



1. **Calcula y simplifica** los siguientes **derivadas**:

a) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2}$ $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2}}$ (0,75 pt.)

b) $y = 2^{x^3+x}$ (exponencial) $y' = 2^{x^3+x} \cdot \ln 2 \cdot (3x^2 + 1)$ (0,75 pt.)

DERIVABILIDAD EN FUNCIONES A TROZOS

2. Sea $f(x)$ la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 1 & \text{si } x < 2 \\ x^2 + bx + 3 & \text{si } x \geq 2 \end{cases} \quad a = \frac{1}{2}, b = -2 \quad (2 \text{ pt})$$

Halla los **valores** de a y b para que $f(x)$ sea **derivable** en $x = 2$.

ANÁLISIS DE FUNCIONES



3. Sea la función $y = \frac{x^2}{x-2}$:
 Máximo local en $(0,0)$ Crece $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$
 Mínimo local en $(4,8)$ Decrece $(0, 2) \cup (2, 4)$

- Calcula los intervalos de **monotonía**. (1,5 pt)
- Clasifica los **extremos relativos** y calcula sus **coordenadas**. (0,75 pt)
- Halla los puntos de corte; representa la **gráfica**, los extremos y la **asíntota** vertical. (0,75 pt)

Pistas: No hay puntos de inflexión. No hace falta calcular la asíntota oblicua (sólo si te sobra tiempo).



4. Sea la función $f(x) = x^4 - 2x^2$:
 Cóncava: $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$
 Convexa: $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}) \cup (\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty)$
 P.I. $(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{5}{9}), (\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{5}{9})$

- Calcula los intervalos de **curvatura**. (1 pt)
- Calcula los puntos de **inflexión** y sus **coordenadas**. (1 pt)
- Estudia la **simetría** de la función. (0,5 pt)

Simetría par



5. Calcula la ecuación de la **recta tangente** a la función:

$f(x) = \ln x^2$ en el **punto** $x = e$. $y - 2 = \frac{2}{e}(x - e)$ (1 pt.)



Complementario:



Calcula los **coeficientes** a , b y c para que la **función** $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ pase por el punto $P(1,1)$, tenga un **máximo** en $x = -4$ y un **mínimo** en $x = 0$. (1,5 pt)

$a = 6, b = 0, c = -6$

$f(x) = x^3 + 6x^2 - 6$



1. **Calcula y simplifica los siguientes derivadas:**

a) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2}$, $f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2}}$, $y' = 2^{x^3+x} \cdot \ln 2 \cdot (3x^2 + 1)$

b) $y = 2^{x^3+x}$ (exponencial)

DERIVABILIDAD EN FUNCIONES A TROZOS

2. Sea $f(x)$ la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 1 & \text{si } x < 2 \\ x^2 + bx + 3 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Halla los **valores** de a y b para que $f(x)$ sea **derivable** en $x = 2$.

La función $f(x)$ debe ser continua en $x=2$.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} ax^2 + 1 = 4a + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} x^2 + bx + 3 = 2b + 7$$

$$4a + 1 = 2b + 7 \Rightarrow 4a = 2b + 6 \quad [1]$$

La función $f(x)$ debe ser derivable en $x=2$.

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax & \text{si } x < 2 \\ 2x + b & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

$$f'(2^-) = f'(2^+)$$

$$2ax = 2x + b \text{ en } x=2.$$

$$4a = 4 + b \quad [2]$$

Sustituyendo [1] en [2] se tiene $2b + 6 = 4 + b$

$$b = -2 \text{ de donde } a = \frac{4+b}{4} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

ANÁLISIS DE FUNCIONES



3. Sea la función $y = \frac{x^2}{x-2}$:

- Calcula los intervalos de **monotonía**. (1,5 pt)
- Clasifica los **extremos relativos** y calcula sus **coordenadas**. (0,75 pt)
- Halla los puntos de corte; representa la **gráfica**, los extremos y la **asíntota** vertical. (0,75 pt)

Pistas: No hay puntos de inflexión. No hace falta calcular la asíntota oblicua (sólo si te sobra tiempo).

Estudiamos la monotonía con la 1ª derivada.

$$y = \frac{x^2}{x-2} \text{ , Dominio } D = \mathbb{R} - \{2\} \text{ , hay que tener en cuenta este punto crítico. } x=2$$

$$y' = \frac{2x(x-2) - x^2}{(x-2)^2} = \frac{2x^2 - 4x - x^2}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x}{(x-2)^2}$$

Asíntota vertical

$$y = \frac{x^2}{x-2}, \quad y' = \frac{x^2 - 4x}{(x-2)^2}$$

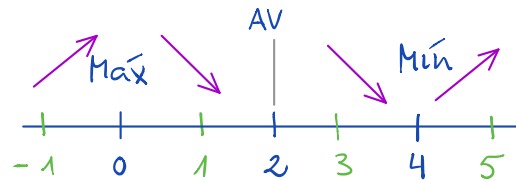
Condición de extremo:

$$y' = 0 \Rightarrow x^2 - 4x = 0 \Rightarrow$$

$$x \cdot (x-4) = 0 \quad \begin{cases} x=0 \\ x=4 \end{cases}$$

Evaluamos puntos aleatorios con la 1ª derivada para conocer la monotonía en cada zona y clasificar los extremos.

$$\begin{array}{ll} y'(-1) > 0 & \nearrow \\ y'(1) < 0 & \searrow \\ y'(3) < 0 & \searrow \\ y'(5) > 0 & \nearrow \end{array}$$



Coordenadas: $y(0) = 0$, $y(4) = \frac{4^2}{4-2} = 8$

Máximo local en $(0, 0)$	Crece $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$
Mínimo local en $(4, 8)$	Decrece $(0, 2) \cup (2, 4)$

Para representar la gráfica hallamos los puntos de corte y la asíntota oblicua (opcional).

