1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$
   a) Determina si las matrices A y B son regulares.
   b) Calcula el determinante de la matriz $C = A^2 \cdot (B^t)^3$
   c) Calcula la matriz A^{86}.

2. Resuelve la ecuación matricial $X \cdot A - C = B$ siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real k:

$$\begin{cases} x + y + (k+1)z = 9 \\ 3x - 2y + z = 20k \\ x + y + 2zk = 9 \end{cases}$$

   a) Discútase según los valores del parámetro k.
   b) Resuélvase para el caso k = 0.

4. Determina todas las matrices que conmutan con la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

5. Un nutricionista receta a un paciente una dieta semanal basada en el consumo de lácteos y pescado. Cada kilo de lácteos cuesta 6€ y proporciona 3 unidades de proteínas y 1 unidad de calorías, mientras que cada kilo de pescado cuesta 12€ y aporta 1 unidad de proteínas y 2 unidades de calorías. La dieta exige no tomar más de 4 kilos, conjuntamente, de lácteos y pescado y además un aporte mínimo de 4 unidades de proteínas y 3 unidades de calorías.
   a) Plantea el problema de programación lineal para seguir la dieta con un coste mínimo. Representa la región factible y determina las coordenadas de los vértices.
   b) Determina los kilos de lácteos y de pescado que debe consumir con el mínimo coste e indica dicho valor.

1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

   a) Determina si las matrices A y B son regulares.

   b) Calcula el determinante de la matriz $C = A^2 \cdot (B^t)^3$

   c) Calcula la matriz A^{86}.

a) $\begin{vmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{C_1+C_2}{\cong} \begin{vmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 1 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 1 \neq 0. \; Es\ regular.$

$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} \overset{C_3+3\cdot C_1}{\cong}) \begin{vmatrix} 3 & 2 & 8 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 0. \; No\ es\ regular.$

b) $|C| = |A^2 \cdot (B^t)^3| = |A^2| \cdot |(B^t)^3| = |A|^2 \cdot |B^t|^3 \overset{|B|=|B^t|}{\cong} |A|^2 \cdot |B|^3 = 1 \cdot 0 = 0$

c) $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 5 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$ *que es la matriz identidad.*

Así, las sucesivas potencias de la matriz A son: $A, A^2, I, A, A^2, I, \ldots$
La división entera de 86 *entre* 3 *es* 28 *y resto* 2.

Por tanto, $A^{86} = A^2 = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

2. Resuelve la ecuación matricial $X \cdot A - C = B$ siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$X \cdot A - B = C \iff X \cdot A = B + C \iff X = (B + C) \cdot A^{-1}$

Inversa de A:

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \; ; \; A^{-1} = \frac{1}{|A|}[Adj(A)]^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \; ;$

Calculamos $B + C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

La solución es: $X = (B + C) \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

3. Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real k:

$$\begin{cases} x + y + (k+1)z = 9 \\ 3x - 2y + z = 20k \\ x + y + 2zk = 9 \end{cases}$$

   a) Discútase según los valores del parámetro k.

   b) Resuélvase para el caso k = 0.

a) Matriz de coeficientes de las incógnitas: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k+1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2k \end{pmatrix}$

Matriz ampliada con la columna de términos independientes: $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & k+1 & 9 \\ 3 & -2 & 1 & 20k \\ 1 & 1 & 2k & 9 \end{pmatrix}$

$$det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & k+1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2k \end{vmatrix} = -5k + 5$$

$|A| = 0 \iff -5k + 5 = 0 \iff k = 1$

Caso 1 $\forall k \in \mathbb{R}\ \ k \neq 1\ \ |A| \neq 0$. Por tanto, $rg(A) = 3 = rg(A^*) = n^{\underline{o}}\ incógnitas$

$$Sistema\ Compatible\ Determinado\ (Solución\ única)$$

Caso 2 $k = 1$ En este caso $|A| = 0\ \ y\ \ rg(A) < 3$.

Matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Matriz ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 3 & -2 & 1 & 20 \\ 1 & 1 & 2 & 9 \end{pmatrix}$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$, en A hay un menor de orden 2 no nulo y $rg(A) = 2$.

