

1. **Calcula y demuestra** los siguientes **límites**:

 a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - x^2}{3x^2 + 2x - 1}$ (0,75 pt.)

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x)$ (0,75 pt.)

 c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - 4x + 3}$ (1 pt.)

 2. **Calcula** analíticamente el **dominio** y las **asíntotas** de la función $f(x)$:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x - 3} \quad (2 \text{ pt.})$$

 3. **Calcula** analíticamente el **dominio** y la **continuidad** de la función $f(x)$ definida en los intervalos:

$$f(x) = \begin{cases} -x + 1 & \text{si } x < -1 \\ \frac{x}{x - 3} & \text{si } -1 \leq x < 5 \\ \frac{2x - 5}{2} & \text{si } x \geq 5 \end{cases} \quad (2 \text{ pt.})$$

4. **Calcula y simplifica** las siguientes **derivadas**:

a) $y = \frac{2x^2 + 1}{3x - 1}$ (1 pt.)

 b) $y = (\sqrt{x} - 2x)^5$ (0,75 pt.)

 c) $y = x^4 \cdot 4^{x^2}$ (0,75 pt.)

 d) $y = (x^2)^{3x}$ (1 pt.)



Complementario:

 **Derivada implícita:** **Calcula** la siguiente **derivada** en el punto $P(1,1)$:

$$x^3 \cdot y^2 + \ln y + 5 = 0 \quad (1 \text{ pt})$$

1. **Calcula y demuestra** los siguientes **límites**:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-x^2}{3x^2+2x-1} = \frac{\infty}{\infty} \text{ IND}$, Dividimos por la potencia mayor.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x^2} - \frac{x^2}{x^2}}{\frac{3x^2}{x^2} + \frac{2x}{x^2} - \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x^2} - 1}{3 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}} = -\frac{1}{3}$$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+1} - x) = \infty - \infty \text{ IND}$, Utilizamos la técnica del conjugado.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2+1} - x) \cdot (\sqrt{x^2+1} + x)}{\sqrt{x^2+1} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x} = \frac{1}{\infty} = 0$$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+3x-4}{x^2-4x+3} = \frac{0}{0} \text{ IND}$ Factorizamos el numerador y el denominador.

Numerador $x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2} \begin{matrix} -4 \\ 1 \end{matrix}$, Denominador $x = \frac{4 \pm \sqrt{16-4 \cdot 1 \cdot 3}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix}$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+3x-4}{x^2-4x+3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+4)(x-1)}{(x-3)(x-1)} = -\frac{5}{2}$$

2. **Calcula** analíticamente el **dominio** y las **asíntotas** de la función $f(x)$:

$f(x) = \frac{x^2+2x}{x-3}$ Para el dominio, estudiamos los ceros del denominador.

[A.V.] $x-3=0 \Rightarrow x=3$ Asíntota vertical, $D = \mathbb{R} - \{3\}$

Límites laterales: $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2+2x}{x-3} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2+2x}{x-3} = +\infty$

[A.H.] $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+2x}{x-3} = \frac{\infty}{\infty} \text{ IND} = \infty$ No hay asíntota horizontal

[A.O.] $m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+2x}{x^2-3x} = \frac{\infty}{\infty} \text{ IND} = \frac{1}{1} = 1$, luego sí hay oblicua

$$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+2x}{x-3} - 1 \cdot x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+2x-x^2+3x}{x-3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x}{x-3} = \frac{5}{1} = 5$$

$y = mx+n = x+5$ Asíntota oblicua

3. **Calcula** analíticamente el **dominio** y la **continuidad** de la función $f(x)$ definida en los intervalos:

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} -x+1 & \text{si } x < -1 \quad (-\infty, -1) \\ \frac{x}{x-3} & \text{si } -1 \leq x < 5 \quad [-1, 5) \\ \frac{2x-5}{2} & \text{si } x \geq 5 \quad [5, \infty) \end{array} \right\} \quad (2 \text{ pt.})$$

Todos los puntos están definidos

Puntos críticos $x = -1$ y $x = 5$ (fronteras)

Posible punto crítico en el 2º trozo: $x-3=0 \Rightarrow x=3 \in [-1, 5)$

Dominio $D_f(x) = \mathbb{R} - \{3\}$

Estudiamos la continuidad en los 3 P.C.

$$\begin{array}{c} -x+1 \quad \frac{x}{x-3} \quad \frac{x}{x-3} \quad \frac{2x-5}{2} \\ \hline -1 \quad 3 \quad 5 \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} -x+1 = -(-1)+1 = 2 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x}{x-3} = \frac{-1}{-1-3} = \frac{1}{4} = f(-1) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Discontinuidad de salto finito} \\ \text{en } x = -1 \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x}{x-3} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x}{x-3} = +\infty \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Discontinuidad de salto infinito} \\ \text{en } x = 3, \nexists f(3) \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{x}{x-3} = \frac{5}{5-3} = \frac{5}{2} \\ \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{2x-5}{2} = \frac{2 \cdot 5 - 5}{2} = \frac{5}{2} = f(5) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Es continua} \\ \text{en } x = 5 \end{array}$$

La continuidad de $f(x)$ es: $C_f(x) = \mathbb{R} - \{-1, 3\}$

4. **Calcula y simplifica** las siguientes **derivadas**:

a) $y = \frac{2x^2 + 1}{3x - 1}$

$$y' = \frac{4x \cdot (3x - 1) - (2x^2 + 1) \cdot 3}{(3x - 1)^2} = \frac{12x^2 - 4x - 6x^2 - 3}{(3x - 1)^2} = \frac{6x^2 - 4x - 3}{(3x - 1)^2}$$

b) $y = (\sqrt{x} - 2x)^5$, $y' = 5 \cdot (\sqrt{x} - 2x)^4 \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - 2 \right) = (\sqrt{x} - 2x)^4 \cdot \left(\frac{5}{2\sqrt{x}} - 10 \right)$

c) $y = x^4 \cdot 4^{x^2}$, $y' = 4x^3 \cdot 4^{x^2} + x^4 \cdot 4^{x^2} \cdot \ln 4 \cdot 2x = x^3 \cdot 4^{x^2} (4 + 2x^2 \cdot \ln 4)$

d) $y = (x^2)^{3x}$ Derivamos logarítmicamente. Tomamos logaritmos neperianos.

$$\ln y = \ln (x^2)^{3x} = 3x \cdot \ln (x^2) \quad ; \text{ Derivamos implícitamente.}$$

$$\frac{y'}{y} = 3 \cdot \ln (x^2) + 3x \cdot \frac{2x}{x^2} =$$

$$\frac{y'}{y} = [3 \cdot \ln (x^2) + 6]$$

$$y' = (x^2)^{3x} \cdot [3 \cdot \ln (x^2) + 6]$$



Complementario:



Derivada implícita: Calcula la siguiente **derivada** en el punto $P(1,1)$:

$$x^3 \cdot y^2 + \ln y + 5 = 0 \quad ; \text{ Derivamos implícitamente.}$$

$$3x^2 \cdot y^2 + x^3 \cdot 2yy' + \frac{y'}{y} + 0 = 0$$

$$y' \left(x^3 \cdot 2y + \frac{1}{y} \right) = -3x^2 \cdot y^2$$

$$y' = - \frac{3x^2 \cdot y^2}{x^3 \cdot 2y + \frac{1}{y}} \quad \begin{matrix} \uparrow \\ P(1,1) \end{matrix} = - \frac{3 \cdot 1 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 1 + \frac{1}{1}} = -1$$