

PARTE 1: ECUACIONES, SISTEMAS DE ECUACIONES E INECUACIONES

1. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{x+4}{4x+7} = \frac{x-3}{x^2-x-6}$

b) $\sqrt{-x+2} - x = 0$

c) $\log(3x-1) = -2 + \log 50$

d) $2 \cdot 2^{3x} - 2^{2x+1} - 4 \cdot 2^x = 0$

2. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones lineales por el método de Gauss.

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 3 \\ 2x + 3y + z = 1 \\ x + y + 4z = -2 \end{cases}$$

3. Resuelve el siguiente sistema de inecuaciones lineales:

$$\begin{cases} y \leq 2x \\ 2x + y \geq 4 \\ 0 \leq x \leq 6 ; 0 \leq y \leq 4 \end{cases}$$

4. Un cajero automático solo tiene billetes de 10, 20 y 50€. En total hay 130 billetes con un importe de 3000€. Determina cuántos billetes hay de cada tipo suponiendo que el número de billetes de 10€ duplica al número de billetes de 50€.

PARTE 2: ARITMÉTICA DE LA ECONOMÍA

1. Calcula el tiempo en años que debemos mantener depositados 6500€ en una cuenta con un tipo de interés compuesto del 5% anual, para obtener unos intereses de 1795,83€.
2. Calcula el tipo de interés compuesto anual al que debe colocarse un capital de 2000 € para que en dos años se transforme en 2247,2 €.
3. Marta pone en marcha un plan de ahorro, ingresando cuotas trimestrales de 95€ durante 10 años y medio al 3% anual. ¿Qué cantidad de dinero obtendrá al cabo de los 10 años y medio?
4. ¿Cuál es la cuota mensual que hay que pagar para saldar un préstamo de 7500€ en 4 años al 6% de interés anual?
5. Un banco ofrece un interés anual del 3% con pago de interés cuatrimestral durante el primer cuatrimestre y un interés anual del 1,8% con pago de interés mensual el resto de meses hasta completar el año. Calcula la Tasa Anual Equivalente.

PARTE 1: ECUACIONES, SISTEMAS DE ECUACIONES E INECUACIONES

1. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{x+4}{4x+7} = \frac{x-3}{x^2-x-6}$

$$(x+4) \cdot (x^2-x-6) = (4x+7) \cdot (x-3); x^3 + 3x^2 - 10x - 24 = 4x^2 - 5x - 21;$$
$$x^3 - x^2 - 5x - 3 = 0;$$

resolvemos la ecuación de grado 3 con la regla de Ruffini y obtenemos:

$$x^3 - x^2 - 5x - 3 = 0 \begin{cases} x = 3 \\ x = -1 \text{ doble} \end{cases}$$

Comprobaciones:

$x = -1$ es una solución válida

$x = 3$ no es válida ya que anula uno de los denominadores

b) $\sqrt{-x+2} - x = 0$

$$\sqrt{-x+2} = x; (\sqrt{-x+2})^2 = x^2; -x+2 = x^2; x^2+x-2=0 \begin{cases} x=1 \text{ solución válida} \\ x=-2 \text{ solución no válida} \end{cases}$$

c) $\log(3x-1) = -2 + \log 50$

$$\log(3x-1) + \log 100 = \log 50; \log[(3x-1) \cdot 100] = \log 50;$$

$$(3x-1) \cdot 100 = 50; 300x - 100 = 50; 300x = 150; x = \frac{1}{2} \text{ solución válida}$$

d) $2 \cdot 2^{3x} - 2^{2x+1} - 4 \cdot 2^x = 0$

$$2 \cdot (2^x)^3 - 2 \cdot (2^x)^2 - 4 \cdot 2^x = 0 \text{ cambio de variable } 2^x = t$$

$$2 \cdot t^3 - 2 \cdot t^2 - 4 \cdot t = 0; 2t \cdot (t^2 - t - 2) = 0 \begin{cases} t=0 \rightarrow 2^x=0 \text{ no hay solución} \\ t=-1 \rightarrow 2^x=-1 \text{ no hay solución} \\ t=2 \rightarrow 2^x=2 \rightarrow x=1 \text{ solución} \end{cases}$$

2. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones lineales por el método de Gauss.

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 3 \\ 2x + 3y + z = 1 \\ x + y + 4z = -2 \end{cases}$$

Aplicamos el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2-2f_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & 7 & -5 \\ 1 & 1 & 4 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3-f_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & 7 & -5 \\ 0 & -1 & 7 & -5 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{f_3-f_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ sistema compatible indeterminado}$$

Escribimos el sistema equivalente escalonado a partir de los coeficientes anteriores:

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 3 \\ -y + 7z = -5 \end{cases}$$

Despejamos el valor de la incógnita y de la segunda ecuación en función de la incógnita z (esta incógnita será un parámetro)

$$y = 7z + 5$$

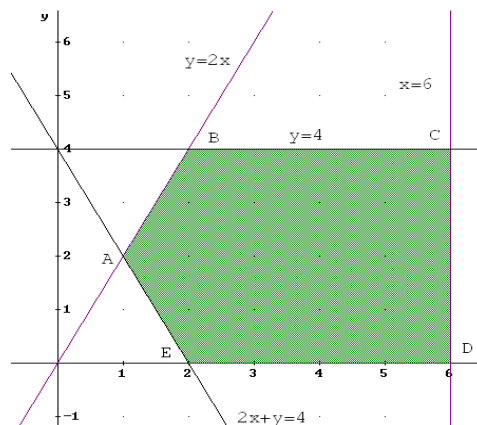
Sustituimos el valor anterior de la incógnita y en la primera ecuación. Posteriormente despejamos la incógnita x en función de la variable z .

$$x + 2 \cdot (7z + 5) - 3z = 3 \Leftrightarrow x = -11z - 7$$

La solución del sistema viene dada por: $(x, y, z) = (-11z - 7, 7z + 5, z) \quad z \in \mathbb{R}$

3. Resuelve el siguiente sistema de inecuaciones lineales:

$$\begin{cases} y \leq 2x \\ 2x + y \geq 4 \\ 0 \leq x \leq 6 ; 0 \leq y \leq 4 \end{cases}$$



4. Un cajero automático solo tiene billetes de 10, 20 y 50€. En total hay 130 billetes con un importe de 3000€. Determina cuántos billetes hay de cada tipo suponiendo que el número de billetes de 10€ duplica al número de billetes de 50€.

