1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$
   a) Determina si las matrices A y B son regulares.
   b) Calcula el determinante de la matriz $C = A^2 \cdot (B^t)^3$
   c) Calcula la matriz A^{86}.

2. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ a & 0 & 8 \\ -1 & a & -6 \end{pmatrix}$
   a) Determina para qué valores de $a \in \mathbb{R}$ es invertible A.
   b) Para $a = 0$, calcula A^{-1}.
   c) Para $a = 0$, resuelve el sistema $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

3. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$. Determina la matriz X que verifica $A \cdot X = B - C \cdot X$

4. Considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a:
$$\begin{cases} x - y + z = a \\ 2x - y + az = 3a \\ ax - y + 2z = 6 \end{cases}$$
   a) Discute el sistema según los valores del parámetro a.
   b) Resuélvelo cuando sea compatible indeterminado.

5. Una fábrica de piensos para animales produce diariamente como mucho seis toneladas de pienso del tipo A y como máximo cuatro toneladas de pienso del tipo B. Además, la producción diaria de pienso del tipo B no puede superar el doble de la de tipo A y, por último, el doble de la fabricación de pienso del tipo A sumada con la del tipo B debe ser como poco cuatro toneladas diarias. Teniendo en cuenta que el coste de fabricación de una tonelada de pienso del tipo A es de 1000 euros y el de una tonelada del tipo B de 2000 euros, determinar:
   a) Producción diaria para que la fábrica cumpla con sus obligaciones con un coste mínimo.
   b) Valor de dicho coste diario mínimo.
   c) Producción diaria para obtener un coste mínimo si el coste de fabricación de una tonelada de pienso del tipo A es de 2000 euros y el de una tonelada del tipo B de 1000 euros.

1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

a) Determina si las matrices A y B son regulares.

b) Calcula el determinante de la matriz $C = A^2 \cdot (B^t)^3$

c) Calcula la matriz A^{86}.

a) $\begin{vmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{C_1+C_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 1 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.\ Es\ regular.$

$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} \overset{C_3+3\cdot C_1}{=}) \begin{vmatrix} 3 & 2 & 8 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 0.\ No\ es\ regular.$

b) $|C| = |A^2 \cdot (B^t)^3| = |A^2| \cdot |(B^t)^3| = |A|^2 \cdot |B^t|^3 \overset{|B|=|B^t|}{=} |A|^2 \cdot |B|^3 = 1 \cdot 0 = 0$

c) $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I\ \ que\ es\ la\ matriz\ identidad.$

Así, las sucesivas potencias de la matriz A son: $A, A^2, I, A, A^2, I, \ldots$
La división entera de 86 *entre* 3 *es* 28 *y resto* 2.

Por tanto, $A^{86} = A^2 = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

2. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ a & 0 & 8 \\ -1 & a & -6 \end{pmatrix}$

d) Determina para qué valores de $a \in \mathbb{R}$ es invertible A.

e) Para $a = 0$ calcula A^{-1}.

f) Para $a = 0$, resuelve el sistema $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

a) La matriz A tiene inversa, si y sólo si $|A| \neq 0$

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ a & 0 & 8 \\ -1 & a & -6 \end{vmatrix} \overset{C_2-3C_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ a & -3a & 8 \\ -1 & a+3 & -6 \end{vmatrix} \overset{C_3-C_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & -3a & 8-a \\ -1 & a+3 & -5 \end{vmatrix} = a^2 + 10a - 24$

$a^2 + 10a - 24 = 0 \rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = -12 \end{cases}$

A es invertible para $a \in \mathbb{R} - \{-12,2\}$

b) $a = 0$. En este caso la matriz es $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 8 \\ -1 & 0 & -6 \end{pmatrix}$ y su determinante $|A| = -24$

Los adjuntos son:

