

PARTE 1: ECUACIONES, SISTEMAS DE ECUACIONES E INECUACIONES

1. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{x^2+3x-2}{x^2+x-2} + 1 = \frac{x+1}{x-1}$

b) $x - \sqrt{x} = 6$

c) $2 \cdot \log x - \log(x - 16) = 2$

d) $4^x = 2^{x+2} + 32$

2. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones lineales por el método de Gauss.

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ -2x + y - z = -4 \\ x + 2y - 2z = 7 \end{cases}$$

3. Resuelve el siguiente sistema de inecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x - y + 3 \geq 0 \\ x < 0 \\ -1 \leq y \\ y \leq 2 \end{cases}$$

4. En un centro comercial, Marta ha comprado 3 camisetas y 1 falda; Elena ha comprado 2 camisetas y 1 pantalón y Lucía sólo 2 pantalones. Sabiendo que cada una ha gastado 70€, 56€ y 40€ respectivamente, calcula el precio de una camiseta, el precio de una falda y el precio de un pantalón.

PARTE 2: ARITMÉTICA DE LA ECONOMÍA

1. Calcula el tiempo en años que debemos mantener depositados 6500€ en una cuenta con un tipo de interés del 5% anual, para obtener un capital de 8295,83€.

2. Calcula el tipo de interés compuesto anual al que debe colocarse un capital de 3000 € para que en dos años se transforme en 3307,5 €.

3. Marta decide poner en marcha un plan de ahorro, ingresando cuotas mensuales de 60€ durante 10 años y medio al 6% anual. ¿Qué cantidad de dinero obtendrá al cabo de los 10 años y medio?

4. Un agricultor pide un préstamo de 75454,6€ para la compra de un tractor. Calcula la cuota de amortización anual que debe pagar para cancelar el préstamo en 12 años al 6% de interés anual.

5. El banco A ofrece un interés anual del 3% con pago de intereses trimestrales y el banco B ofrece un interés anual del 1,8% con pago de intereses semestrales:

a) Si se invierten 1000€ durante un año, ¿en qué banco conviene realizar la inversión? Justifica la respuesta.

b) Calcula la Tasa Anual Equivalente asociada a la oferta del banco A.

PARTE 1: ECUACIONES, SISTEMAS DE ECUACIONES E INECUACIONES

1. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{x^2+3x-2}{x^2+x-2} + 1 = \frac{x+1}{x-1}$

$$\frac{x^2 + 3x - 2}{(x+2) \cdot (x-1)} + \frac{(x+2) \cdot (x-1)}{(x+2) \cdot (x-1)} = \frac{(x+2) \cdot (x+1)}{(x+2) \cdot (x-1)}$$

$$x^2 + 3x - 2 + (x+2) \cdot (x-1) = (x+2) \cdot (x+1)$$

$$x^2 + 3x - 2 + x^2 + x - 2 = x^2 + 3x + 2$$

$$2x^2 + 4x - 4 = x^2 + 3x + 2$$

$$x^2 + x - 6 = 0 \rightarrow x = 2 \text{ y } x = -3$$

Se comprueba que las soluciones son válidas ya que no anulan ningún denominador.

b) $x - \sqrt{x} = 6$

$$x - 6 = \sqrt{x}$$

$$(x - 6)^2 = (\sqrt{x})^2$$

$$x^2 - 12x + 36 = x$$

$$x^2 - 13x + 36 = 0 \rightarrow x = 9 \text{ y } x = 4$$

Se comprueba que la única solución válida es $x = 9$

c) $2 \cdot \log x - \log(x - 16) = 2$

$$\log(x^2) - \log(x - 16) = \log(100)$$

$$\log\left(\frac{x^2}{x-16}\right) = \log(100)$$

$$\frac{x^2}{x-16} = 100$$

$$x^2 - 100x + 1600 = 0 \rightarrow x = 20 \text{ y } x = 80$$

Se comprueba que ambas soluciones son válidas.

d) $4^x = 2^{x+2} + 32$

$$(2^x)^2 = 2^x \cdot 2^2 + 32$$

Cambio de variable $2^x = t$

$$t^2 - 4t - 32 = 0 \rightarrow t = 8 \text{ y } t = -4$$

- $t = 8 \Rightarrow 2^x = 8 \Rightarrow 2^x = 2^3 \Rightarrow x = 3$

- $t = -4 \Rightarrow 2^x = -4$ Absurdo, ya que la función exponencial es positiva

2. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones lineales por el método de Gauss.