Planteamos el problema mediante un sistema de 3 ecuaciones lineales con 3 incógnitas.

Definimos las incógnitas:

- x : "número de billetes de 10€"
- y : "número de billetes de 20€"
- z : "número de billetes de 50€"

$$\begin{cases} x + y + z = 130 \\ 10x + 20y + 50z = 3000 \\ x = 2z \end{cases}$$

sustituimos $x = 2z$ en las dos primeras ecuaciones y obtenemos un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas que resolvemos por la método de reducción:

$$\begin{cases} 2z + y + z = 130 \\ 10 \cdot 2z + 20y + 50z = 3000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y + 3z = 130 \\ 20y + 70z = 3000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -20y - 60z = -2600 \\ 20y + 70z = 3000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10z = 400 \\ z = 40 \end{cases}$$

Por tanto: $x = 2z = 80 \rightarrow y = 130 - 3z = 10$

Solución: hay 80 billetes de 10€, 10 billetes de 20€ y 40 billetes de 50€.

PARTE 2: ARITMÉTICA DE LA ECONOMÍA

1. Calcula el tiempo en años que debemos mantener depositados 6500€ en una cuenta con un tipo de interés compuesto del 5% anual, para obtener unos intereses de 1795,83€.

$$C_0 = 6500€$$

$$r = 5\% \text{ anual}$$

$$C_f = 6500 + 1795,83 = 8295,83€$$

Calculamos el tiempo transcurrido:

$$8295,83€ = 6500 \cdot \left(1 + \frac{5}{100}\right)^t \rightarrow 8295,83 = 6500 \cdot 1,05^t \rightarrow \frac{8295,83}{6500} = 1,05^t$$

$$\log\left(\frac{8295,83}{6500}\right) = \log(1,05^t) \rightarrow \log\left(\frac{8295,83}{6500}\right) = t \cdot \log(1,05) \rightarrow t = \frac{\log\left(\frac{8295,83}{6500}\right)}{\log(1,05)} = 5 \text{ años}$$

2. Calcula el tipo de interés compuesto anual al que debe colocarse un capital de 2000 € para que en dos años se transforme en 2247,2 €.

$$C_0 = 2000 \text{ €}$$

$$t = 2 \text{ años}$$

$$C_f = 2247,2 \text{ €}$$

Calculamos el interés compuesto anual:

$$2247,2 = 2000 \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^2 \rightarrow r = \left(\sqrt{\frac{2247,2}{2000}} - 1\right) \cdot 100 = 6\% \text{ anual}$$

3. Marta pone en marcha un plan de ahorro, ingresando cuotas trimestrales de 95€ durante 10 años y medio al 3% anual. ¿Qué cantidad de dinero obtendrá al cabo de los 10 años y medio?

Se trata de un ejercicio de anualidades de capitalización

$$C_0 = 95 \text{ cuota trimestral}$$

$$3\% \text{ anual} \rightarrow r = \frac{3}{4}\% = 0,75\% \text{ interés trimestral}$$

$$i = \frac{0,75}{100} = 0,0075$$

$$t = 10 \text{ años y medio} = 42 \text{ trimestres}$$

El capital obtenido al cabo de 10 años y medio es:

$$C_f = 95 \cdot (1 + 0,0075) \cdot \frac{(1 + 0,0075)^{42} - 1}{0,0075} = 4704,58 \text{ €}$$

4. ¿Cuál es la cuota mensual que hay que pagar para saldar un préstamo de 7500€ en 4 años al 6% de interés anual?

Se trata de un ejercicio de anualidades de amortización

$$C_f = 7500 \text{ € valor del préstamo}$$

$$r = 6\% \text{ anual} \rightarrow 0,5\% \text{ mensual}$$

$$t = 4 \text{ años} \rightarrow 48 \text{ meses}$$

$$i = 0,005$$

La cuota de amortización mensual es:

$$C_0 = 7500 \cdot \frac{0,005 \cdot (1 + 0,005)^{48}}{(1 + 0,005)^{48} - 1} = 176,14 \text{ € cuota anual}$$

5. Un banco ofrece un interés anual del 3% con pago de interés cuatrimestral durante el primer cuatrimestre y un interés anual del 1,8% con pago de interés mensual el resto de meses hasta completar el año. Calcula la Tasa Anual Equivalente.

$$3\% \text{ anual} \rightarrow 1\% \text{ cuatrimestral durante el primer cuatrimestre}$$

$$1,8\% \text{ anual} \rightarrow 0,15\% \text{ mensual durante los 8 meses restantes}$$

Calculamos el TAE (Tasa anual equivalente):

$$\left(1 + \frac{1}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{0,15}{100}\right)^8 = 1 + \frac{TAE}{100}$$

$$TAE = \left[\left(1 + \frac{1}{100}\right) \cdot \left(1 + \frac{0,15}{100}\right)^8 - 1\right] \cdot 100 = 2,22\%$$