$A_{11} = 0;\ A_{12} = -8;\ A_{13} = 0\ ; A_{21} = 18\ ; A_{22} = -5\ ; A_{23} = -3\ ;\ A_{31} = 24\ ; A_{32} = -8\ ; A_{33} = 0$

La matriz inversa es: $A^{-1} = \frac{-1}{24} \begin{pmatrix} 0 & 18 & 24 \\ -8 & -5 & -8 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{3}{4} & -1 \\ \frac{1}{3} & \frac{5}{24} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{8} & 0 \end{pmatrix}$

c) Para $a = 0$, $|A| = -24$ y, por tanto $rg(A) = 3$
Al tratase de un sistema homogéneo la única solución posible es la trivial $x = y = z = 0$ (se puede resolver por Cramer).

3. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$
Determina la matriz X que verifica $A \cdot X = B - C \cdot X$

Resolvemos la ecuación matricial:
$A \cdot X = B - C \cdot X \Leftrightarrow A \cdot X + C \cdot X = B \Leftrightarrow (A + C)X = B \Leftrightarrow X = (A + C)^{-1} \cdot B$
$A + C = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$; $(A + C)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 16 \end{pmatrix}$

4. Considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} x - y + z = a \\ 2x - y + az = 3a \\ ax - y + 2z = 6 \end{cases}$$

a) Discute el sistema según los valores del parámetro a.
b) Resuélvelo cuando sea compatible indeterminado.

Matriz de coeficientes de las incógnitas: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & a \\ a & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Matriz ampliada con la columna de términos independientes: $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & a \\ 2 & -1 & a & 3a \\ a & -1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & a \\ a & -1 & 2 \end{vmatrix} = -2 - a^2 - 2 + a + 4 + a = -a^2 + 2a$$

$|A| = 0 \iff -a^2 + 2a = 0 \iff \begin{cases} a = 0 \\ a = 2 \end{cases}$

Caso 1 $\forall a \in \mathbb{R}$ $a \neq 0, a \neq 2$ $|A| \neq 0$. Por tanto $rg(A) = 3 = rg(A^*) = n^{\underline{o}}\ incógnitas$

$$Sistema\ Compatible\ Determinado\ (Solución\ única)$$

Caso 2 $a = 0$. En este caso $|A| = 0$ y $rg(A) < 3$.

Matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

Como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, en A hay un menor de orden 2 no nulo y $rg(A) = 2$.
Calculamos el rango de la matriz ampliada A^*:
Orlamos el menor $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$, que nos ha dado el rango de A, con la tercera fila y cuarta columna de A^* :

$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$; Por tanto $rg(A^*) = 3$

$$2 = rg(A) \neq rg(A^*) = 3:\ Sistema\ Incompatible, no\ tiene\ solución$$

Caso 3 $a = 2$. En este caso $|A| = 0$ y $rg(A) < 3$.

Matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

Como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, en A hay un menor de orden 2 no nulo y $rg(A) = 2$.
Calculamos el rango de la matriz ampliada A^*:
Orlamos el menor $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$, que nos ha dado el rango de A, con la tercera fila y cuarta columna de A^* :

$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 6 \end{vmatrix} \overset{C_3 = 2 \cdot C_1}{\cong} 0$; Por tanto $rg(A^*) = 2$

$rg(A) = rg(A^*) = 2 < n^{\underline{o}}\ incógnitas$: $Sistema\ Compatible\ Indeterminado.$
b) Resolvemos para $a = 2$.

