

1. **Racionaliza, efectúa y simplifica:**

a) $\frac{a^{-4} \cdot 5^{-1} \cdot b^{-5}}{b^{-2} \cdot a^{-3} \cdot 5^{-7}} =$ (0,5 pt.)

b) $\frac{\sqrt{x \cdot \sqrt{x}}}{\sqrt[3]{x}} =$ (0,75 pt.)

c) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2} + 2\sqrt{a}} =$ (0,75 pt.)

d) $\frac{\log a^3 + \log \sqrt[5]{a^2}}{\log \left(\frac{1}{a^3} \right) + \log \left(\frac{1}{a} \right)} =$ (1 pt.)

2. Se depositan en un banco 5000 € con una tasa de **interés anual compuesto** del 3,5 % .

$C_f = C_i (1 + r)^t$ donde C_i es la cantidad inicial, C_f la cantidad final, r es la tasa de interés anual (tanto por uno) y t el tiempo en años.

a) ¿Cuál es el **capital final** acumulado después de 7 años? (0,5 pt.)

b) ¿Cuántos **años** se tardaría en **duplicar** la inversión inicial? (1 pt.)

c) ¿Cuál debería ser la **tasa de interés** (tanto por ciento) para que el **capital final** sea de 5500 € en un **período de sólo 2 años**? (1 pt.)

3. **Resuelve y simplifica** las siguientes ecuaciones exponenciales y logarítmicas:

a) $\log_{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{81} \right) = x$ (0,5 pt.)

b) $16 = 2^{x^4 - 12}$ (0,75 pt.)

c) $\log(6x - 1) - \log(x + 4) = \log x$ (0,75 pt.)

d) $\frac{\log(16 - x^2)}{\log(3x - 4)} = 2$ (1,5 pt.)

e) $\log_3(x^2) - \log_{27} x = -1$ (1 pt.)

1. Racionaliza, efectúa y simplifica:

$$a) \frac{a^{-4} \cdot 5^{-1} \cdot b^{-5}}{b^{-2} \cdot a^{-3} \cdot 5^{-7}} = a^{-4+3} \cdot b^{-5+2} \cdot 5^{-1+7} = a^{-1} \cdot b^{-3} \cdot 5^6 = \frac{5^6}{a \cdot b^3}$$

$$b) \frac{\sqrt{x \cdot \sqrt{x}}}{\sqrt[3]{x}} = \frac{(x \cdot x^{1/2})^{1/2}}{x^{1/3}} = \frac{(x^{3/2})^{1/2}}{x^{1/3}} = \frac{x^{3/4}}{x^{1/3}} = x^{\frac{3}{4} - \frac{1}{3}} = x^{\frac{5}{12}} = \sqrt[12]{x^5}$$

$$c) \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2} + 2\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2} + 2\sqrt{a}} \cdot \frac{\sqrt{2} - 2\sqrt{a}}{\sqrt{2} - 2\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{2a} - 2a}{2 - 4a}$$

$$d) \frac{\log a^3 + \log \sqrt[5]{a^2}}{\log \left(\frac{1}{a^3}\right) + \log \left(\frac{1}{a}\right)} = \frac{\log a^3 + \log a^{2/5}}{\log a^{-3} + \log a^{-1}} = \frac{\log a^3 \cdot a^{2/5}}{\log a^{-3} \cdot a^{-1}} = \frac{\log a^{17/5}}{\log a^{-4}} = \frac{\frac{17}{5}}{-4} \cdot \frac{\cancel{\log a}}{\cancel{\log a}} = -\frac{17}{20}$$

sumamos potencias bajamos los exponentes

2. Se depositan en un banco 5000 € con una tasa de **interés anual compuesto** del 3,5 % .

$C_f = C_i (1 + r)^t$ donde C_i es la cantidad inicial, C_f la cantidad final, r es la tasa de interés anual (tanto por uno) y t el tiempo en años.

