

1. **Calcula y demuestra** los siguientes **límites**:

 a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2 + 2x}{x^2 + 1} \right)^x = e^2$  (0,75 pt.)

 b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x - \sqrt{x^2 + 4x - 1} \right) = -2$  (1 pt.)

c)  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 3x - 9}{x^2 + 4x + 3} = \frac{9}{2}$  (1 pt.)

 2. **Calcula** analíticamente el **dominio** y las **asíntotas** de la función  $f(x)$ :

$$f(x) = \frac{2x^3 + 3x^2}{x^2 - 4} \quad D = \mathbb{R} - \{-2, 2\} \quad \begin{matrix} \boxed{AV} \\ \boxed{AO} \end{matrix} \quad \begin{matrix} x = 2, x = -2 \\ y = 2x + 3 \end{matrix} \quad (2 \text{ pt.})$$

 3. **Calcula** analíticamente el **dominio** y la **continuidad** de la función  $f(x)$  definida en los intervalos:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x < -2 \\ \frac{9}{x - 1} & \text{si } -2 \leq x < 3 \\ x^2 + 2x & \text{si } x \geq 3 \end{cases} \quad \begin{matrix} D f(x) = \mathbb{R} - \{1\} \\ C = \mathbb{R} - \{1, 3\} \end{matrix} \quad (2 \text{ pt.})$$

4. **Calcula y simplifica** las siguientes **derivadas**:

 a)  $y = \frac{3x^2 + 4}{2x - 1} \quad y' = \frac{6x^2 - 6x - 8}{(2x - 1)^2}$  (0,75 pt.)

 b)  $y = x^3 \cdot 3^{x^2} \quad y' = 3^{x^2} (3x^2 + 2x^4 \cdot \ln 3)$  (0,75 pt.)

 c)  $\sqrt{e^{2x+1}} \quad y' = \sqrt{e^{2x+1}}$  (0,75 pt.)

d)  $y = (\sqrt{x})^x \quad y' = \sqrt{x}^x \cdot (\ln \sqrt{x} + \frac{1}{2}) = \sqrt{x}^x \cdot \frac{1}{2} \cdot (\ln x + 1)$  (1 pt.)



**Complementario:**

 **Derivada implícita:** **Calcula** la siguiente **derivada** en el punto  $P(2,1)$ :

$$x^2y - xy^2 + y^2 = 7 \quad (1 \text{ pt.})$$

$$y' = \frac{y^2 - 2xy}{x^2 - 2xy + 2y} \quad , \quad y'(2,1) = -\frac{3}{2}$$

1. **Calcula y demuestra** los siguientes **límites**:

 a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2 + 2x}{x^2 + 1} \right)^x$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x}{x^2 + 1} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty, \quad \text{IND } 1^\infty$$

$$e^L = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} (\text{base} - 1) \cdot \text{exponente}}$$

$$L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{x^2+1} \cdot x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2-x}{x^2+1} = \frac{\infty}{\infty} = 2, \quad \text{El límite es } e^2$$

 b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x - \sqrt{x^2 + 4x - 1} \right) \quad \text{IND } \infty - \infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x - \sqrt{x^2 + 4x - 1})(x + \sqrt{x^2 + 4x - 1})}{(x + \sqrt{x^2 + 4x - 1})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x^2 - 4x + 1}{x + \sqrt{x^2 + 4x - 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4x + 1}{x + \sqrt{x^2 + 4x - 1}} = \frac{\infty}{\infty} \quad \text{Grado 1 arriba y abajo}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{-4x+1}{x}}{\frac{x}{x} + \sqrt{\frac{x^2}{x^2} + \frac{4x}{x^2} - \frac{1}{x^2}}} = \frac{-4}{1 + \sqrt{1}} = -\frac{4}{2} = -2$$

c)  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 3x - 9}{x^2 + 4x + 3} = \frac{0}{0} \quad \text{IND} \quad \text{Factorizamos}$

$$2x^2 + 3x - 9 = 0 \Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 2 \cdot (-9)}}{2 \cdot 2} = \frac{-3 \pm 9}{4} < \frac{3}{2} \quad \left( x - \frac{3}{2} \right) (x + 3) \cdot 2 \quad \text{o bien,}$$

$$(2x - 3) \cdot (x + 3)$$

$$x^2 + 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2} < \frac{-3}{-1} \quad (x + 3)(x + 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{(2x-3) \cdot (x+3)}{(x+1)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x-3}{x+1} = \frac{-6-3}{-3+1} = \frac{-9}{-2} = \frac{9}{2}$$