Observando el menor $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$ que nos ha dado el rango de la matriz A, el sistema equivalente viene dado por las ecuaciones cuyos coeficientes forman parte de dicho menor, esto es

$$\begin{cases} x - y \ + z = 2 \\ 2x - y + 2z = 6 \end{cases}$$

Las incógnitas principales del sistema son aquellas cuyos coeficientes forman parte de las columnas del menor $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$ que nos ha dado el rango de la matriz A, es decir x e y. La incógnita z actúa como incógnita no principal o parámetro. Así, tenemos:

$$z = t; \quad \begin{cases} x - y \ = 2 - t \\ 2x - y \ = 6 - 2t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \text{de donde} \quad x = 4 - t \ ; \ y = 2$$

La solución viene dada por $\begin{cases} x = 4 - t \\ y = 2 \\ z = \ \ t \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}$

5. Una fábrica de piensos para animales produce diariamente como mucho seis toneladas de pienso del tipo A y como máximo cuatro toneladas de pienso del tipo B. Además, la producción diaria de pienso del tipo B no puede superar el doble de la de tipo A y, por último, el doble de la fabricación de pienso del tipo A sumada con la del tipo B debe ser como poco cuatro toneladas diarias. Teniendo en cuenta que el coste de fabricación de una tonelada de pienso del tipo A es de 1000 euros y el de una tonelada del tipo B de 2000 euros, determinar:
   a) Producción diaria para que la fábrica cumpla con sus obligaciones con un coste mínimo.
   b) Valor de dicho coste diario mínimo.
   c) Producción diaria para obtener un coste mínimo si el coste de fabricación de una tonelada de pienso del tipo A es de 2000 euros y el de una tonelada del tipo B de 1000 euros.

   Resolución

   Definimos:

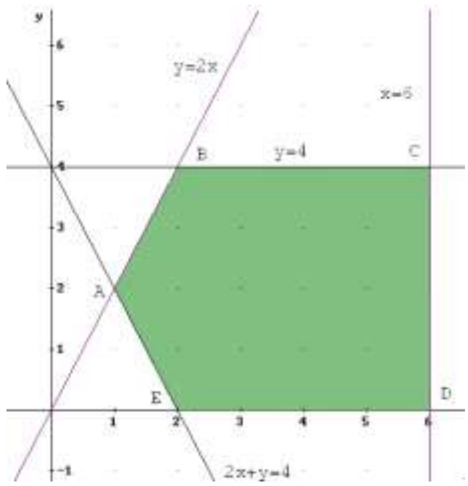
$$x \equiv \textit{número de toneladas de pienso del tipo } A$$
$$y \equiv \textit{número de toneladas de pienso del tipo } B$$

   Planteamos el siguiente problema de programación lineal:

$$\boldsymbol{Función\ Objetivo}: \ minimizar\ z = f(x, y) = 1000x + 2000y$$

$$\boldsymbol{Restricciones}: \quad s.a \equiv \begin{cases} y \le 2x \\ 2x + y \ge 4 \\ 0 \le x \le 6 \ ; \ 0 \le y \le 4 \end{cases}$$

   Representamos la región factible:



   Los vértices de dicha región son los puntos:

$$A(1,2) \ ; \ B(2,4) \ ; \ C(6,4); \ D(6,0) \ ; \ E(2,0)$$

   Evaluando la función objetivo en cada uno de ellos obtenemos:

$$f_A = 5000 \ ; \ f_B = 10000 \ ; \ f_C = 14000 \ ; \ f_D = 6000 \ ; \ f_E = 2000$$

   Observamos que el mínimo se alcanza en el punto E.

   a) La producción diaria para que la fábrica cumpla con sus obligaciones con un coste mínimo consiste en producir diariamente $x = 2$ toneladas de pienso del tipo A y ninguna de pienso del tipo B.
   b) El coste mínimo es de 2000 *euros*.
   c) En este caso la función objetivo es:

$$minimizar\ f(x, y) = 2000x + 1000y$$

   Evaluamos la función objetivo en cada vértice:

$$f_A = 4000 \ ; \ f_B = 8000 \ ; \ f_C = 16000 \ ; \ f_D = 12000 \ ; \ f_E = 4000$$

   Se trata de un problema de programación lineal con infinitas soluciones.

   El mínimo, 4000 euros, se alcanza en los vértices A y E así como en todos los puntos del segmento que los une.