

PARTE 1: ECUACIONES, SISTEMAS DE ECUACIONES E INECUACIONES (70%)

1. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{x+4}{4x+7} = \frac{x-3}{x^2-x-6}$

b) $4 \cdot 2^{3x} - 2^{2x+1} - 2^{x+1} = 0$

2. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones lineales por el método de Gauss.

$$\begin{cases} -x - 2y + 3z = -3 \\ 2x + 3y + z = 0 \\ -x - y - 4z = 3 \end{cases}$$

3. Resuelve el siguiente sistema de inecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + y \leq 20 \\ x \geq 5 \\ 0 \leq y \leq 8 \\ x \geq y \end{cases}$$

4. Un cajero automático de una determinada entidad bancaria sólo admite billetes de 50, 20 y 10 euros. Los viernes depositan en el cajero 225 billetes por un importe total de 7.000 euros. Sabiendo que la suma del número de billetes de 50 y de 10 euros es el doble que el número de billetes de 20 euros, calcula el número de billetes de cada valor depositado.

PARTE 2: ARITMÉTICA DE LA ECONOMÍA (30%)

1. Calcula el tiempo en años que tiene que pasar para obtener un capital de 29009,56 € aportando cuotas anuales de 5000€ periódicamente, en una cuenta con un interés anual del 5%.
2. Decidimos comprar una casa por valor de 295000€, que supone unos gastos de gestión de 5000€. Para ello, tenemos ahorrados 100000€ y el resto lo financiamos solicitando un préstamo al 2,5% anual a pagar en anualidades en un plazo de 4 años. ¿Cuál es el importe de la cuota anual? Construye la tabla de amortización del préstamo.
3. Una entidad bancaria A ofrece un interés anual del 6% con pago de interés mensual. En cambio, otra entidad B ofrece un interés anual del 6% con pago de interés trimestral. Calcula la Tasa anual equivalente de cada una de ellas y razona en cuál nos conviene más realizar una inversión de 1000€.

PARTE 1: ECUACIONES, SISTEMAS DE ECUACIONES E INECUACIONES

1. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{x+4}{4x+7} = \frac{x-3}{x^2-x-6}$

$$(x+4) \cdot (x^2 - x - 6) = (4x+7) \cdot (x-3); x^3 + 3x^2 - 10x - 24 = 4x^2 - 5x - 21;$$
$$x^3 - x^2 - 5x - 3 = 0;$$

resolvemos la ecuación de grado 3 con la regla de Ruffini y obtenemos:

$$x^3 - x^2 - 5x - 3 = 0 \begin{cases} x = 3 \\ x = -1 \text{ doble} \end{cases}$$

Comprobaciones:

$x = -1$ es una solución válida

$x = 3$ no es válida ya que anula uno de los denominadores

b) $4 \cdot 2^{3x} - 2^{2x+1} - 2^{x+1} = 0$

$$4 \cdot (2^x)^3 - 2 \cdot (2^x)^2 - 2 \cdot 2^x = 0 \text{ cambio de variable } 2^x = t$$

$$4 \cdot t^3 - 2 \cdot t^2 - 2 \cdot t = 0; 2t \cdot (2t^2 - t - 1) = 0 \begin{cases} t = 0 \rightarrow 2^x = 0 \text{ no hay solución} \\ t = -1/2 \rightarrow 2^x = -1/2 \text{ no hay solución} \\ t = 1 \rightarrow 2^x = 1 \rightarrow x = 0 \text{ solución} \end{cases}$$

2. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones lineales por el método de Gauss.

$$\begin{cases} -x - 2y + 3z = -3 \\ 2x + 3y + z = 0 \\ -x - y - 4z = 3 \end{cases}$$

Aplicamos el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2-2f_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & 7 & -6 \\ 1 & 1 & 4 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3-f_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & 7 & -6 \\ 0 & -1 & 7 & -6 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{f_3-f_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & 7 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ sistema compatible indeterminado}$$

Escribimos el sistema equivalente escalonado a partir de los coeficientes anteriores:

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 3 \\ -y + 7z = -6 \end{cases}$$