- a) ¿Cuál es el **capital final** acumulado después de 7 años? (0,5 pt.)
- b) ¿Cuántos **años** se tardaría en **duplicar** la inversión inicial? (1 pt.)
- c) ¿Cuál debería ser la **tasa de interés** (tanto por ciento) para que el **capital final** sea de 5500 € en un período de sólo 2 años? (1 pt.)

a) $C_f = C_i (1 + r)^t$ $t = 7 \text{ años}$, $C_i = 5000 \text{ €}$, $r\% = 3,5\%$ $\Rightarrow r = \frac{3,5}{100} = 0,035$

$$C_f = 5000 \cdot (1 + 0,035)^7 = 6361 \text{ €}$$

b) $C_f = 2 \cdot C_i$ (se duplica) $\Rightarrow 2 \cdot \cancel{C_i} = \cancel{C_i} (1 + r)^t \Rightarrow$

$$2 = (1 + r)^t$$

Para despejar el tiempo tomamos logaritmos (en base 10 por ejemplo)

$$\log 2 = \log (1 + r)^t$$

Bajamos la potencia (propiedad de los logaritmos)

$$\log 2 = t \cdot \log (1 + r) \Rightarrow t = \frac{\log 2}{\log (1 + r)} = \frac{\log 2}{\log (1,035)} \simeq 20,15 \text{ años}$$

c) $t = 2 \text{ años}$, $C_f = 5500 \text{ €}$

$$5500 = 5000 \cdot (1 + r)^2 \Rightarrow \frac{5500}{5000} = (1 + r)^2$$

(tomamos raíces cuadradas)

$$\sqrt{\frac{55}{50}} = 1 + r \Rightarrow r = \sqrt{\frac{55}{50}} - 1 \simeq 0,0488 \Rightarrow r\% = 4,88\%$$

3. **Resuelve y simplifica** las siguientes ecuaciones exponenciales y logarítmicas:

a) $\log_{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{81} \right) = x \Rightarrow \sqrt{3}^x = \frac{1}{81} \Rightarrow 3^{\frac{1}{2} \cdot x} = 3^{-4} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot x = -4 \Rightarrow x = -8$

b) $16 = 2^{x^4-12} \Rightarrow 2^4 = 2^{x^4-12} \Rightarrow 4 = x^4-12 \Rightarrow x^4 = 16 \Rightarrow x = \pm 2$

c) $\log(6x-1) - \log(x+4) = \log x$, Aplicamos las propiedades.

$$\log \frac{6x-1}{x+4} = \log x \Rightarrow \frac{6x-1}{x+4} = x \Rightarrow 6x-1 = x^2+4x \Rightarrow$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4-4 \cdot 1 \cdot 1}}{2} = 1 \text{ doble (Válida)} \quad 1 \cdot 1 = \frac{1}{1} \checkmark \text{ (Viète)}$$

Comprobación $\log(5) - \log(5) = \log(1) = 0$

d) $\frac{\log(16-x^2)}{\log(3x-4)} = 2 \Rightarrow \log(16-x^2) = 2 \cdot \log(3x-4) \Rightarrow \log(16-x^2) = \log(3x-4)^2$

$$\Rightarrow 16-x^2 = (3x-4)^2 \Rightarrow \cancel{16}-x^2 = 9x^2 - 24x + \cancel{16} \Rightarrow 10x^2 - 24x = 0 \Rightarrow$$

$$x(10x-24) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (No válida, } \neq \log 0 \text{)}, \\ x = \frac{24}{10} = \frac{12}{5} \text{ (Válida)} \end{cases}$$

e) $\log_3(x^2) - \log_{27} x = -1$ Cambiamos a base 3

$$\log_3 x^2 - \frac{\log_3 x}{\log_3 27} = -1 \Rightarrow 2 \cdot \log_3 x - \frac{\log_3 x}{3} = -1$$

Cambio de variable: $y = \log_3 x \Rightarrow 2 \cdot y - \frac{y}{3} = -1$ Multiplico todo por 3

$$6 \cdot y - y = -3 \Rightarrow 5y = -3 \Rightarrow y = -\frac{3}{5}$$

Deshacemos el cambio de variable: $y = \log_3 x = -\frac{3}{5} \Rightarrow$

$$x = 3^{-\frac{3}{5}} = \frac{1}{3^{\frac{3}{5}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{3^3}}$$