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ -2x + y - z = -4 \\ x + 2y - 2z = 7 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & -2 & 7 \end{array} \right) \xrightarrow{f_2+2f_1} \left(\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 & 7 \end{array} \right) \xrightarrow{f_3-f_1} \left(\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -3 & 6 \end{array} \right)$$

$$\begin{matrix} f_3+3f_2 \\ \Rightarrow \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ sistema compatible indeterminado}$$

Escribimos el sistema equivalente escalonado a partir de los coeficientes anteriores:

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ -y + z = -2 \end{cases}$$

Despejamos el valor de la incógnita y de la segunda ecuación en función de la incógnita z (esta incógnita será un parámetro)

$$-y + z = -2 \Leftrightarrow y = 2 + z$$

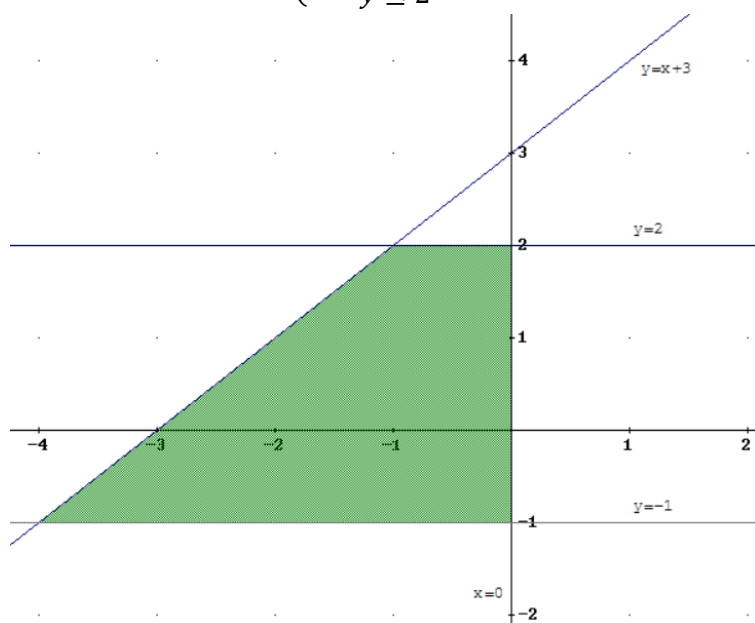
Sustituimos el valor anterior de la incógnita y en la primera ecuación. Posteriormente despejamos la incógnita x en función de la variable z .

$$x - y + z = 1 \Leftrightarrow x - 2 - z + z = 1 \Leftrightarrow x = 3$$

La solución del sistema es: $(x = 3, y = 2 + \lambda, z = \lambda) \lambda \in \mathbb{R}$

3. Resuelve el siguiente sistema de inecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x - y + 3 \geq 0 \\ x < 0 \\ -1 \leq y \\ y \leq 2 \end{cases}$$



4. En un centro comercial, Marta ha comprado 3 camisetas y 1 falda; Elena ha comprado 2 camisetas y 1 pantalón y Lucía sólo 2 pantalones. Sabiendo que cada una ha gastado 70€, 56€ y 40€ respectivamente, calcula el precio de una camiseta, el precio de una falda y el precio de un pantalón.

Planteamos el problema mediante un sistema de 3 ecuaciones lineales con 3 incógnitas.

Definimos las incógnitas:

- x : "precio en euros de una camiseta"
- y : "precio en euros de una falda"
- z : "precio en euros de un pantalón"

$$\begin{cases} 3x + y = 70 \\ 2x + z = 56 \\ 2z = 40 \end{cases}$$

De la última ecuación podemos despejar directamente la incógnita $z \rightarrow z=20$

Sustituimos el valor de z en la segunda ecuación y calculamos la incógnita x .

$$2x + z = 56 \rightarrow 2x = 56 - z \rightarrow 2x = 56 - 20 \rightarrow 2x = 36 \rightarrow x = 18$$

Por último, despejamos y de la primera ecuación:

$$3x + y = 70 \rightarrow y = 70 - 3x \rightarrow y = 70 - 54 \rightarrow y = 16$$

Solución: una camiseta cuesta 18€, una falda cuesta 16 euros y un pantalón cuesta 20 euros.

