1. Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3$, calcula $\begin{vmatrix} a-1 & b-2 & 2c-6 \\ 2 & 4 & 12 \\ d & e & 2f \end{vmatrix}$ utilizando las propiedades de los determinantes.

2. Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ m & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
   a) Determinar para qué valores de m la matriz A tiene inversa.
   b) Para $m = -1$, resolver la ecuación matricial $AX = B + 2X$

3. Una empresa cinematográfica dispone de tres salas, A, B y C. Los precios de entrada a estas salas son de 3, 4 y 5 euros, respectivamente. Un día la recaudación conjunta de las tres salas fue de 720 euros y el número total de espectadores fue de 200. Si los espectadores de la sala A hubieran asistido a la sala B y los de la sala B a la sala A, se hubiese obtenido una recaudación de 20 euros más. Plantea un sistema de ecuaciones lineales para determinar el número de espectadores que acudió a cada una de las salas.

4. Considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real m:

$$\begin{cases} x - 2my + z = 1 \\ mx + 2y - z = -1 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$

   a) Discute el sistema según los valores del parámetro m.
   b) Resuélvelo para $m = \frac{1}{2}$.

5. Una empresa textil confecciona dos estampados diferentes, A y B. Debe satisfacer una demanda de al menos 30 rollos de tela del estampado A y de al menos 50 rollos del estampado B, siendo el coste de producción por rollo de tela, de 20 euros para el estampado A y de 25 euros para el B. Por otro lado, el número de rollos del B no debe ser inferior a la cuarta parte de rollos del estampado A. Además, la capacidad del almacén es de 350 rollos.
   a) ¿Cuántos rollos de tela de cada tipo de estampado debe producir para obtener un coste mínimo? ¿A cuánto asciende el coste? Plantea y resuelve el problema de programación lineal.

1. Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3$, calcula $\begin{vmatrix} a-1 & b-2 & 2c-6 \\ 2 & 4 & 12 \\ d & e & 2f \end{vmatrix}$ utilizando las propiedades de los determinantes.

Resolución

$$\begin{vmatrix} a-1 & b-2 & 2c-6 \\ 2 & 4 & 12 \\ d & e & 2f \end{vmatrix} \overset{P7}{=} \begin{vmatrix} a & b & 2c \\ 2 & 4 & 12 \\ d & e & 2f \end{vmatrix} + \underbrace{\begin{vmatrix} -1 & -2 & -6 \\ 2 & 4 & 12 \\ d & e & 2f \end{vmatrix}}_{F_2=-2F_1} \overset{P6}{=} \begin{vmatrix} a & b & 2c \\ 2 & 4 & 12 \\ d & e & 2f \end{vmatrix} \overset{P5}{=} 2\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2 & 4 & 6 \\ d & e & f \end{vmatrix} \overset{P5}{=}$$

$$2\cdot 2\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \\ d & e & f \end{vmatrix} \overset{P2}{=} -4\cdot\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -12$$

2. Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ m & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

a) Determinar para qué valores de m la matriz A tiene inversa.

b) Para $m = -1$, resolver la ecuación matricial $AX = B + 2X$

Resolución

a) A *tiene inversa* $A^{-1} \Leftrightarrow |A| \neq 0$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & m \\ m & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & m \\ m & 2 \end{vmatrix} = m^2 - 2 \quad ; \quad m^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{2}$$

$$A \text{ tiene inversa } A^{-1} \Leftrightarrow |A| \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm\sqrt{2} \quad \forall m \in \mathbb{R}$$

b) $m = -1$. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$AX = B + 2X \Leftrightarrow AX - 2X = B \Leftrightarrow (A-2I)X = B \Leftrightarrow (A-2I)^{-1}(A-2I)X = (A-2I)^{-1}B$$

$$X = (A-2I)^{-1}\cdot B$$

Llamando $P = A - 2I$, tenemos que $X = P^{-1}\cdot B$

Calculamos la inversa de $P = A - 2I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

Como $|P| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} \overset{F_2-F_1}{=} \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, existe P^{-1}

$P_{11} = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2$; $P_{12} = -\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2$; $P_{13} = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$

$P_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -1$; $P_{22} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 2$; $P_{23} = -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$P_{31} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -2$; $P_{32} = -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3$; $P_{33} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 2$