En la matriz ampliada, la fila 1 y la fila 3 coinciden, por tanto, y $rg(A^*) = 2 = rg(A)$.

$$rg(A^*) = 2 = rg(A). < n^{\underline{o}}incógnitas: Sistema\ Compatible\ Indeterminado$$

b) Resolvemos para $k = 0$. (Sistema compatible determinado)

El sistema es: $\begin{cases} x + y + z = 9 \\ 3x - 2y + z = 0 \\ x + y = 9 \end{cases}$ y lo resolvemos por el método de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 9 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 9 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{5} = \frac{18}{5}\ ; \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 9 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 9 & 0 \end{vmatrix}}{5} = \frac{27}{5}; \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 9 \end{vmatrix}}{5} = 0$$

4. Determina todas las matrices que conmutan con la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

Sean $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ las matrices buscadas.

$$A \cdot X = X \cdot A \iff \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} c & d \\ 3a & 3b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3b & a \\ 3d & c \end{pmatrix} \iff$$

$\begin{cases} c = 3b \\ d = a \\ 3a = 3d \\ 3b = c \end{cases}$ de donde las matrices buscadas son de la forma $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 3b & a \end{pmatrix}\ \ \forall a, b \in \mathbb{R}$

5. Un nutricionista receta a un paciente una dieta semanal basada en el consumo de lácteos y pescado. Cada kilo de lácteos cuesta 6€ y proporciona 3 unidades de proteínas y 1 unidad de calorías, mientras que cada kilo de pescado cuesta 12€ y aporta 1 unidad de proteínas y 2 unidades de calorías. La dieta exige no tomar más de 4 kilos, conjuntamente, de lácteos y pescado y además un aporte mínimo de 4 unidades de proteínas y 3 unidades de calorías.
   a) Plantea el problema de programación lineal para seguir la dieta con un coste mínimo. Representa la región factible y determina las coordenadas de los vértices.
   b) Determina los kilos de lácteos y de pescado que debe consumir con el mínimo coste e indica dicho valor.

   Resolución

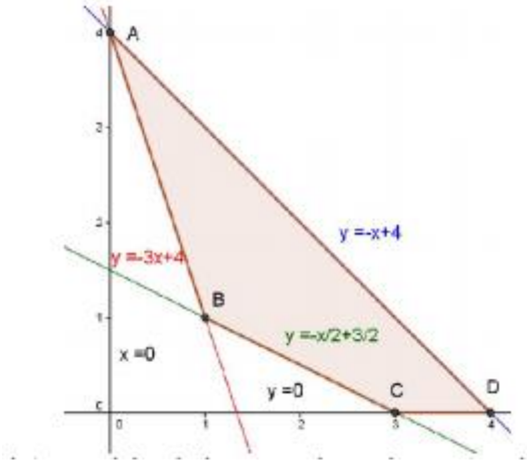
$$x \equiv Kg\ de\ lácteos\ ;\ y \equiv Kg\ de\ pescado$$

	Proteína	Calorías	Precio
Lácteos "x"	3	1	6
Pescado "y"	1	2	12

a) Planteamos el problema de programación lineal, definiendo la función objetivo y el conjunto de restricciones:

$$\text{minimizar } z = f(x, y) = 6x + 12y$$
$$\text{s.a} \begin{cases} x + y \leq 4 \\ 3x + y \geq 4 \\ x + 2y \geq 3 \\ x \geq 0\ ;\ y \geq 0 \end{cases}$$

A continuación, representamos la región factible y determinamos las coordenadas de los vértices:



La región factible es un polígono convexo limitado por los vértices $A(0,4), B(1,1), C(3,0) y\ D(4,0)$:

b) Evaluamos la función objetivo en cada uno de los vértices:

$$f(A) = 48\ ;\ f(B) = 18\ ;\ f(C) = 18\ ;\ f(D) = 24$$

El coste mínimo es 18€. Observamos que este mínimo absoluto de la función es 18 y se alcanza en los vértices B y C; por tanto también en todos los puntos del segmento que los une.