PORTE 2: ARITMÉTICA DE LA ECONOMÍA

1. Calcula el tiempo en años que debemos mantener depositados 6500€ en una cuenta con un tipo de interés del 5% anual, para obtener un capital de 8295,83€.

$$C_0 = 6500\text{€}$$

$$r = 5\% \text{ anual}$$

$$C_f = 8295,83\text{€}$$

Calculamos el tiempo transcurrido:

$$8295,83\text{€} = 6500 \cdot \left(1 + \frac{5}{100}\right)^t$$

$$8295,83 = 6500 \cdot 1,05^t$$

$$\frac{8295,83}{6500} = 1,05^t$$

$$\log\left(\frac{8295,83}{6500}\right) = \log(1,05^t)$$

$$\log\left(\frac{8295,83}{6500}\right) = t \cdot \log(1,05)$$

$$t = \frac{\log\left(\frac{8295,83}{6500}\right)}{\log(1,05)} = 5 \text{ años}$$

2. Calcula el tipo de interés compuesto anual al que debe colocarse un capital de 3000 € para que en dos años se transforme en 3307,5 €.

$$C_0 = 3000\text{€}$$

$$t = 2 \text{ años}$$

$$C_f = 3307,5 \text{ €}$$

Calculamos el interés compuesto anual:

$$3307,5 = 3000 \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^2$$

$$r = \left(\sqrt{\frac{3307,5}{3000}} - 1 \right) \cdot 100 = 5\% \text{ anual}$$

3. Marta decide poner en marcha un plan de ahorro, ingresando cuotas mensuales de 60€ durante 10 años y medio al 6% anual. ¿Qué cantidad de dinero obtendrá al final del periodo?

$$C_o = 60 \text{ cuotas mensuales}$$

$$6\% \text{ anual} \rightarrow r = \frac{6}{12}\% = 0,5\% \text{ interés mensual}$$

$$i = \frac{0,5}{100} = 0,005$$

$$t = 10 \text{ años y medio} = 126 \text{ meses}$$

El capital obtenido al cabo de 10 años y medio es:

$$C_f = 60 \cdot (1 + 0,005) \cdot \frac{(1 + 0,005)^{126} - 1}{0,005} = 10548,47 \text{ €}$$

4. Un agricultor pide un préstamo de 75454,6€ para la compra de un tractor. Calcula la cuota de amortización anual que debe pagar para cancelar el préstamo en 12 años al 6% de interés anual.

$$C_f = 75454,6 \text{ € valor del préstamo}$$

$$r = 6\% \text{ anual}$$

$$t = 12 \text{ años}$$

$$i = 0,06$$

La cuota de amortización anual del préstamo es:

$$C_0 = 75454,6 \cdot \frac{0,06 \cdot (1 + 0,06)^{12}}{(1 + 0,06)^{12} - 1} = 9000 \text{ € cuota anual}$$

5. El banco A ofrece un interés anual del 3% con pago de intereses trimestrales y el banco B ofrece un interés anual del 1,8% con pago de intereses semestrales:

a) Si se invierten 1000€ durante un año, ¿en qué banco conviene realizar la inversión? Justifica la respuesta.

b) Calcula la Tasa Anual Equivalente asociada a la oferta del banco A.

a) Calculamos el capital obtenido al cabo de un año al invertir 1000 € en el banco A:

$$C_f = 1000 \cdot \left(1 + \frac{0,75}{100}\right)^4 = 1000 \cdot 1,0075^4 = 1030,34\text{€}$$

Calculamos el capital obtenido al cabo de un año al invertir 1000 € en el banco B:

$$C_f = 1000 \cdot \left(1 + \frac{0,9}{100}\right)^2 = 1000 \cdot 1,009^2 = 1018,08\text{€}$$

El capital final es superior si depositamos el dinero en el banco A, por tanto, esta es la mejor opción.

b) Calculamos la tasa anual equivalente asociada al banco A:

$$\left(1 + \frac{0,75}{100}\right)^4 = 1 + \frac{TAE}{100}$$

$$\left(1 + \frac{0,75}{100}\right)^4 - 1 = \frac{TAE}{100}$$

$$TAE = \left[\left(1 + \frac{0,75}{100}\right)^4 - 1\right] \cdot 100 = 3,034\%$$