

1. **Calcula y demuestra** los siguientes **límites**:

 a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - x^2}{3x^2 + 2x - 1}$ (0,75 pt.)

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x - 2}{x + 1} \right)^{2x}$ (0,75 pt.)

 c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x - 4}{x^2 - 4x + 3}$ (1 pt.)

 2. **Calcula** analíticamente el **dominio** y las **asíntotas** de la función $f(x)$:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x - 3} \quad (2 \text{ pt.})$$

 3. **Calcula** analíticamente el **dominio** y la **continuidad** de la función $f(x)$ definida en los intervalos:

$$f(x) = \begin{cases} -x + 1 & \text{si } x < -1 \\ \frac{x}{x - 3} & \text{si } -1 \leq x < 5 \\ \frac{2x - 5}{2} & \text{si } x \geq 5 \end{cases} \quad (2 \text{ pt.})$$

4. **Calcula y simplifica** las siguientes **derivadas**:

a) $y = \frac{3x - 1}{2x^2 + 1}$ (1 pt.)

 b) $y = (x^2 - \sqrt{x})^4$ (0,75 pt.)

 c) $y = x^5 \cdot 5^{x^2}$ (0,75 pt.)

 d) $y = (3x)^{x^2}$ (1 pt.)



Complementario:

 **Derivada implícita:** **Calcula** la siguiente **derivada** en el punto $P(2,1)$:

$$x^3 \cdot y^2 + \ln y + 5 = 0 \quad (1 \text{ pt})$$

1. **Calcula y demuestra** los siguientes **límites**:

☞ a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-x^2}{3x^2+2x-1} = \frac{\infty}{\infty} \text{ IND}$, Dividimos por la potencia mayor.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x^2} - \frac{x^2}{x^2}}{\frac{3x^2}{x^2} + \frac{2x}{x^2} - \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x^2} - 1}{3 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}} = -\frac{1}{3}$$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-2}{x+1} \right)^{2x} = \frac{\infty}{\infty} \infty$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-2}{x+1} = \frac{\infty}{\infty} \text{ IND} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = \infty \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-2}{x+1} \right)^{2x} = 1^{\infty} \text{ IND} = e^L = e^{-6} = \frac{1}{e^{-6}}$$

$$L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-2}{x+1} - 1 \right) 2x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3}{x+1} \cdot 2x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-6x}{x+1} = \frac{\infty}{\infty} \text{ IND} = -6$$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+3x-4}{x^2-4x+3} = \frac{0}{0} \text{ IND}$ Factorizamos el numerador y el denominador.

Numerador $x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2} \begin{matrix} -4 \\ 1 \end{matrix}$, Denominador $x = \frac{4 \pm \sqrt{16-4 \cdot 1 \cdot 3}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix}$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+3x-4}{x^2-4x+3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+4)(x-1)}{(x-3)(x-1)} = -\frac{5}{2}$$

2. **Calcula** analíticamente el **dominio** y las **asíntotas** de la función $f(x)$:

$$f(x) = \frac{x^2+2x}{x-3}$$

Para el dominio, estudiamos los ceros del denominador.

A.V. $x-3=0 \Rightarrow x=3$ Asíntota vertical, $D = \mathbb{R} - \{3\}$

Límites laterales: $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2+2x}{x-3} = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2+2x}{x-3} = +\infty$

A.H. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+2x}{x-3} = \frac{\infty}{\infty} \text{ IND} = \infty$ No hay asíntota horizontal

A.O. $m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x}{x^2 - 3x} = \frac{\infty}{\infty} \text{ IND} = \frac{1}{1} = 1$, luego sí hay oblicua

$$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x}{x - 3} - 1 \cdot x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x^2} + 2x - \cancel{x^2} + 3x}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x}{x - 3} = \frac{5}{1} = 5$$

$y = mx + n = x + 5$ Asíntota oblicua

3. **Calcula** analíticamente el **dominio** y la **continuidad** de la función $f(x)$ definida en los intervalos:

