



1. **Calcula y simplifica** los siguientes **derivadas**:

a) $y = x^3 \cdot \ln x^2$ $y' = x^2(3 \ln x^2 + 2)$ (1 pt.)

b) $y = e^{x^3+x}$ (exponencial) $y' = e^{x^3+x} \cdot (3x^2+1)$ (0,5 pt.)

DERIVABILIDAD EN FUNCIONES A TROZOS

2. Sea $f(x)$ la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 1 & \text{si } x < 1 \\ x^2 + bx + 3 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \quad a = -1, b = -4$$
 (2 pt)

Halla los **valores** de a y b para que $f(x)$ sea **derivable** en $x = 1$.

ANÁLISIS DE FUNCIONES



3. Sea la función $y = \frac{2x^2}{x-1}$: $\left. \begin{array}{l} \text{Máximo local en } (0,0) \\ \text{Mínimo local en } (2,8) \end{array} \right| \begin{array}{l} \text{Crece } (-\infty, 0) \cup (2, +\infty) \\ \text{Decrece } (0,1) \cup (1,2) \end{array}$

a) Calcula los intervalos de **monotonía**. (1,5 pt)

b) Clasifica los **extremos relativos** y calcula sus **coordenadas**. (0,75 pt)

c) Halla los puntos de corte; representa la **gráfica**, los extremos y la **asíntota** vertical. (0,75 pt)

Pistas: No hay puntos de inflexión. No hace falta calcular la asíntota oblicua (sólo si te sobra tiempo).



4. Sea la función $f(x) = x^4 - 2x^2$: $\text{Cóncava: } (-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$

a) Calcula los intervalos de **curvatura**. $\text{Convexa: } (-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}) \cup (\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty)$ (1 pt)

b) Calcula los puntos de **inflexión** y sus **coordenadas**. (1 pt)

c) Estudia la **simetría** de la función. $\text{P.I. } (-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{5}{9}), (+\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{5}{9})$ (0,5 pt)

Simetría par



5. Calcula la ecuación de la **recta tangente** a la función:

$f(x) = \sqrt{x+2}$ en el **punto** $x = 7$. $y - 3 = \frac{1}{6}(x - 7)$ (1 pt.)



Complementario:



Calcula los **coeficientes** a , b y c para que la **función** $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ pase por el punto $P(1,1)$, tenga un **máximo** en $x = -4$ y un **mínimo** en $x = 0$. (1,5 pt)

$a = 6, b = 0, c = -6$

$f(x) = x^3 + 6x^2 - 6$



1. **Calcula y simplifica** los siguientes **derivadas**:

a) $y = x^3 \cdot \ln x^2$

$$y' = 3x^2 \cdot \ln x^2 + x^3 \cdot \frac{2x}{x^2} = 3x^2 \cdot \ln x^2 + 2x^2 = x^2(3 \ln x^2 + 2)$$

b) $y = e^{x^3+x}$

(exponencial)

$$y' = e^{x^3+x} \cdot (3x^2+1)$$

DERIVABILIDAD EN FUNCIONES A TROZOS

2. Sea $f(x)$ la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 1 & \text{si } x < 1 \\ x^2 + bx + 3 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Halla los **valores** de a y b para que $f(x)$ sea **derivable** en $x = 1$.

La función $f(x)$ debe ser continua en $x=1$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} ax^2 + 1 = a + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 + bx + 3 = b + 4 = f(1)$$

$$a + 1 = b + 4 \Rightarrow a = b + 3 \quad [1]$$

La función $f(x)$ debe ser derivable en $x=1$.

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax & \text{si } x < 1 \\ 2x + b & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$f'(1^-) = f'(1^+)$$

$$2ax = 2x + b \text{ en } x=1.$$

$$2a = 2 + b \quad [2]$$

Sustituyendo [1] en [2] se tiene $2(b+3) = 2+b$

$$2b + 6 = 2 + b$$

$$b = -4 \text{ de donde } a = b + 3 \Rightarrow a = -1$$

ANÁLISIS DE FUNCIONES



3. Sea la función $y = \frac{2x^2}{x-1}$:

a) Calcula los intervalos de **monotonía**.