Matriz adjunta de P: $Adj(P) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Matriz inversa de P: $P^{-1} = \frac{1}{|P|}\cdot(Adj(P))^t = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -3 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

Por tanto, $X = P^{-1}\cdot B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -3 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -5 \\ 0 & -1 & -4 \end{pmatrix}$

3. Una empresa cinematográfica dispone de tres salas, A, B y C. Los precios de entrada a estas salas son de 3, 4 y 5 euros, respectivamente. Un día la recaudación conjunta de las tres salas fue de 720 euros y el número total de espectadores fue de 200. Si los espectadores de la sala A hubieran asistido a la sala B y los de la sala B a la sala A, se hubiese obtenido una recaudación de 20 euros más. Plantea un sistema de ecuaciones lineales para determinar el número de espectadores que acudió a cada una de las salas.

Resolución

Sean x, y, z el número de espectadores de las salas A, B y C respectivamente. Del enunciado, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + y + z = 200 \\ 3x + 4y + 5z = 720 \\ 4x + 3y + 5z = 740 \end{cases}$$

Vamos a utilizar el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 200 \\ 3 & 4 & 5 & 720 \\ 4 & 3 & 5 & 740 \end{pmatrix} \xleftrightarrow[F_3-4\cdot F_1]{F_2-3\cdot F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 200 \\ 0 & 1 & 2 & 120 \\ 0 & -1 & 1 & -60 \end{pmatrix} \xleftrightarrow[F_3+F_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 200 \\ 0 & 1 & 2 & 120 \\ 0 & 0 & 3 & 60 \end{pmatrix}$$

El sistema escalonado equivalente es:

$$\begin{cases} x + y + z = 200 \\ \quad y + 2z = 120 \\ \qquad 3z = 60 \end{cases} \quad \text{cuya solución es } z = 20;\ y = 8;\ x = 100$$

Por tanto, 100 espectadores en la sala A, 80 en la B y 20 en la C.

4. Considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real m:

$$\begin{cases} x - 2my + z = 1 \\ mx + 2y - z = -1 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$

a) Discute el sistema según los valores del parámetro m.

b) Resuélvelo para $m = \frac{1}{2}$.

Resolución:

a) Matriz de coeficientes de las incógnitas: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2m & 1 \\ m & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Matriz ampliada con la columna de términos independientes: $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -2m & 1 & 1 \\ m & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 1 & -2m & 1 \\ m & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \overset{\substack{C2+C1 \\ C3-C1}}{\cong} \begin{vmatrix} 1 & 1-2m & 0 \\ m & 2+m & -(1+m) \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-2m & 0 \\ 2+m & -(1+m) \end{vmatrix} =$$
$$= (2m-1)\cdot(m+1)$$

$$|A| = 0 \iff (2m-1)\cdot(m+1) = 0 \iff \begin{cases} m = -1 \\ m = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Caso 1 $\forall m \in \mathbb{R} - \left\{-1, \frac{1}{2}\right\}$ $|A| \neq 0$. Por tanto $rg(A) = 3 = rg(A^*) = n^{\underline{o}}\ incógnitas$

Sistema Compatible Determinado (Solución única)

Caso 2 $m = -1$. En este caso $|A| = 0$ y $rg(A) < 3$.

Matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Calculamos el rango de la matriz A:

Como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$, en A hay un menor de orden 2 no nulo y $rg(A) = 2$, $rg(A^*) \geq 2$.

Calculamos el rango de la matriz ampliada A^*:

Orlamos el menor $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$, que nos ha dado el rango de A, con la tercera fila y cuarta columna de A^* :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \underbrace{=}_{C1=C3} 0 \quad ; \quad \text{Por tanto } rg(A^*) = 2$$

$rg(A) = rg(A^*) = 2 < n^{\underline{o}}\ incógnitas$: Sistema Compatible Indeterminado.

---

b) $\boldsymbol{m = \frac{1}{2}}$

Matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1/2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1/2 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Calculamos el rango de la matriz A:

Como $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, en A hay un menor de orden 2 no nulo y $rg(A) = 2$, $rg(A^*) \geq 2$.

