

1. **Calcula y demuestra** los siguientes **límites**:

 a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x^3 + 2x - 1}{4x^3 + 3x + 2}$  (0,5 pt.)

 b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2x + 1}{2x} \right)^{6x}$  (1 pt.)

 2. **Calcula** analíticamente el **dominio** y las **asintotas** de la función  $f(x) = \frac{3x^2}{2x - 1}$  (2 pt.)

3. Estudia el **dominio** y la **continuidad** de la siguiente función (**clasifica** las discontinuidades si las hay) :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x < 2 \\ x + 1 & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ \frac{1}{x - 3} & \text{si } x \geq 3 \end{cases} \quad (2 \text{ pt.})$$

 4. **Calcula** el valor de  $a$  para que la función  $f(x)$  sea **continua** en  $x = 2$  :

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot x^2 - \frac{11}{4} & \text{si } x \leq 2 \\ \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 4} & \text{si } x > 2 \end{cases} \quad (2 \text{ pt.})$$

5. **Calcula**  $a$  de modo que:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt{x^2 + a \cdot x + 1} - x \right) = 2$  (1,5 pt)

 6. Un estudio ambiental sobre la contaminación de un río ha determinado que la **concentración** de un **contaminante** (en **mg/L**) en función del **tiempo**  $t$  (en **días**) sigue la siguiente función:

$$C(t) = \begin{cases} 3t^2 - 4t + 1 & \text{si } 0 \leq t \leq 2 \\ 4 + \frac{1}{t - 1} & \text{si } t > 2 \end{cases}$$

a) Estudia la **continuidad** de dicha función en  $t = 2$  . (0,5 pt.)

b) ¿Qué **concentración** de contaminante se alcanzará a **largo plazo**? (0,5 pt.)



**Complementario:**

**Calcula y simplifica la derivada de la siguiente función:**  $f(x) = \frac{4x^3}{(3 - x)^3}$  (1 pt.)

1. **Calcula y demuestra** los siguientes **límites**:

a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x^3 + 2x - 1}{4x^3 + 3x + 2}$  ;  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x^3 + 2x - 1}{4x^3 + 3x + 2} = \frac{\infty}{\infty} \text{ IND} = \boxed{\frac{-3}{4}}$

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2x+1}{2x} \right)^{6x} = \frac{\infty}{\infty} \text{ IND}$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+1}{2x} = \frac{\infty}{\infty} \text{ IND} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} 6x = \infty \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2x+1}{2x} \right)^{6x} = 1^{\infty} \text{ IND} = e^L = \boxed{e^3}$$

$$L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2x+1}{2x} - 1 \right) \cdot 6x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x} \cdot 6x = 3$$

2. **Calcula** analíticamente el **dominio** y las **asíntotas** de la función  $f(x) = \frac{3x^2}{2x-1}$

Para el dominio, estudiamos los ceros del denominador.

Asíntotas verticales:  $\boxed{\text{A.V.}}$   $2x-1=0 \Rightarrow \boxed{x=\frac{1}{2}}$ , Asíntota vertical  $\Rightarrow \text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}$

Límites laterales:  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} \frac{3x^2}{2x-1} = -\infty$  ;  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{3x^2}{2x-1} = +\infty$   $\frac{\frac{1}{2}}{0,4 \quad 0,6}$

Asíntota horizontal:  $\boxed{\text{A.H.}}$   $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2}{2x-1} = \frac{\infty}{\infty} \text{ IND} = \infty \Rightarrow$  No hay asíntota horizontal

Asíntota oblicua:  $\boxed{\text{A.O.}}$   $m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{2x^2 - x} = \frac{\infty}{\infty} \text{ IND} = \frac{3}{2}$ , luego calculamos n:

$$n = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{3x^2}{2x-1} - \frac{3}{2} \cdot x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^2 - 6x^2 + 3x}{2 \cdot (2x-1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{4x-2} = \frac{\infty}{\infty} \text{ IND} = \frac{3}{4}$$

$$\boxed{y = mx + n = \frac{3}{2}x + \frac{3}{4}} \text{ Asíntota oblicua}$$

3. Estudia el **dominio** y la **continuidad** de la siguiente función (**clasifica** las discontinuidades si las hay) :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x < 2 \quad (-\infty, 2] \\ x + 1 & \text{si } 2 \leq x < 3 \quad [2, 3) \\ \frac{1}{x-3} & \text{si } x \geq 3 \quad [3, \infty) \end{cases} \quad (2 \text{ pt.})$$

$f(x)$  está definida en todo  $\mathbb{R}$ . Buscamos los puntos problemáticos. Trozos 1 y 2 sin problema (polinomios).

En el 3<sup>er</sup> trozo  $x=3 \in [3, \infty)$  anula el denominador  $\Rightarrow$

El dominio de la función:  $\text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \{3\}$

; además los puntos 2 y 3 separan los intervalos (fronteras).