 2. **Calcula analíticamente el dominio y las asíntotas** de la función  $f(x)$ :

$$f(x) = \frac{2x^3 + 3x^2}{x^2 - 4} \quad x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2, \quad D = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$$

**AV**  $x = 2, \quad x = -2 \quad \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +2^-} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow +2^+} f(x) = +\infty$$

**AH**  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^3 + 3x^2}{x^2 - 4} = \infty, \quad \text{No hay asíntota horizontal}$

**AO**  $m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 + 3x^2}{x^3 - 4x} = \frac{\infty}{\infty} = 2$

$$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2x^3 + 3x^2}{x^2 - 4} - 2x \right)$$

$$y = mx + n = 2x + 3$$

3. **Calcula analíticamente el dominio y la continuidad** de la función  $f(x)$  definida en los intervalos:

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x < -2 \\ \frac{9}{x-1} & \text{si } -2 \leq x < 3 \\ x^2+2x & \text{si } x \geq 3 \end{cases} \quad [-2, 3) \quad (2 \text{ pt.})$$

$x-1=0$ ,  $x=1$   $\mathcal{D} f(x) = \mathbb{R} - \{1\}$ , Puntos críticos y de frontera:  $-2, 1, 3$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2^-} 2x+1 &= -4+1 = -3 \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{9}{x-1} &= \frac{9}{-3} = -3 = f(-2) \end{aligned} \right\} \text{Es continua } x = -2$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{9}{x-1} &= -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{9}{x-1} &= +\infty \end{aligned} \right\} \text{Discontinuidad de salto infinito en } x=1$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{9}{x-1} &= \frac{9}{2} \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} x^2+2x &= 15 = f(3) \end{aligned} \right\} \text{Discontinuidad de salto finito en } x=3$$

$\mathcal{C} = \mathbb{R} - \{1, 3\}$

4. **Calcula y simplifica las siguientes derivadas:**

a)  $y = \frac{3x^2+4}{2x-1}$   $y' = \frac{6x(2x-1) - (3x^2+4) \cdot 2}{(2x-1)^2} = \frac{6x^2-6x-8}{(2x-1)^2}$

b)  $y = x^3 \cdot 3^{x^2}$   $y' = 3x^2 \cdot 3^{x^2} + x^3 \cdot 3^{x^2} \cdot \ln 3 \cdot 2x = 3^{x^2} (3x^2 + 2x^4 \cdot \ln 3)$

c)  $y = \sqrt{e^{2x+1}}$   $y' = \frac{2 \cdot e^{2x+1}}{2 \cdot \sqrt{e^{2x+1}}} = \sqrt{e^{2x+1}}$

d)  $y = (\sqrt{x})^x$

$$\ln y = x \cdot \ln \sqrt{x}$$

$$\frac{y'}{y} = 1 \cdot \ln \sqrt{x} + x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \ln \sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}}$$

$$y' = y \left( \ln \sqrt{x} + \frac{1}{2} \right)$$

$$y' = \sqrt{x}^x \cdot \left( \ln \sqrt{x} + \frac{1}{2} \right)$$

Método II:

$$\ln y = x \cdot \ln x^{1/2} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot \ln x$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2} \left( 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} \right)$$

$$y' = y \cdot \frac{1}{2} \cdot (\ln x + 1)$$

$$y' = \sqrt{x}^x \cdot \frac{1}{2} \cdot (\ln x + 1) = \sqrt{x}^x \cdot \left( \ln \sqrt{x} + \frac{1}{2} \right)$$



**Complementario:**



**Derivada implícita:** Calcula la siguiente derivada en el punto  $P(2,1)$ :

$$x^2y - xy^2 + y^2 = 7$$

$$2x \cdot y + x^2 \cdot y' - y^2 - x \cdot 2yy' + 2yy' = 0$$

$$y'(x^2 - 2xy + 2y) = y^2 - 2xy$$

$$y' = \frac{y^2 - 2xy}{x^2 - 2xy + 2y}$$

$$y'(2,1) = \frac{1^2 - 2 \cdot 2 \cdot 1}{2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1} = -\frac{3}{2}$$