

EXAMEN DE COMBINATORIA

Se recomienda:

- a) Antes de hacer algo, lee todo el examen.
 - b) Resuelve antes las preguntas que se te den mejor.
 - c) Responde a cada parte del examen en una hoja distinta.
 - d) Es una hoja de examen por las dos caras sobre la que no se escribe nada.
 - e) Resuelve detalladamente el problema para obtener todos los puntos del mismo.
 - f) El examen se hará a bolígrafo, NUNCA a lápiz.
1. ¿Cuántos números diferentes pueden formarse usando cuatro de las cifras $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ si las cifras no pueden repetirse? (0.55 p)
 2. ¿Cuántos resultados posibles podemos obtener al lanzar tres monedas al aire y observar sus caras superiores? (0.55 p)
 3. En una carrera de maratón participan 37 atletas. ¿De cuántas formas distintas pueden llegar a la meta, suponiendo que no hay llegadas simultáneas, y que todos los que han empezado la terminan? (0.55 p)
 4. Deseamos colocar en una estantería tres libros de inglés idénticos, cuatro de francés idénticos y seis de alemán idénticos. ¿De cuántas formas distintas se pueden colocar? (0.55 p)
 5. Un jurado de selección entrevista a 23 candidatos para un puesto de trabajo. ¿Cuántas listas distintas puede entregar con seis candidatos para el puesto de trabajo? (0.55 p)
 6. En una cena de despedida de soltero, un grupo de quince amigos concierta en un restaurante una carta económica con cinco platos. ¿Cuántos pedidos diferentes podrá tener que gestionar el cocinero? (0.55 p)
 7. Desarrolla $(3x - y)^6$. (0.8 p)
 8. Calcula $\binom{14}{5}$ (0.3 p)
 9. ¿De cuántas formas distintas se pueden colocar en línea recta cuatro signos "+" y tres signos "-"? ¿De cuántas formas distintas si han de estar juntos los cuatro signos "+" y juntos los tres signos "-"? ¿De cuántas si siempre han de estar juntos los tres signos "-"? $(3 \times 0.7 \text{ p})(\# 2.1 \text{ p})$
 10. Tenemos tres números distintos positivos y dos distintos negativos.
 - a) ¿Cuántos productos diferentes de tres factores podemos formar?
 - b) ¿Cuántos de ellos serán negativos?
 - c) ¿Cuántos productos positivos de cuatro factores se pueden formar? $(3 \times 0.7 \text{ p})(\# 2.1 \text{ p})$
 11. Con los diez dígitos formamos números de seis cifras. ¿Cuántos de ellos tienen alguna cifra repetida? ¿Cuántos de ellos tienen las cifras distintas y, terminan y empiezan con cifra impar? $(2 \times 0.7 \text{ p})(\# 1.4 \text{ p})$

SOLUCIÓN

1. Se trata de variaciones sin repetición de seis elementos tomados de cuatro en cuatro que son un total de
 $V_{6,4} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$ números diferentes. 0.55 p
2. Se trata de variaciones con repetición de dos elementos tomados de tres en tres que son un total de
 $VR_{2,3} = 2^3 = 8$ resultados posibles. 0.55 p
3. Se trata de permutaciones de 37 elementos que son un total de
 $P_{37} = 37! = 13\,763\,753\,091\,226\,345\,046\,315\,979\,581\,580\,902\,400\,000\,000$ clasificaciones posibles
0.55 p
4. Se trata de permutaciones con repetición de 13 elementos tomados de 3,4,6 formas que son un total de
 $P_{13}^{3,4,6} = \frac{13!}{3! \cdot 4! \cdot 6!} = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 6!} = 13 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 7 = 60\,060$ colocaciones posibles. 0.55 p
5. Se trata de combinaciones sin repetición de 23 elementos tomados de seis en seis que son un total de
 $C_{23,6} = \binom{23}{6} = \frac{23!}{(23-6)! \cdot 6!} = \frac{23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17!}{17! \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 23 \cdot 11 \cdot 7 \cdot 19 \cdot 3 = 100\,947$
listas diferentes 0.55 p
6. Se trata de combinaciones con repetición de cinco elementos tomados de 15 en 15.
 $CR_{5,15} = C_{15+5-1,15} = \frac{19!}{(19-15)! \cdot 15!} = \frac{19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15!}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 15!} = 19 \cdot 3 \cdot 17 \cdot 4 = 3876$ pedidos posibles 0.55 p
7. $(3x - y)^6 =$
Aplicamos el Binomio de Newton.