Si $x=0 \Rightarrow y=0 \quad (0, 0)$

Si $y=0 \Rightarrow x=0 \quad (0, 0)$

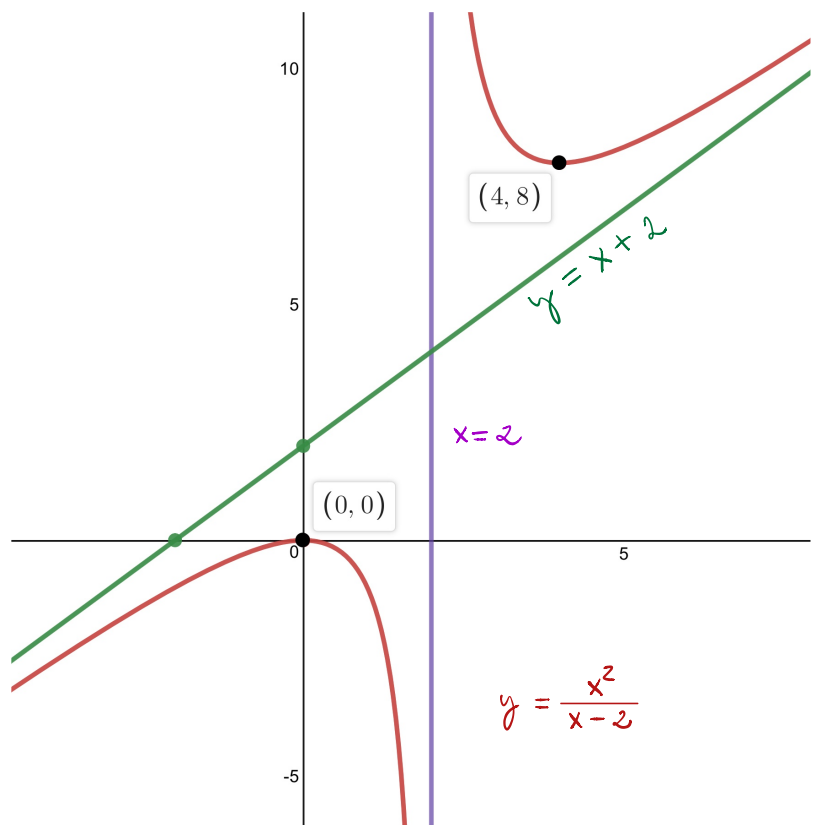
Asíntota oblicua:

$$\left. \begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2 - 2x} = \frac{\infty}{\infty} = 1 \\ n &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x-2} - 1x \right) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x^2 + 2x}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x-2} = 2 \end{aligned} \right\}$$

$y = mx + n = x + 2$, veamos los puntos de corte:

Si $x=0 \Rightarrow y=2 \quad (0, 2)$

Si $y=0 \Rightarrow x=-2 \quad (-2, 0)$





4. Sea la función $f(x) = x^4 - 2x^2$:

- Calcula los intervalos de **curvatura**.
- Calcula los puntos de **inflexión** y sus **coordenadas**.
- Estudia la **simetría** de la función.

$$y = x^4 - 2x^2$$

$$y' = 4x^3 - 4x$$

$$y'' = 12x^2 - 4$$

Condición de punto inflexión

$$y'' = 0 \Rightarrow 12x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}, \quad x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{Posibles P.I.}$$

$$y''(-1) > 0$$

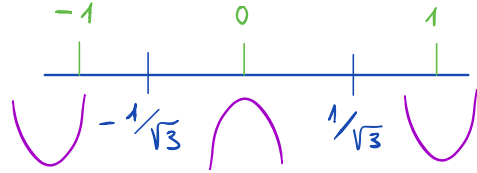
$$y''(0) < 0$$

$$y''(+1) > 0$$

Método II:

$$y''' = 24x \neq 0$$

Cambia la curvatura. Son P.I.



Coordenadas de los puntos de inflexión

$$y\left(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^4 - 2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{1}{9} - \frac{2}{3} = -\frac{5}{9}$$

$$\text{P.I. } \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{5}{9}\right), \left(+\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{5}{9}\right)$$

$$\text{Cóncava: } \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\text{Convexa: } \left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty\right)$$

Estudiamos la **simetría**. Veamos si $f(x) = f(-x)$

$$f(-x) = (-x)^4 - 2(-x)^2 = x^4 - 2x^2 = f(x), \quad \text{Simetría par}$$



5. Calcula la ecuación de la **recta tangente** a la función:

$$f(x) = \ln x^2 \quad \text{en el punto } x = e. \quad y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

$$x_0 = e, \quad y_0 = f(e) = \ln e^2 = 2 \cdot \ln e = 2$$

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x} \Rightarrow f'(e) = \frac{2}{e}, \quad y - 2 = \frac{2}{e}(x - e) \Rightarrow y = \frac{2x}{e}$$



Complementario:



Calcula los **coeficientes** a , b y c para que la **función** $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ pase por el punto $P(1,1)$, tenga un **máximo** en $x = -4$ y un **mínimo** en $x = 0$. (1,5 pt)

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

$$f(1) = 1, \quad 1 + a + b + c = 1$$

$$a + b + c = 0 \quad [1]$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b = 0$$

(condición de extremo)

$$\text{Si } x = -4, \quad 3 \cdot 16 - 8a + b = 0 \quad [2]$$

$$\text{Si } x = 0, \quad 0 + 0 + b = 0, \quad b = 0 \quad [3]$$

$$[2] \Rightarrow a = 6, \quad [1] \Rightarrow c = -6$$

$$f(x) = x^3 + 6x^2 - 6$$