

DERIVADAS

1. Calcula y simplifica los siguientes derivadas:

a) $y = x \cdot \ln(x^2)$ $\ln(x^2) + 2$ (0,5 pt) b) $y = \frac{e^{2x}}{x}$ (0,5 pt)

c) $y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$ $\frac{-4x}{(x^2 - 1)^2}$ (0,5 pt) $\frac{e^{2x} \cdot (2x - 1)}{x^2}$

DERIVABILIDAD EN FUNCIONES A TROZOS

2. Halla los valores de a y b para que la función $f(x)$ sea derivable en $x = 2$:

$$f(x) = \begin{cases} -x^3 + x^2 & \text{si } x \leq 2 \\ a \cdot x - b & \text{si } x > 2 \end{cases} \quad \begin{matrix} a = -8 \\ b = -12 \end{matrix} \quad (2 \text{ pt})$$

ANÁLISIS DE FUNCIONES Máximo $(-\frac{1}{3}, \frac{59}{27})$ Crece $(-\infty, -\frac{1}{3}) \cup (1, +\infty)$
Mínimo $(1, 1)$ Decece $(-\frac{1}{3}, 1)$

3. Estudia la monotonía (crecimiento, decrecimiento) y los extremos relativos (coordenadas) de la función: $f(x) = x^3 - x^2 - x + 2$. (1,5 pt)

4. Estudia la curvatura (concavidad, convexidad) y los puntos de inflexión (coordenadas) de la función: $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 2x + 1$. (2 pt)

5. Determinense el dominio y las asíntotas de la función $f(x) = \frac{2x^2}{x-1}$. (2 pt)

Asíntotas verticales: $x = 1$ $f(x) = \mathbb{R} - \{1\}$

Asíntota oblicua: $y = 2x + 2$ Asíntota horizontal: No hay

6. Calcula la ecuación de la recta tangente a la función:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 7} \text{ en el punto } x = 3. \quad y - 4 = \frac{4}{3} \cdot (x - 3) \quad (1 \text{ pt})$$

Sol.

4

$\cap$ Cóncava $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}) \cup (0, \frac{1}{\sqrt{2}})$ p.l. $\begin{cases} (\frac{1}{\sqrt{2}}, 1 + \frac{\sqrt{2}}{8}) \\ (-\frac{1}{\sqrt{2}}, 1 - \frac{\sqrt{2}}{8}) \end{cases} (0, 1)$
 $\cup$ Convexa $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0) \cup (\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty)$



Complementario:



C. La gráfica de la **función** $f(x) = ax^3 + bx + c$ pasa por el punto $(0,0)$ y tiene un **extremo relativo** en $(1,-1)$.

- a. Calcula los **coeficientes** a , b y c . (1 pt)
- b. ¿Qué **tipo de extremo** es (**máximo** o **mínimo**)? (0,5 pt)

$$a = \frac{1}{2}, \quad b = -\frac{3}{2}, \quad c = 0$$

$$f(x) = \frac{x^3}{2} - \frac{3}{2}x \quad \text{En } x=1 \text{ hay un mínimo}$$

1. Calcula y simplifica los siguientes derivadas:

 a) $y = x \cdot \ln(x^2)$ (0,5 pt) b) $y = \frac{e^{2x}}{x}$

c) $y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$ (0,5 pt)

1a) $y = x \cdot \ln(x^2)$, $y' = 1 \cdot \ln(x^2) + x \cdot \frac{2x}{x^2} = \ln(x^2) + 2$

1b) $y = \frac{e^{2x}}{x}$, $y' = \frac{e^{2x} \cdot 2x - e^{2x} \cdot 1}{x^2} = \frac{e^{2x} \cdot (2x - 1)}{x^2}$

1c) $y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$, $y' = \frac{2x(x^2 - 1) - (x^2 + 1)2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2x(x^2 - 1 - x^2 - 1)}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-4x}{(x^2 - 1)^2}$

