \cdot x^2 - 3}) = \frac{1}{2} = \infty - \infty \text{ IND}$, Usamos la técnica del conjugado.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{ax^2 + 2x} - \sqrt{ax^2 - 3})(\sqrt{ax^2 + 2x} + \sqrt{ax^2 - 3})}{\sqrt{ax^2 + 2x} + \sqrt{ax^2 - 3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a\cancel{x^2} + 2x - a\cancel{x^2} + 3}{\sqrt{ax^2 + 2x} + \sqrt{ax^2 - 3}} = \frac{\infty}{\infty} \text{ IND}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2x}{x} + \frac{3}{x}}{\sqrt{\frac{ax^2}{x^2} + \frac{2x}{x^2}} + \sqrt{\frac{ax^2}{x^2} - \frac{3}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + \frac{3}{x}}{\sqrt{a + \frac{2}{x}} + \sqrt{a - \frac{3}{x^2}}} = \frac{2}{\sqrt{a} + \sqrt{a}} = \frac{2}{2\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$$

$\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2 = \sqrt{a} \Rightarrow a = 4$
 enunciado $\uparrow$

2. **Calcula y simplifica** la siguiente **derivada**: $y = x^{\sqrt{x^2+1}}$; Tomo logaritmos neperianos

$\ln y = \ln x^{\sqrt{x^2+1}} = \sqrt{x^2+1} \cdot \ln x$; Derivo implícitamente

$\frac{y'}{y} = \frac{\cancel{x} \cdot \sqrt{x^2+1}}{\cancel{x} \cdot \sqrt{x^2+1}} \cdot \ln x + \sqrt{x^2+1} \cdot \frac{1}{x}$; despejo y'

$y' = x^{\sqrt{x^2+1}} \cdot \left(\frac{x \cdot \ln x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} \right)$