Calculamos el rango de la matriz ampliada A^*:

Orlamos el menor $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$, que nos ha dado el rango de A, con la tercera fila y cuarta columna de A^* :

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underbrace{=}_{F1=F3} 0 \quad ; \quad \text{Por tanto } rg(A^*) = 2$$

$rg(A) = rg(A^*) = 2 < n^{\underline{o}}\ incógnitas$: Sistema Compatible Indeterminado.

Observando el menor $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$ que nos ha dado el rango de la matriz A, el sistema equivalente viene dado por las ecuaciones cuyos coeficientes forman parte de dicho menor, esto es $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ \frac{1}{2}x + 2y - z = -1 \end{cases}$

Las incógnitas principales del sistema son aquellas cuyos coeficientes forman parte de las columnas del menor $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$ que nos ha dado el rango de la matriz A, es decir y y z. La incógnita x actúa como incógnita no principal o parámetro. Así, tenemos:

$x = t$; $\begin{cases} -y + z = 1 - t \\ 2y - z = -1 - \frac{1}{2}t \end{cases}$ $\forall t \in \mathbb{R}$, de donde $y = -\frac{3}{2}t$ y $z = 1 - \frac{5}{2}t$

La solución viene dada por $\begin{cases} x = t \\ y = -\frac{3}{2}t \\ z = 1 - \frac{5}{2}t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}$

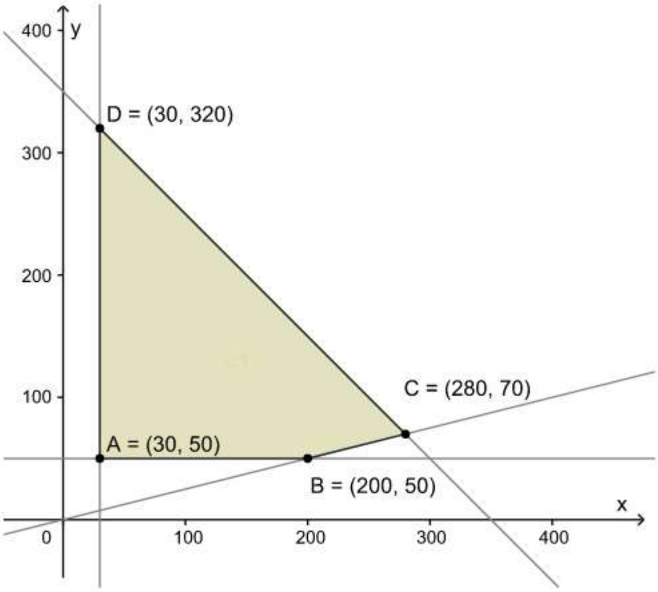
5. Una empresa textil confecciona dos estampados diferentes, A y B. Debe satisfacer una demanda de al menos 30 rollos de tela del estampado A y de al menos 50 rollos del estampado B, siendo el coste de producción por rollo de tela, de 20 euros para el estampado A y de 25 euros para el B. Por otro lado, el número de rollos del B no debe ser inferior a la cuarta parte de rollos del estampado A. Además, la capacidad del almacén es de 350 rollos.
a) ¿Cuántos rollos de tela de cada tipo de estampado debe producir para obtener unos costes mínimos? ¿A cuánto ascienden estos costes? Plantea y resuelve el problema de programación lineal.

x : número de rollos de tipo A

y : número de rollos de tipo B

Coste (función objetivo) : $C(x,y) = 20x + 25y$

$$\begin{cases} x \geq 30 \\ y \geq 50 \\ y \geq \frac{x}{4} \\ x + y \leq 350 \end{cases}$$



Evaluación del coste en los vértices de la región factible

vértice		expresión		valor (€)
$A(30{,}50)$	;	$20 \cdot 30 + 25 \cdot 50$	=	1850
$B(200{,}50)$	;	$20 \cdot 200 + 25 \cdot 50$	=	5250
$C(280{,}70)$	;	$20 \cdot 280 + 25 \cdot 70$	=	7350
$D(30{,}320)$	;	$20 \cdot 30 + 25 \cdot 320$	=	8600

Debe producir **30 rollos de tipo A y 50 de tipo B**. Los costes ascienden así a **1 850 €**.