(1,5 pt)

b) Clasifica los **extremos relativos** y calcula sus **coordenadas**.

(0,75 pt)

c) Halla los puntos de corte; representa la **gráfica**, los extremos y la **asíntota** vertical.

(0,75 pt)

Pistas: No hay puntos de inflexión. No hace falta calcular la asíntota oblicua (sólo si te sobra tiempo).

Estudiamos la monotonía con la 1ª derivada.

$$y = \frac{2x^2}{x-1}, \text{ Dominio } D = \mathbb{R} - \{1\}, \text{ hay que tener en cuenta este punto crítico. } x=1$$

$$y' = \frac{4x(x-1) - 2x^2}{(x-1)^2} = \frac{4x^2 - 4x - 2x^2}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 4x}{(x-1)^2}$$

Asíntota vertical

$$y = \frac{2x^2}{x-1}, \quad y' = \frac{2x^2 - 4x}{(x-1)^2}$$

Condición de extremo:

$$y' = 0 \Rightarrow 2x^2 - 4x = 0 \Rightarrow$$

$$x^2 - 2x = 0$$

$$x \cdot (x-2) = 0 \quad \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$$

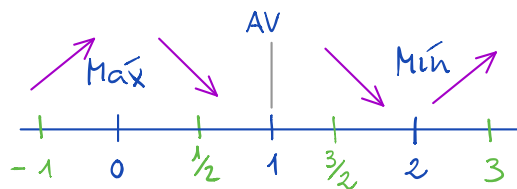
Evaluamos puntos aleatorios con la 1ª derivada para conocer la monotonía en cada zona y clasificar los extremos.

$$y'(-1) > 0 \quad \nearrow$$

$$y'(\frac{1}{2}) < 0 \quad \searrow$$

$$y'(\frac{3}{2}) < 0 \quad \searrow$$

$$y'(3) > 0 \quad \nearrow$$



Coordenadas: $y(0) = 0$, $y(2) = \frac{2 \cdot 4}{2-1} = 8$

Máximo local en $(0,0)$	Crece $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$
Mínimo local en $(2,8)$	Decrece $(0,1) \cup (1,2)$

Para representar la gráfica hallamos los puntos de corte y la asíntota oblicua (opcional).

Si $x=0 \Rightarrow y=0 \quad (0,0)$

Si $y=0 \Rightarrow x=0 \quad (0,0)$

Asíntota oblicua:

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2 - x} = \frac{\infty}{\infty} = 2$$

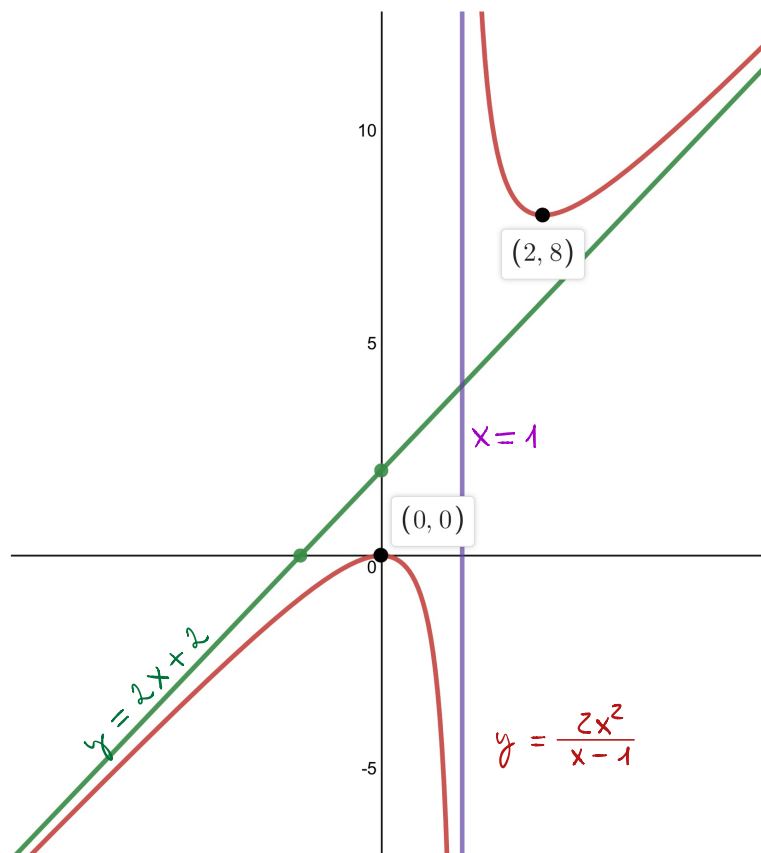
$$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2}{x-1} - 2x \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 2x^2 + 2x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x-1} = 2$$