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} -x + 1 & \text{si } x < -1 \quad (-\infty, -1) \\ \frac{x}{x-3} & \text{si } -1 \leq x < 5 \quad [-1, 5) \\ \frac{2x-5}{2} & \text{si } x \geq 5 \quad [5, \infty) \end{array} \right\} \quad (2 \text{ pt.})$$

Todos los puntos están definidos

Puntos críticos $x = -1$ y $x = 5$ (fronteras)

Posible punto crítico en el 2º trazo: $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \in [-1, 5)$

Dominio $Df(x) = \mathbb{R} - \{3\}$

Estudiamos la continuidad en los 3 P.C.

$$\begin{array}{c|c|c|c} -x+1 & \frac{x}{x-3} & \frac{x}{x-3} & \frac{2x-5}{2} \\ \hline -1 & 3 & 5 & \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} -x + 1 = -(-1) + 1 = 2 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x}{x-3} = \frac{-1}{-1-3} = \frac{1}{4} = f(-1) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Discontinuidad de salto finito} \\ \text{en } x = -1 \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x}{x-3} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x}{x-3} = +\infty \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Discontinuidad de salto infinito} \\ \text{en } x = 3, \nexists f(3) \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{x}{x-3} = \frac{5}{5-3} = \frac{5}{2} \\ \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{2x-5}{2} = \frac{2 \cdot 5 - 5}{2} = \frac{5}{2} = f(5) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Es continua} \\ \text{en } x = 5 \end{array}$$

La continuidad de $f(x)$ es: $Cf(x) = \mathbb{R} - \{-1, 3\}$

4. **Calcula y simplifica** las siguientes **derivadas**:

a) $y = \frac{3x - 1}{2x^2 + 1}$

$$y' = \frac{3 \cdot (2x^2 + 1) - (3x - 1) \cdot 4x}{(2x^2 + 1)^2} = \frac{6x^2 + 3 - 12x^2 + 4x}{(2x^2 + 1)^2} = \frac{-6x^2 + 4x + 3}{(2x^2 + 1)^2}$$

b) $y = (x^2 - \sqrt{x})^4$, $y' = 4 \cdot (x^2 - \sqrt{x})^3 \cdot \left(2x - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = (x^2 - \sqrt{x})^3 \cdot \left(8x - \frac{2}{\sqrt{x}}\right)$

c) $y = x^5 \cdot 5^{x^2}$, $y' = 5x^4 \cdot 5^{x^2} + x^5 \cdot 5^{x^2} \cdot \ln 5 \cdot 2x = x^4 \cdot 5^{x^2} (5 + 2x^2 \cdot \ln 5)$

d) $y = (3x)^{x^2}$ Derivamos logarítmicamente. Tomamos logaritmos neperianos.

$$\ln y = \ln (3x)^{x^2} = x^2 \cdot \ln(3x) \quad ; \text{ Derivamos implícitamente.}$$

$$\frac{y'}{y} = 2x \cdot \ln(3x) + x^2 \cdot \frac{3}{3x}$$

$$\frac{y'}{y} = 2x \cdot \ln(3x) + x = x \cdot [2 \ln(3x) + 1]$$

$$y' = y \cdot x \cdot [2 \ln(3x) + 1] = (3x)^{x^2} \cdot x \cdot [2 \ln(3x) + 1]$$



Complementario:



Derivada implícita: Calcula la siguiente **derivada** en el punto $P(2,1)$:

$$x^3 \cdot y^2 + \ln y + 5 = 0 \quad ; \text{ Derivamos implícitamente.}$$

$$3x^2 \cdot y^2 + x^3 \cdot 2yy' + \frac{y'}{y} + 0 = 0$$

$$y' \left(x^3 \cdot 2y + \frac{1}{y} \right) = -3x^2 \cdot y^2$$

$$y' = - \frac{3x^2 \cdot y^2}{x^3 \cdot 2y + \frac{1}{y}} \quad \begin{matrix} \uparrow \\ P(2,1) \end{matrix} = - \frac{3 \cdot 4 \cdot 1}{8 \cdot 1 \cdot 2 + \frac{1}{1}} = - \frac{12}{17}$$