Vamos a estudiar la continuidad en  $\{2, 3\}$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} x^2 - 4 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} x + 1 = 3 = f(2) \end{array} \right\} \quad \text{En } x=2 \text{ hay una discontinuidad de salto finito.}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} x + 1 = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{x-3} = +\infty \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{En } x=3 \text{ hay una discontinuidad de salto infinito.} \\ \text{Además } \nexists f(3). \end{array}$$

Finalmente,

La continuidad  $\mathcal{C} f(x) = \mathbb{R} - \{2, 3\}$  o bien se puede escribir  $f(x) \in \mathcal{C} \mathbb{R} - \{2, 3\}$

4. **Calcula** el valor de  $a$  para que la función  $f(x)$  sea **continua** en  $x = 2$  :

$$f(x) = \begin{cases} a \cdot x^2 - \frac{11}{4} & \text{si } x \leq 2 \quad (-\infty, 2] \\ \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 4} & \text{si } x > 2 \quad (2, \infty) \end{cases}$$

$f(x)$  está definida en todo  $\mathbb{R}$ . Buscamos los puntos problemáticos

Factorizamos el denominador del 2º trazo.  $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2 \notin (2, \infty)$ ; no hay problema.

Los puntos  $\notin (2, \infty) \Rightarrow$

$$\boxed{\text{Dom } f(x) = \mathbb{R}}$$

Continuidad. Estudiamos el punto  $\{2\}$  (frontera del intervalo).

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} a x^2 - \frac{11}{4} &= 4a - \frac{11}{4} = f(2) \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 4} &= \frac{0}{0} \text{ IND} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2) \cdot (x-5)}{(x-2) \cdot (x+2)} = \frac{2-5}{2+2} = -\frac{3}{4} \end{aligned} \right\}$$

Factorizamos el numerador  $x^2 - 7x + 10 = 0$

$$\Rightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 1 \cdot 10}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2} < \frac{5}{2}, \quad 5 \cdot 2 = \frac{10}{1} \checkmark$$

Para que  $f(x)$  sea continua en  $x=2$ , deberán coincidir los límites laterales.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) \Rightarrow 4a - \frac{11}{4} = -\frac{3}{4} \Rightarrow a = \frac{-\frac{3}{4} + \frac{11}{4}}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\text{Si } a = \frac{1}{2}, \text{ } f(x) \text{ es continua en } x=2}$$

5. Calcula  $a$  de modo que:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + a \cdot x + 1} - x) = 2$

$\infty - \infty$  IND, Usamos la técnica del conjugado.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + ax + 1} - x) \cdot (\sqrt{x^2 + ax + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + ax + 1} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + ax + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + ax + 1} + x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax + 1}{\sqrt{x^2 + ax + 1} + x} = \frac{\infty}{\infty} \text{ IND}$$

Como tiene grado 1 tanto en el numerador como en el denominador, dividimos los coeficientes de mayor grado:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax + 1}{\sqrt{1 \cdot x^2 + ax + 1} + 1 \cdot x} = \frac{a}{\sqrt{1} + 1} = \frac{a}{2} = 2 \Rightarrow \boxed{a = 4}$$

↑  
enunciado

6. Un estudio ambiental sobre la contaminación de un río ha determinado que la **concentración** de un **contaminante** (en mg/L) en función del **tiempo**  $t$  (en días) sigue la siguiente función:

$$C(t) = \begin{cases} 3t^2 - 4t + 1 & \text{si } 0 \leq t \leq 2 \\ 4 + \frac{1}{t-1} & \text{si } t > 2 \end{cases}$$

- a) Estudia la **continuidad** de dicha función en  $t = 2$ . (0,5 pt.)  
 b) ¿Qué **concentración** de contaminante se alcanzará a **largo plazo**? (0,5 pt.)

a) La función está definida en  $t = 2$  (trozo 1); la función es polinómica.

Continuidad. Estudiamos el punto  $\{2\}$  (frontera del intervalo).

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} 3t^2 - 4t + 1 &= 5 = C(2) \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} 4 + \frac{1}{t-1} &= 5 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{En } t=2 \text{ } C(t) \text{ es continua.} \\ &\text{A los 2 días, la concentración } C(2) = 5 \text{ mg/L} \end{aligned}$$

b) A largo plazo significa que el tiempo tiende a infinito (crece indefinidamente).

Tenemos que calcular el límite en el 2º trozo.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 4 + \frac{1}{t-1} = 4 + 0 = 4$$

A largo plazo la concentración es de 4 mg/L.



**Complementario:**

Calcula y simplifica la derivada de la siguiente función:  $f(x) = \frac{4x^3}{(3-x)^3}$

$$f'(x) = \frac{12x^2(3-x)^3 - 4x^3 \cdot 3(3-x)^2 \cdot (-1)}{(3-x)^6} = \frac{12x^2(3-x) + 12x^3}{(3-x)^4} = \frac{36x^2 - 12x^3 + 12x^3}{(3-x)^4} = \boxed{\frac{36x^2}{(3-x)^4}}$$