

1. **Calcula y demuestra** los siguientes **límites**:

 a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 2x}{x^2 + 1} \right)^{3x} = e^{-6} = \frac{1}{e^6}$ (0,75 pt.)

 b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{4x^2 + 2x} - \sqrt{4x^2 - 3} \right) = \frac{1}{2}$ (1 pt.)

c) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 3x - 9}{x^2 + 4x + 3} = \frac{9}{2}$ (1 pt.)

 2. **Calcula** analíticamente el **dominio** y las **asíntotas** de la función $f(x)$:

$$f(x) = \frac{3x^3 + 5x^2}{x^2 - 9} \quad D = \mathbb{R} - \{-3, 3\} \quad \begin{matrix} \boxed{\text{AV}} & x = 3, & x = -3 \\ \boxed{\text{AO}} & y = 3x + 5 \end{matrix} \quad (2 \text{ pt.})$$

 3. **Calcula** analíticamente el **dominio** y la **continuidad** de la función $f(x)$ definida en los intervalos:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x < -2 \\ \frac{9}{x - 1} & \text{si } -2 \leq x < 3 \\ x^2 + 2x & \text{si } x \geq 3 \end{cases} \quad \begin{matrix} D f(x) = \mathbb{R} - \{1\} \\ C = \mathbb{R} - \{1, 3\} \end{matrix} \quad (2 \text{ pt.})$$

4. **Calcula y simplifica** las siguientes **derivadas**:

 a) $y = \frac{3x + 4}{2x^2 - 1} \quad y' = \frac{-3 - 6x^2 - 16x}{(2x^2 - 1)^2}$ (0,75 pt.)

 b) $y = 3x^2 \cdot 2^{x^3} \quad y' = 2^{x^3} (6x + 9x^4 \cdot \ln 2)$ (0,75 pt.)

 c) $y = \sqrt{\log_3 x} \quad y' = \frac{1}{2x \ln 3 \sqrt{\log_3 x}}$ (0,75 pt.)

d) $y = x^{\sqrt{x}} \quad y' = x^{\sqrt{x}} \cdot \left(\frac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{x} \right)$ (1 pt.)



Complementario:



Derivada implícita: **Calcula** la siguiente **derivada** en el punto $P(2,1)$:

$$x^2y - xy^2 + y^2 = 7 \quad (1 \text{ pt.})$$

$$y' = \frac{y^2 - 2xy}{x^2 - 2xy + 2y} \quad , \quad y'(2,1) = -\frac{3}{2}$$

1. Calcula y demuestra los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 2x}{x^2 + 1} \right)^{3x}$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x}{x^2 + 1} = 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x = +\infty$, IND 1^∞

$e^L = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} (\text{base} - 1) \cdot \text{exponente}}$

$L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x-1}{x^2+1} \cdot 3x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-6x^2-3x}{x^2+1} = \frac{\infty}{\infty} = -6$, El límite es $e^{-6} = \frac{1}{e^6}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{4x^2 + 2x} - \sqrt{4x^2 - 3} \right)$ IND $\infty - \infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{4x^2 + 2x} - \sqrt{4x^2 - 3}) \cdot (\sqrt{4x^2 + 2x} + \sqrt{4x^2 - 3})}{\sqrt{4x^2 + 2x} + \sqrt{4x^2 - 3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 + 2x - 4x^2 + 3}{\sqrt{4x^2 + 2x} + \sqrt{4x^2 - 3}}$

$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+3}{\sqrt{4x^2 + 2x} + \sqrt{4x^2 - 3}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2x}{x} + \frac{3}{x}}{\sqrt{\frac{4x^2}{x^2} + \frac{2x}{x^2}} + \sqrt{\frac{4x^2}{x^2} - \frac{3}{x^2}}} = \frac{2}{\sqrt{4} + \sqrt{4}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

c) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 3x - 9}{x^2 + 4x + 3} = \frac{0}{0}$ IND Factorizamos

$2x^2 + 3x - 9 = 0 \Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 2 \cdot (-9)}}{2 \cdot 2} = \frac{-3 \pm 9}{4} < \frac{3}{2}$ $(x - \frac{3}{2})(x + 3) \cdot 2$ o bien, $(2x - 3) \cdot (x + 3)$

$x^2 + 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2} < \frac{-3}{-1}$ $(x + 3)(x + 1)$