$$= \binom{6}{0}(3x)^{6-0} \cdot (-y)^0 + \binom{6}{1}(3x)^{6-1} \cdot (-y)^1 + \binom{6}{2}(3x)^{6-2} \cdot (-y)^2 + \binom{6}{3}(3x)^{6-3} \cdot (-y)^3 + \binom{6}{4}(3x)^{6-4} \cdot (-y)^4 + \binom{6}{5}(3x)^{6-5} \cdot (-y)^5 + \binom{6}{6}(3x)^{6-6} \cdot (-y)^6 =$$

$$= \binom{6}{0}(3x)^6 \cdot 1 + \binom{6}{1}(3x)^5 \cdot (-y)^1 + \binom{6}{2}(3x)^4 \cdot (-y)^2 + \binom{6}{3}(3x)^3 \cdot (-y)^3 + \binom{6}{4}(3x)^2 \cdot (-y)^4 + \binom{6}{5}(3x)^1 \cdot (-y)^5 + \binom{6}{6}(3x)^0 \cdot (-y)^6 = [1] =$$

Tenemos que:
 $\binom{6}{0} = \binom{6}{6} = 1$
 $\binom{6}{1} = \binom{6}{5} = 6$
 $\binom{6}{2} = \binom{6}{4} = \frac{6!}{(6-2)! \cdot 2!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{4! \cdot 2 \cdot 1} = 15$
 $\binom{6}{3} = \frac{6!}{(6-3)! \cdot 3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$

$$= [1] = 1 \cdot 729x^6 \cdot 1 - 6 \cdot 243x^5y + 15 \cdot 81x^4y^2 - 20 \cdot 27x^3y^3 + 15 \cdot 9x^2y^4 - 6 \cdot 3xy^5 + 1 \cdot 1 \cdot y^6 =$$

$$= 729x^6 - 1458x^5y + 1215x^4y^2 - 540x^3y^3 + 135x^2y^4 - 18xy^5 + y^6 \quad 0.8 \text{ p}$$
8. $\binom{14}{5} = \frac{14!}{(14-5)! \cdot 5!} = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9!}{9! \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 7 \cdot 13 \cdot 11 \cdot 2 = 2002 \quad 0.3 \text{ p}$

9.

- Se trata de permutaciones con repetición de 7 elementos tomados de 3,4 formas que son un total de

$$P_7^{3,4} = \frac{7!}{3! \cdot 4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4!} = 7 \cdot 5 = 35 \text{ maneras de colocarlos en línea.} \quad 0.7 \text{ p}$$

- Se trata de permutaciones sin repetición de dos elementos que son un total de
 $P_2 = 2! = 2$ maneras 0.7 p

- Se trata de permutaciones con repetición de 5 elementos tomados de 1,4 formas que son un total de

$$P_5^{1,4} = \frac{5!}{1! \cdot 4!} = \frac{5 \cdot 4!}{1 \cdot 4!} = 5 = 5 \text{ maneras de colocarlos en línea.} \quad 0.7 \text{ p}$$

10.

- a) Se trata de combinaciones sin repetición de cinco elementos tomados de tres en tres que son un total de

$$C_{5,3} = \binom{5}{3} = \frac{5!}{(5-3)! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 2 \cdot 1} = 10 \text{ productos posibles} \quad 0.7 \text{ p}$$

- b) Como sólo tenemos dos números negativos, mientras que los otros tres son positivos, nuestros productos habrán de tener dos números positivos y uno negativo, que son un total de

$$C_{3,1} \cdot C_{2,1} = \binom{3}{1} \cdot \binom{2}{1} = 3 \cdot 2 = 6 \text{ productos son negativos} \quad 0.7 \text{ p}$$

- c) Para que el producto de números negativos sea positivo es necesario que aparezcan un número par de veces.

Por lo tanto, en nuestros productos, han de aparecer siempre los dos números negativos que son un total de

$$C_{3,2} = \binom{3}{2} = \binom{3}{1} = 3 \quad 0.7 \text{ p}$$

11.

- El cero, nunca puede ir en primer lugar, entonces los números que podemos formar son un total de

$$9 \cdot VR_{10,5} = 9 \cdot 10^5 = 900\,000$$

De ellos, los que no tienen ninguna cifra repetida son un total de

$$9 \cdot V_{9,5} = 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 136\,080$$

Por lo que los que tienen alguna cifra repetida son

$$900\,000 - 136\,080 = 763\,920 \quad 0.7 \text{ p}$$

- Al principio y al final, habrá de ir una cifra impar que son un total de

$$V_{5,2} = 5 \cdot 4 = 20 \text{ formas}$$

Entre ellas, habrán de ir las otras ocho cifras que son un total de

$$V_{8,4} = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680 \text{ formas}$$

Entonces aplicando el principio de multiplicación son un total de

$$20 \cdot 1680 = 33\,600 \text{ formas} \quad 0.7 \text{ p}$$