$y = mx + n = 2x + 2$, veamos los puntos de corte:

Si $x=0 \Rightarrow y=2 \quad (0,2)$

Si $y=0 \Rightarrow x=-1 \quad (-1,0)$





4. Sea la función $f(x) = x^4 - 2x^2$:

- Calcula los intervalos de **curvatura**.
- Calcula los puntos de **inflexión** y sus **coordenadas**.
- Estudia la **simetría** de la función.

$$y = x^4 - 2x^2$$

$$y' = 4x^3 - 4x$$

$$y'' = 12x^2 - 4$$

Condición de punto inflexión

$$y'' = 0 \Rightarrow 12x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}, \quad x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{Posibles P.I.}$$

$$y''(-1) > 0$$

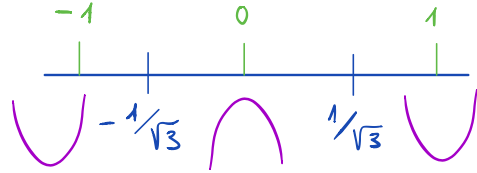
$$y''(0) < 0$$

$$y''(+1) > 0$$

Método II:

$$y''' = 24x \neq 0$$

Cambia la curvatura. Son P.I.



Coordenadas de los puntos de inflexión

$$y\left(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^4 - 2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{1}{9} - \frac{2}{3} = -\frac{5}{9}$$

$$\text{P.I. } \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{5}{9}\right), \left(+\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{5}{9}\right)$$

$$\text{Cóncava: } \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\text{Convexa: } \left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty\right)$$

Estudiamos la **simetría**. Veamos si $f(x) = f(-x)$

$$f(-x) = (-x)^4 - 2(-x)^2 = x^4 - 2x^2 = f(x), \quad \text{Simetría par}$$



5. Calcula la ecuación de la **recta tangente** a la función:

$$f(x) = \sqrt{x+2} \quad \text{en el punto } x = 7. \quad y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

$$x_0 = 7, \quad y_0 = f(7) = \sqrt{7+2} = 3$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}} \Rightarrow f'(7) = \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{6}, \quad y - 3 = \frac{1}{6}(x - 7)$$



Complementario:



Calcula los **coeficientes** a , b y c para que la **función** $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ pase por el punto $P(1,1)$, tenga un **máximo** en $x = -4$ y un **mínimo** en $x = 0$. (1,5 pt)

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

$$f(1) = 1, \quad 1 + a + b + c = 1$$

$$a + b + c = 0 \quad [1]$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b = 0$$

(condición de extremo)

$$\text{Si } x = -4, \quad 3 \cdot 16 - 8a + b = 0 \quad [2]$$

$$\text{Si } x = 0, \quad 0 + 0 + b = 0, \quad b = 0 \quad [3]$$

$$[2] \Rightarrow a = 6, \quad [1] \Rightarrow c = -6$$

$$f(x) = x^3 + 6x^2 - 6$$