

LÍMITES DE FUNCIONES

1. Calcula los siguientes **límites**:

 a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x-2}}{x+6} = 0$ (1 pt)

 b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4} = \frac{3}{4}$ (1 pt)

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+3}{x+1} \right)^{x+5} = e^2$ (1 pt)

 2. Calcula **analíticamente** el **dominio** y las **asíntotas** de la siguiente **función**:

$$f(x) = \frac{4x^2 + 1}{x - 2}$$

$D = \mathbb{R} - \{2\}$ Asíntota vertical: $x = 2$
 Asíntota horizontal: No hay
 Asíntota oblicua: $y = 4x + 8$ (2 pt)

FUNCIONES A TROZOS

 3. Calcula **analíticamente** el **dominio** y la **continuidad** (en puntos críticos y fronteras) de la siguiente **función** definida en los **intervalos**:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x+2} & \text{si } x < 1 \\ 2x-1 & \text{si } 1 \leq x < 3 \\ x^2+1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

$D = \mathbb{R} - \{-2\}$
 $C = \mathbb{R} - \{-2, 1, 3\}$ (2 pt)

DERIVADAS

4. Calcula los siguientes **derivadas**:

 a) $y = (6x^3 + 2x^{-1} + 4)^5$ $y' = 5 \cdot (6x^3 + 2x^{-1} + 4)^4 \cdot (18x^2 - 2x^{-2})$ (1 pt)

b) $y = \frac{\ln x}{x^2 - 1}$ $y' = \frac{(x^2 - 1) - 2x^2 \ln x}{x \cdot (x^2 - 1)^2}$ (1 pt)

 c) $y = 3^{(x^3 - x)}$ $y' = 3^{(x^3 - x)} \cdot \ln 3 \cdot (3x^2 - 1)$ (1 pt)



Complementario:

COMPOSICIÓN DE FUNCIONES Y FUNCIONES RECÍPROCAS

1. Dada la **función** $f(x) = \frac{x+2}{x-2}$. Halla la **expresión** y el **dominio** de la función **recíproca**

f^{-1} . Realiza la **comprobación** de que son recíprocas. (1,5 pt)

$$y = \frac{2+2x}{x-1} = f^{-1}(x) \quad D = \mathbb{R} - \{1, 2\}$$

LÍMITES DE FUNCIONES

1. Calcula los siguientes **límites**:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x-2}}{x+6} \quad \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\frac{x}{x^2} - \frac{2}{x^2}}}{\frac{x}{x} + \frac{6}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}}{1 + \frac{6}{x}} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4} \quad \left(\frac{0}{0} \right) \text{ Factorizamos} \quad \begin{aligned} x^2 - 4 = 0 &\Rightarrow x = \pm 2 \\ x^2 - x - 2 = 0 &\Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} < \begin{matrix} 2 \\ -1 \end{matrix} \end{aligned}$$
$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x+1)}{\cancel{(x-2)}(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{x+2} = \frac{2+1}{2+2} = \frac{3}{4}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+3}{x+1} \right)^{x+5} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+3}{x+1} \right) = 1 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x+5 = \infty \quad (1^\infty)$$
$$= e^L, \quad L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x+1} \cdot (x+5) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+10}{x+1} = 2 \Rightarrow e^2$$

2. Calcula **analíticamente** el **dominio** y las **asíntotas** de la siguiente **función**:

$$f(x) = \frac{4x^2 + 1}{x - 2}$$

Asíntota vertical: $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$, $D = \mathbb{R} - \{2\}$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{4x^2 + 1}{x - 2} = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{4x^2 + 1}{x - 2} = +\infty$$

Asíntota horizontal: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x^2 + 1}{x - 2} = \infty$ No hay

Asíntota oblicua: $m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{4x^2 + 1}{x \cdot (x - 2)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 + 1}{x^2 - 2x} = 4$ Si hay oblicua

$$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4x^2 + 1}{x - 2} - 4x \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4\cancel{x^2} + 1 - 4\cancel{x^2} + 8x}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8x + 1}{x - 2} = 8$$

$$y = mx + n \Rightarrow y = 4x + 8$$

3. Calcula **analíticamente** el **dominio y la continuidad** (en puntos críticos y fronteras) de la siguiente **función** definida en los **intervalos**:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x+2} & \text{si } x < 1 \\ 2x-1 & \text{si } 1 \leq x < 3 \\ x^2+1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

Si $x+2=0 \Rightarrow x=-2$ Pto. crítico
 $x=1, 3$ Ptos. de frontera
 $D = \mathbb{R} - \{-2\}$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x}{x+2} &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x}{x+2} &= -\infty \end{aligned} \right\} \text{Discontinuidad de salto infinito}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{x+2} &= \frac{1}{3} \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} 2x-1 &= 1 \end{aligned} \right\} \text{Discontinuidad de salto finito}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^-} 2x-1 &= 5 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} x^2+1 &= 10 \end{aligned} \right\} \text{Discontinuidad de salto finito}$$

$E = \mathbb{R} - \{-2, 1, 3\}$

4. Calcula los siguientes **derivadas**:

a) $y = (6x^3 + 2x^{-1} + 4)^5 \Rightarrow y' = 5 \cdot (6x^3 + 2x^{-1} + 4)^4 \cdot (18x^2 - 2x^{-2})$

b) $y = \frac{\ln x}{x^2 - 1} \Rightarrow y' = \frac{\frac{1}{x} \cdot (x^2 - 1) - \ln x \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{(x^2 - 1) - 2x^2 \ln x}{x \cdot (x^2 - 1)^2}$

c) $y = 3^{(x^3 - x)} \Rightarrow y' = 3^{(x^3 - x)} \cdot \ln 3 \cdot (3x^2 - 1)$



Complementario:

1. Dada la **función** $f(x) = \frac{x+2}{x-2}$. Halla la **expresión** y el **dominio** de la función **recíproca**

f^{-1} . Realiza la **comprobación** de que son recíprocas.

(1,5 pt)

$$f^{-1}(x) \Rightarrow x \leftrightarrow y \quad y = \frac{x+2}{x-2} \Rightarrow x = \frac{y+2}{y-2}$$

$$\begin{array}{l|l} x(y-2) = y+2 & y(x-2) = 2+2x \\ xy - 2x = y+2 & y = \frac{2+2x}{x-2} = f^{-1}(x) \\ xy - y = 2+2x & \end{array} \quad D = \mathbb{R} - \{1, 2\}$$

$$f \circ f^{-1} = \frac{\frac{2+2x}{x-2} + 2}{\frac{2+2x}{x-2} - 2} = \frac{2+2x+2(x-2)}{2+2x-2(x-2)} = \frac{\cancel{2}+2x+\cancel{2}x-\cancel{2}}{\cancel{2}+2x-\cancel{2}x+\cancel{2}} = \frac{4x}{4} = x \quad \text{q.e.d.}$$