$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{(2x-3) \cdot (x+3)}{(x+1)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x-3}{x+1} = \frac{-6-3}{-3+1} = \frac{-9}{-2} = \frac{9}{2}$

2. Calcula analíticamente el dominio y las asíntotas de la función $f(x)$:

$f(x) = \frac{3x^3 + 5x^2}{x^2 - 9}$ $x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x = \pm 3$, $D = \mathbb{R} - \{-3, 3\}$

AV $x = 3$, $x = -3$ $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow +3^-} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow +3^+} f(x) = +\infty$

AH $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^3 + 5x^2}{x^2 - 9} = \infty$, No hay asíntota horizontal

AO $m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3 + 5x^2}{x^3 - 9x} = \frac{\infty}{\infty} = 3$

$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^3 + 5x^2}{x^2 - 9} - 3x \right)$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3 + 5x^2 - 3x^3 + 27x}{x^2 - 9} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 + 27x}{x^2 - 9} = 5$

$y = mx + n = 3x + 5$

3. **Calcula analíticamente el dominio y la continuidad** de la función $f(x)$ definida en los intervalos:

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x < -2 \\ \frac{9}{x-1} & \text{si } -2 \leq x < 3 \quad [-2, 3) \\ x^2+2x & \text{si } x \geq 3 \end{cases} \quad (2 \text{ pt.})$$

$x-1=0$, $x=1$ $\mathcal{D} f(x) = \mathbb{R} - \{1\}$, Puntos críticos y de frontera: $-2, 1, 3$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2^-} 2x+1 &= -4+1 = -3 \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{9}{x-1} &= \frac{9}{-3} = -3 = f(-2) \end{aligned} \right\} \text{Es continua } x = -2$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{9}{x-1} &= -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{9}{x-1} &= +\infty \end{aligned} \right\} \text{Discontinuidad de salto infinito en } x=1$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{9}{x-1} &= \frac{9}{2} \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} x^2+2x &= 15 = f(3) \end{aligned} \right\} \text{Discontinuidad de salto finito en } x=3$$

$$\mathcal{C} = \mathbb{R} - \{1, 3\}$$

4. **Calcula y simplifica las siguientes derivadas:**

a) $y = \frac{3x+4}{2x^2-1}$ $y' = \frac{3 \cdot (2x^2-1) - (3x+4) \cdot 4x}{(2x^2-1)^2} = \frac{6x^2-3-12x^2-16x}{(2x^2-1)^2} = \frac{-3-6x^2-16x}{(2x^2-1)^2}$

b) $y = 3x^2 \cdot 2^{x^3}$ $y' = 6x \cdot 2^{x^3} + 3x^2 \cdot 2^{x^3} \cdot \ln 2 \cdot 3x^2 = 2^{x^3} (6x + 9x^4 \cdot \ln 2)$

c) $y = \sqrt{\log_3 x}$ $y' = \frac{\frac{1}{x \cdot \ln 3}}{2\sqrt{\log_3 x}} = \frac{1}{2x \ln 3 \sqrt{\log_3 x}}$ Nota: $\overbrace{(\log_3 x)^{1/2}}^{\text{NO}} \neq \frac{1}{2} \log_3 x$

d) $y = x^{\sqrt{x}}$

$$\begin{aligned} \ln y &= \sqrt{x} \cdot \ln x \\ \frac{y'}{y} &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \ln x + \sqrt{x} \cdot \frac{1}{x} \end{aligned} \quad \left| \quad \begin{aligned} y' &= x^{\sqrt{x}} \cdot \left(\frac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{x} \right) \\ y' &= x^{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{x} \left(\frac{1}{2} \ln x + 1 \right) \end{aligned} \right.$$



Complementario:



Derivada implícita: Calcula la siguiente derivada en el punto $P(2,1)$:

$$x^2y - xy^2 + y^2 = 7$$

$$2x \cdot y + x^2 \cdot y' - y^2 - x \cdot 2yy' + 2yy' = 0$$

$$y'(x^2 - 2xy + 2y) = y^2 - 2xy$$

$$y' = \frac{y^2 - 2xy}{x^2 - 2xy + 2y}$$

$$y'(2,1) = \frac{1^2 - 2 \cdot 2 \cdot 1}{2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1} = -\frac{3}{2}$$