2. Halla los valores de a y b para que la función $f(x)$ sea derivable en $x = 2$:

$$f(x) = \begin{cases} -x^3 + x^2 & \text{si } x \leq 2 \\ a \cdot x - b & \text{si } x > 2 \end{cases} \quad (2 \text{ pt})$$

Es condición necesaria que la función sea continua, luego:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$$

$$-x^3 + x^2 = ax - b \quad \text{en } x = 2$$

$$-8 + 4 = 2a - b$$

$$-4 = 2a - b \Rightarrow b = 2a + 4 \quad [1]$$

La derivada:

$$f'(x) = \begin{cases} -3x^2 + 2x & \text{si } x \leq 2 \\ a & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Debe verificarse que $f'(2^-) = f'(2^+)$

$$-3x^2 + 2x = a \quad \text{en } x = 2$$

$$-3 \cdot 4 + 2 \cdot 2 = a \Rightarrow a = -8 \quad [2]$$

Por [1], $b = 2a + 4 \Rightarrow b = -12$

3. Estudia la monotonía (crecimiento, decrecimiento) y los extremos relativos

(coordenadas) de la función: $f(x) = x^3 - x^2 - x + 2$. (1,5 pt)

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1 = 0 \quad (\text{condición de extremo}) \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 3 \cdot (-1)}}{2 \cdot 3} = \frac{2 \pm 4}{6} < \frac{1}{3}$$

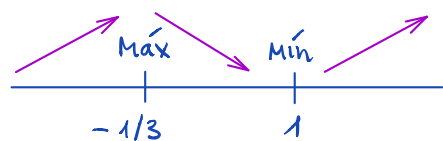
$$f''(x) = 6x - 2$$

$$f''(1) = 6 - 2 = 4 > 0 \quad \text{luego en } x = 1 \text{ hay un mínimo.}$$

$$f(1) = 1 - 1 - 1 + 2 = 1. \quad \text{Mínimo } (1, 1)$$

$$f''(-\frac{1}{3}) = 6(-\frac{1}{3}) - 2 = -4 < 0 \quad \text{luego en } x = -\frac{1}{3} \text{ hay un máximo.}$$

$$f(-\frac{1}{3}) = -\frac{1}{27} - \frac{1}{9} + \frac{1}{3} + 2 = \frac{-1 - 3 + 9 + 54}{27} = \frac{59}{27}. \quad \text{Máximo } (-\frac{1}{3}, \frac{59}{27})$$



$\left. \begin{aligned} &\text{Crece } (-\infty, -\frac{1}{3}) \cup (1, +\infty) \\ &\text{Decrece } (-\frac{1}{3}, 1) \end{aligned} \right\} \text{ Monotonía}$

4. Estudia la **curvatura (concavidad, convexidad)** y los **puntos de inflexión (coordenadas)** de la función: $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 2x + 1$. (2 pt)

$$f'(x) = 15x^4 - 15x^2 + 2$$

$$f''(x) = 60x^3 - 30x = 0 \quad (\text{Condición de punto de inflexión})$$

$$f'''(x) = 180x^2 - 30$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 60x^3 - 30x = 0 \Rightarrow 30x(2x^2 - 1) = 0 \left\{ \begin{array}{l} 0 \quad f'''(0) \neq 0 \Rightarrow \text{P.I.} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \quad f'''(\frac{1}{\sqrt{2}}) \neq 0 \Rightarrow \text{P.I.} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad f'''(-\frac{1}{\sqrt{2}}) \neq 0 \Rightarrow \text{P.I.} \end{array} \right.$$

$$f(0) = 1 \Rightarrow (0, 1) \text{ Punto de inflexión}$$

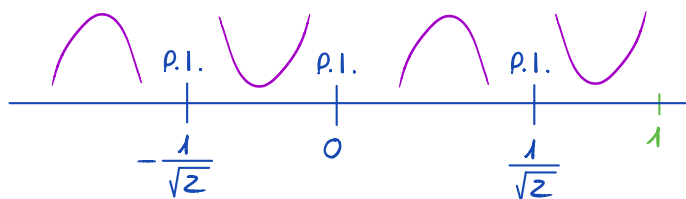
$$f(\frac{1}{\sqrt{2}}) = 1 + \frac{\sqrt{2}}{8} \approx 1,18 \Rightarrow (\frac{1}{\sqrt{2}}, 1 + \frac{\sqrt{2}}{8}) \text{ Punto de inflexión}$$

