

LÍMITES DE FUNCIONES

1. Calcula los siguientes **límites**:

 a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+3} - x) = -\infty$ (1 pt)

 b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 4} = -\frac{3}{4}$ (1 pt)

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-2}{x-3} \right)^{2x} = e^2$ (1 pt)

 2. Calcula **analíticamente** el **dominio** y las **asíntotas** de la siguiente **función**:

$f(x) = \frac{3x^2 + 1}{x - 1}$
Asíntota vertical: $x = 1$, $D = \mathbb{R} - \{1\}$
Asíntota horizontal: No hay
Asíntota oblicua: $y = 3x + 3$ (2 pt)

FUNCIONES A TROZOS

 3. Calcula **analíticamente** el **dominio** y la **continuidad** (en puntos críticos y fronteras) de la siguiente **función** definida en los **intervalos**:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x+2} & \text{si } x < 1 \\ 2x-1 & \text{si } 1 \leq x < 3 \\ x^2+1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

 $D = \mathbb{R} - \{-2\}$
 $C = \mathbb{R} - \{-2, 1, 3\}$ (2 pt)

DERIVADAS

4. Calcula los siguientes **derivadas**:

 a) $y = (6x^3 + 2x^{-1} + 4)^4$ (1 pt)

b) $y = \frac{x^2 - 1}{\ln x}$
 $y' = 4 \cdot (6x^3 + 2x^{-1} + 4)^3 \cdot (18x^2 - 2x^{-2})$ (1 pt)

 c) $y = 3^{(x^3 - x)}$
 $y' = \frac{2x^2 \ln x - (x^2 - 1)}{x (\ln x)^2}$ (1 pt)

$y' = 3^{(x^3 - x)} \cdot \ln 3 \cdot (3x^2 - 1)$



Complementario:

COMPOSICIÓN DE FUNCIONES Y FUNCIONES RECÍPROCAS

1. Dada la **función** $f(x) = \frac{x+2}{x-2}$. Halla la **expresión** y el **dominio** de la función **recíproca** f^{-1} . Realiza la **comprobación** de que son recíprocas. (1,5 pt)

$$y = \frac{2+2x}{x-1} = f^{-1}(x) \quad D = \mathbb{R} - \{1, 2\}$$

LÍMITES DE FUNCIONES

1. Calcula los siguientes **límites**:

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+3} - x) & \quad (\infty - \infty) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+3} - x) \cdot \frac{\sqrt{x+3} + x}{\sqrt{x+3} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+3 - x^2}{\sqrt{x+3} + x} \quad \frac{\infty - \infty}{\infty} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x+3}{x^2} - \frac{x^2}{x^2}}{\sqrt{\frac{x+3}{x^4}} + \frac{x}{x^2}} = \frac{-1}{0} = -\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 4} & \quad \left(\frac{0}{0} \right) \quad \text{Factorizamos ; } x^2 - 7x + 10 = 0 \Rightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 1 \cdot 10}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2} < \frac{2}{5} \\ & \quad x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-5)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-5}{x+2} = \frac{2-5}{2+2} = -\frac{3}{4}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-2}{x-3} \right)^{2x} & \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-2}{x-3} \right) = 1 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = \infty \quad (1^\infty) \\ &= e^L, \quad L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x-3} \cdot 2x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x-3} = 2 \quad \Rightarrow e^2 \end{aligned}$$

2. Calcula **analíticamente** el **dominio** y las **asíntotas** de la siguiente **función**:

$$f(x) = \frac{3x^2 + 1}{x - 1}$$

$$\text{Asíntota vertical : } x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1, \quad D = \mathbb{R} - \{1\}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x^2 + 1}{x - 1} = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x^2 + 1}{x - 1} = +\infty$$

$$\text{Asíntota horizontal : } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x^2 + 1}{x - 1} = \infty \quad \text{No hay}$$

$$\text{Asíntota oblicua : } m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{3x^2 + 1}{x \cdot (x - 1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 1}{x^2 - x} = 3 \quad \text{Si hay oblicua}$$

$$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^2 + 1}{x - 1} - 3x \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 1 - 3x^2 + 3x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + 1}{x - 1} = 3$$

$$y = mx + n \Rightarrow y = 3x + 3$$

3. Calcula **analíticamente** el **dominio** y la **continuidad** (en puntos críticos y fronteras) de la siguiente **función** definida en los **intervalos**:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x+2} & \text{si } x < 1 \\ 2x-1 & \text{si } 1 \leq x < 3 \\ x^2+1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

Si $x+2=0 \Rightarrow x=-2$ pto. crítico
 $x=1, 3$ pto. de frontera
 $D = \mathbb{R} - \{-2\}$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x}{x+2} &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x}{x+2} &= -\infty \end{aligned} \right\} \text{Discontinuidad de salto infinito}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{x+2} &= \frac{1}{3} \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} 2x-1 &= 1 \end{aligned} \right\} \text{Discontinuidad de salto finito}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^-} 2x-1 &= 5 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} x^2+1 &= 10 \end{aligned} \right\} \text{Discontinuidad de salto finito}$$

$C = \mathbb{R} - \{-2, 1, 3\}$

4. Calcula los siguientes **derivadas**:

a) $y = (6x^3 + 2x^{-1} + 4)^4 \quad y' = 4 \cdot (6x^3 + 2x^{-1} + 4)^3 \cdot (18x^2 - 2x^{-2})$

b) $y = \frac{x^2-1}{\ln x} \Rightarrow y' = \frac{2x \cdot \ln x - (x^2-1) \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{2x^2 \ln x - (x^2-1)}{x (\ln x)^2}$

c) $y = 3^{(x^3-x)} \Rightarrow y' = 3^{(x^3-x)} \cdot \ln 3 \cdot (3x^2-1)$



Complementario:

1. Dada la función $f(x) = \frac{x+2}{x-2}$. Halla la **expresión** y el **dominio** de la función **recíproca**

f^{-1} . Realiza la **comprobación** de que son recíprocas.

(1,5 pt)

$$f^{-1}(x) \Rightarrow x \leftrightarrow y \quad y = \frac{x+2}{x-2} \Rightarrow x = \frac{y+2}{y-2}$$

$$\begin{array}{l|l} x(y-2) = y+2 & y(x-2) = 2+2x \\ xy - 2x = y+2 & y = \frac{2+2x}{x-2} = f^{-1}(x) \\ xy - y = 2+2x & \end{array} \quad D = \mathbb{R} - \{1, 2\}$$

$$f \circ f^{-1} = \frac{\frac{2+2x}{x-2} + 2}{\frac{2+2x}{x-2} - 2} = \frac{2+2x+2(x-2)}{2+2x-2(x-2)} = \frac{\cancel{2}+2x+\cancel{2}x-\cancel{2}}{\cancel{2}+2x-\cancel{2}x+\cancel{2}} = \frac{4x}{4} = x \quad \text{q.e.d.}$$