

1. **Racionaliza, efectúa y simplifica:**

a) $\frac{3}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} = 3(\sqrt{3} - \sqrt{2})$

$\frac{3}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{3}} = \frac{3(\sqrt{2} - \sqrt{3})}{2 - 3} = 3(\sqrt{3} - \sqrt{2})$ Técnica del binomio conjugado

b) $\frac{5^2 \cdot 15 \cdot 9^{-2}}{25^2 \cdot 27 \cdot 7} = \frac{1}{5 \cdot 3^6 \cdot 7}$

$\frac{5^2 \cdot 15 \cdot 9^{-2}}{25^2 \cdot 27 \cdot 7} = \frac{5^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 3^{-4}}{5^4 \cdot 3^3 \cdot 7} = 5^{2+1-4} \cdot 3^{1-4-3} \cdot 7^{-1} = 5^{-1} \cdot 3^{-6} \cdot 7^{-1} = \frac{1}{5 \cdot 3^6 \cdot 7}$

2. La **población** de un país tiene un **crecimiento exponencial** con una tasa de reproducción $r = 1,05$. En un momento dado se contabilizan 50 millones de habitantes. El aumento de población sigue la ley exponencial:

$$P(t) = P_0 \cdot r^t$$

siendo P_0 la población inicial y t el tiempo transcurrido en años.

- a) ¿Cuántos años tarda en duplicarse la población?
- b) ¿Cuánto tiempo tiene que pasar para que la población llegue a 300 millones de habitantes?

a) $P = 2 \cdot P_0 = P_0 \cdot 1,05^t \Rightarrow 2 = 1,05^t$ tomamos logaritmos en base 10 (más cómodo) para despejar t :

$$\log 2 = \log 1,05^t \Rightarrow t = \frac{\log 2}{\log 1,05} \simeq 14,2 \text{ años}$$

b) Para que $P = 300.000.000 = 50.000.000 \cdot 1,05^t \Rightarrow$

$$\frac{300.000.000}{50.000.000} = 6 = 1,05^t \Rightarrow$$
 tomamos logaritmos en base 10 (más cómodo) para despejar t :

$$\log 6 = \log 1,05^t \Rightarrow t = \frac{\log 6}{\log 1,05} \simeq 36,7 \text{ años}$$

3. **Resuelve y simplifica** las siguientes **ecuaciones logarítmicas**:

a) $\ln(e^2 \cdot \sqrt{e}) = \frac{5}{2}$

$$\ln(e^2 \cdot \sqrt{e}) = \ln(e^2 \cdot e^{1/2}) = \ln e^{2+1/2} = \ln e^{5/2} = \frac{5}{2}$$

$$b) 1 + \log_x 5 = \log_x 2$$

$$x = \frac{2}{5}$$

$$1 + \log_x 5 = \log_x 2$$

$$1 = \log_x 2 - \log_x 5$$

$$1 = \log_x \frac{2}{5} \Rightarrow x = \frac{2}{5}$$

$$c) 2 \log(x+2) - \log(9x+18) + \log 3 = 0, x=1$$

$$2 \cdot \log(x+2) - \log(9x+18) + \log 3 = 0$$

$$\log(x+2)^2 - \log 9 \cdot (x+2) + \log 3 = 0$$

$$\log \frac{(x+2)^2}{9 \cdot (x+2)} + \log 3 = 0$$

$$\log \frac{3 \cdot (x+2)^2}{9 \cdot (x+2)} = 0$$

$$\log \frac{3 \cdot (x+2)^2}{9 \cdot (x+2)} = 0 \Rightarrow x+2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

No válida

$$\log \frac{(x+2)}{3} = 0 \quad \text{Definición}$$

$$10^0 = 1 = \frac{(x+2)}{3} \Rightarrow x+2 = 3 \Rightarrow x = 1 \text{ válida}$$

Si resolviéramos una ecuación de 2º grado, sólo una solución es válida.

4. Completa el siguiente cuadro justificando los pasos:

Intervalo	Valor absoluto
$(-7, 3)$	$ x+2 < 5$
$(-11, 1)$	$ x+5 < 6$

$$a) \text{ Intervalo } (-7, 3) \Rightarrow$$

$$\text{Centro } c = \frac{-7+3}{2} = -2, \text{ Radio } r = \frac{|3-(-7)|}{2} = 5$$

$$\text{Valor absoluto: } |x-c| < r \Rightarrow |x+2| < 5$$

$$b) |x+5| < 6 \Rightarrow c = -5 \text{ y } r = 6 \Rightarrow$$

$$\text{Intervalo } (c-r, c+r) \Rightarrow (-5-6, -5+6) \Rightarrow (-11, 1)$$