$$f(-\frac{1}{\sqrt{2}}) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{8} \approx 0,82 \Rightarrow (-\frac{1}{\sqrt{2}}, 1 - \frac{\sqrt{2}}{8}) \text{ Punto de inflexión}$$

Estudiamos la curvatura: Basta con escoger un punto intermedio al azar entre los puntos de inflexión y comprobar el signo de la segunda derivada. La curvatura cambiará a izquierda y derecha en cada P.I.

$$f''(x) = 60x^3 - 30x$$

$$f''(1) = 60 \cdot 1^3 - 30 \cdot 1 > 0 \Rightarrow \cup \text{ convexa}$$



$$\left. \begin{array}{l} \cap \text{ Cóncava } (-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}) \cup (0, \frac{1}{\sqrt{2}}) \\ \cup \text{ Convexa } (-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0) \cup (\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty) \end{array} \right\} \text{ Curvatura}$$

5. Determinénse el **dominio** y las **asíntotas** de la función $f(x) = \frac{2x^2}{x-1}$.

Buscamos los puntos críticos:

$$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1, \quad D f(x) = \mathbb{R} - \{1\}$$

$$\text{Asíntotas verticales: } x = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^2}{x-1} = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^2}{x-1} = +\infty$$

$$\text{Asíntota horizontal: } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2}{x-1} = \infty, \quad \text{No hay}$$

$$\text{Asíntota oblicua: } m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2 - x} = 2 \neq 0 \neq \infty \text{ luego hay A.O.}$$

$$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2}{x-1} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 2x^2 + 2x}{x-1} = 2$$

$$y = mx + n \Rightarrow y = 2x + 2$$



6. Calcula la **ecuación de la recta tangente** a la función:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 7} \text{ en el punto } x = 3.$$

(1 pt)

$$y - f(3) = f'(3) \cdot (x - 3)$$

$$f(3) = \sqrt{3^2 + 7} = 4$$

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 7}}, \quad f'(3) = \frac{3}{4}$$

$$y - 4 = \frac{3}{4} \cdot (x - 3)$$



C. La gráfica de la **función** $f(x) = ax^3 + bx + c$ pasa por el punto $(0,0)$ y tiene un **extremo relativo** en $(1,-1)$.

a. Calcula los **coeficientes** a , b y c .

(1 pt)

b. ¿Qué **tipo de extremo** es (máximo o mínimo)?

(0,5 pt)

$$a) P(0,0): f(0) = 0 \Rightarrow a \cdot 0^3 + b \cdot 0 + c = 0 \Rightarrow c = 0$$

$$P(1,-1): f(1) = -1 \Rightarrow a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c = -1$$

$$a + b = -1 \quad [1]$$

$$f'(x) = 3ax^2 + b = 0 \text{ en } x=1$$

$$3a \cdot 1^2 + b = 0$$

$$3a + b = 0 \quad [2]$$

$$\begin{array}{l} a + b = -1 \quad [1] \\ 3a + b = 0 \quad [2] \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} - \\ - \end{array} \right.$$

$$[2] - [1] \Rightarrow 2a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$b = -1 - a = -1 - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}, \quad b = -\frac{3}{2}$$

$$a = \frac{1}{2}, \quad b = -\frac{3}{2}, \quad c = 0$$

$$f(x) = \frac{x^3}{2} - \frac{3}{2}x$$

b) Caractericemos el extremo.

$$f''(x) = 6ax = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot x = 3x$$

$$f''(1) = 3 \cdot 1 > 0 \Rightarrow \text{En } x=1 \text{ hay un mínimo}$$