

1. **Racionaliza, efectúa y simplifica:**

a) $\frac{5^7 \cdot 3^3 \cdot 6^{-4}}{6^{-2} \cdot 3^{-3} \cdot 5^{-14}} =$ (1 pt.)

b) $\frac{-5}{\sqrt{x} - 2} =$ (0,75 pt.)

c) $\sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt{a}}} =$ (0,75 pt.)

d) $\frac{\log \sqrt[3]{a} + \log a^2}{\log \frac{1}{a}} =$ (1 pt.)

2. La **población** de un país tiene un **crecimiento exponencial** con una tasa de reproducción $r = 1,2$. En un momento dado se contabilizan 10 millones de habitantes. El aumento de población sigue la ley exponencial:

$$P(t) = P_0 \cdot r^t$$

siendo P_0 la población inicial y t el tiempo transcurrido en años.

a) ¿Cuántos **años** tarda en **triplicarse** la población? (0,75 pt.)

b) ¿Cuánto **tiempo** tiene que pasar para que la población llegue a los 50 **millones** de habitantes? (0,75 pt.)

c) ¿Cuál debería ser la **tasa de reproducción** para que la población sea de 50 **millones** de habitantes en 2 **años**? (0,5 pt.)

3. **Resuelve y simplifica** las siguientes **ecuaciones exponenciales y logarítmicas**:

a) $\ln(e^3 \cdot \sqrt{e}) =$ (0,75 pt.)

b) $3^{x^2-6} = 27$ (0,75 pt.)

c) $\log 2 + \log(x + 3) = \log(x + 5)$ (1,5 pt.)

d) $\log_4(x + 1) = \log_2(x - 1)$ (1,5 pt.)

1. Racionaliza, efectúa y simplifica:

a) $\frac{5^7 \cdot 3^3 \cdot 6^{-4}}{6^{-2} \cdot 3^{-3} \cdot 5^{-14}} = \frac{5^7 \cdot 3^3 \cdot 2^{-4} \cdot 3^{-4}}{2^{-2} \cdot 3^{-2} \cdot 3^{-3} \cdot 5^{-14}} = 5^{21} \cdot 3^4 \cdot 2^{-2} = \frac{5^{21} \cdot 3^4}{2^2}$

b) $\frac{-5}{\sqrt{x}-2} = \frac{-5}{\sqrt{x}-2} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} = \frac{-5\sqrt{x}-10}{x-4}$

$(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$ (identidad notable)

c) $\sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt{a}}} = \left(\frac{a^1}{a^{1/2}}\right)^{1/3} = (a^{1-1/2})^{1/3} = (a^{1/2})^{1/3} = a^{1/6} = \sqrt[6]{a}$

d) $\frac{\log \sqrt[3]{a} + \log a^2}{\log \frac{1}{a}} = \frac{\log a^{1/3} + \log a^2}{\log a^{-1}} = \frac{\log a^{1/3} \cdot a^2}{\log a^{-1}} = \frac{\log a^{\frac{1}{3}+2}}{\log a^{-1}} =$

$= \frac{\log a^{7/3}}{\log a^{-1}} = \frac{\frac{7}{3} \cdot \log a}{-\log a} = -\frac{7}{3}$

2. La **población** de un país tiene un **crecimiento exponencial** con una tasa de reproducción $r = 1,2$. En un momento dado se contabilizan 10 millones de habitantes. El aumento de población sigue la ley exponencial:

$$P(t) = P_0 \cdot r^t$$

siendo P_0 la población inicial y t el tiempo transcurrido en años.

- a) ¿Cuántos **años** tarda en **triplicarse** la población? (0,75 pt.)
- b) ¿Cuánto **tiempo** tiene que pasar para que la población llegue a los 50 **millones** de habitantes? (0,75 pt.)
- c) ¿Cuál debería ser la **tasa de reproducción** para que la población sea de 50 **millones** de habitantes en 2 **años**? (0,5 pt.)

a) $P = 3 \cdot P_0 = P_0 \cdot 1,2^t \Rightarrow 3 = 1,2^t$ tomamos logaritmos en base 10 (más cómodo) para despejar t :

$$\log 3 = \log 1,2^t \Rightarrow \log 3 = t \cdot \log 1,2 \Rightarrow t = \frac{\log 3}{\log 1,2} \approx 6 \text{ años}$$

b) Para que $P = 50.000.000 = 10.000.000 \cdot 1,2^t \Rightarrow$

$$\frac{50.000.000}{10.000.000} = 5 = 1,2^t \Rightarrow \text{tomamos logaritmos en base 10 (más cómodo) para despejar } t:$$

$$\log 5 = \log 1,2^t \Rightarrow \log 5 = t \cdot \log 1,2 \Rightarrow t = \frac{\log 5}{\log 1,2} \approx 8,83 \text{ años}$$

$$c) P = P_0 \cdot r^t \Rightarrow P = 50 \text{ millones} ; P_0 = 10 \text{ millones} ; t = 2 \text{ años}$$

$r = ?$ tasa desconocida

$$50 \text{ millones} = 10 \text{ millones} \cdot r^2 \Rightarrow r^2 = \frac{50}{10} = 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = \sqrt{5} \approx 2,24$$

3. Resuelve y simplifica las siguientes ecuaciones exponenciales y logarítmicas:

$$a) \ln(e^3 \cdot \sqrt{e}) = \ln(e^3 \cdot e^{1/2}) = \ln e^{3+1/2} = \ln e^{7/2} = \frac{7}{2}$$

$$b) 3^{x^2-6} = 27 \Rightarrow 3^{x^2-6} = 3^3 \Rightarrow x^2-6 = 3 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$$

$$c) \log 2 + \log(x+3) = \log(x+5)$$

$$\log 2 \cdot (x+3) = \log(x+5)$$

$$2 \cdot (x+3) = x+5 \Rightarrow$$

$$2x+6 = x+5$$

$$x = -1$$

$$d) \log_4(x+1) = \log_2(x-1) ; \text{ Cambio a base 2.}$$

$$\frac{\log_2(x+1)}{\log_2 4} = \log_2(x-1) \quad \text{siendo } \log_2 4 = 2$$

$$\frac{\log_2(x+1)}{2} = \log_2(x-1) \Rightarrow \log_2(x+1) = 2 \log_2(x-1)$$

$$\log_2(x+1) = \log_2(x-1)^2 \Rightarrow x+1 = (x-1)^2$$

$$x+1 = x^2 - 2x + 1$$

$$x^2 - 3x = 0$$

$$x \cdot (x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 & \text{Válida} \\ x = 0 & \text{No válida} \end{cases}$$

No existe $\nexists \log(0-1)$