Despejamos el valor de la incógnita y de la segunda ecuación en función de la incógnita z (esta incógnita será un parámetro)

$$y = 7z + 6$$

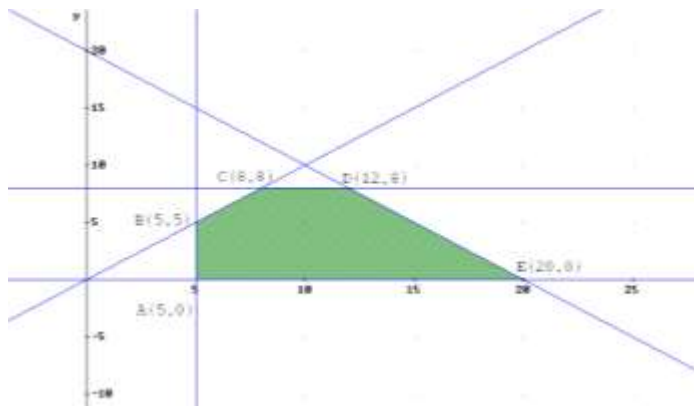
Sustituimos el valor anterior de la incógnita y en la primera ecuación. Posteriormente despejamos la incógnita x en función de la variable z.

$$x + 2 \cdot (7z + 6) - 3z = 3 \Leftrightarrow x = -11z - 9$$

La solución del sistema viene dada por: $(x, y, z) = (-11z - 9, 7z + 6, z)$ $z \in \mathbb{R}$

3. Resuelve el siguiente sistema de inecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + y \leq 20 \\ x \geq 5 \\ 0 \leq y \leq 8 \\ x \geq y \end{cases}$$



4. Un cajero automático de una determinada entidad bancaria sólo admite billetes de 50, 20 y 10 euros. Los viernes depositan en el cajero 225 billetes por un importe total de 7.000 euros. Sabiendo que la suma del número de billetes de 50 y de 10 euros es el doble que el número de billetes de 20 euros, calcula el número de billetes de cada valor depositado.

Planteamos el problema mediante un sistema de 3 ecuaciones lineales con 3 incógnitas.

Definimos las incógnitas:

- x : "número de billetes de 50 euros"
- y : "número de billetes de 20 euros"
- z : "número de billetes de 10 euros"

$$\begin{cases} x + y + z = 225 \\ 50x + 20y + 10z = 7000 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 225 \\ 50 & 20 & 10 & 7000 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2 - 50f_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 225 \\ 0 & -30 & -40 & -4250 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3 - f_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 225 \\ 0 & -30 & -40 & -4250 \\ 0 & -3 & 0 & -225 \end{pmatrix}$$

Observamos que de la última fila podemos despejar la incógnita y . Escribimos el sistema equivalente escalonado.

$$\begin{cases} x + y + z = 225 \\ -30y - 40z = -4250 \\ -3y = -225 \end{cases}$$

Despejamos y de la tercera ecuación: $y = 75$ billetes

Sustituimos el valor de y en la segunda ecuación y calculamos la incógnita z .

$$\begin{aligned} -30y - 40z &= -4250 ; 40z = -30y + 4250 ; 40z = -2250 + 4250 \\ 40z &= 2000 ; z = 50 \text{ billetes} \end{aligned}$$

Sustituimos los valores anteriores en la primera ecuación y obtenemos la incógnita x .

$$x + y + z = 225 ; x = 225 - y - z ; x = 225 - 75 - 50 ; x = 100 \text{ billetes}$$

Solución:

El cajero dispone de 100 billetes de 50 euros, 75 billetes de 20 euros y 50 billetes de 10 euros.

PARTE 2: ARITMÉTICA DE LA ECONOMÍA

1. Calcula el tiempo en años que tiene que pasar para obtener un capital de 29009,56 € aportando cuotas anuales de 5000€ periódicamente, en una cuenta con un interés anual del 5%.

capital final $\rightarrow C = 29009,56$ €

rédito $\rightarrow r = 5\%$ anual

cuota anual $C = 5000$ €

Calculamos el tiempo transcurrido:

$$29009,56 = 5000 \cdot (1 + 0,05) \cdot \frac{(1 + 0,05)^t - 1}{0,05} ; 29009,56 = 5000 \cdot 1,05 \cdot \frac{(1,05)^t - 1}{0,05}$$

$$\frac{29009,56 \cdot 0,05}{5000 \cdot 1,05} = (1,05)^t - 1 \quad ; \quad \frac{29009,56 \cdot 0,05}{5000 \cdot 1,05} + 1 = (1,05)^t$$

$$1,27628 = (1,05)^t \quad ; \quad \log 1,27628 = \log(1,05)^t$$

$$t = \frac{\log 1,27628}{\log 1,05} = 5 \text{ años}$$

2. Decidimos comprar una casa por valor de 295000€, que supone unos gastos de gestión de 5000€. Para ello, tenemos ahorrados 100000€ y el resto lo financiamos solicitando un préstamo al 2,5% anual a pagar en anualidades en un plazo de 4 años. ¿Cuál es el importe de la cuota anual? Construye la tabla de amortización del préstamo.

La compra de la casa nos supone 300000€, si tenemos ahorrados 100000€, entonces el valor del préstamo solicitado es de 200000€.

$$C_f = 200000€$$

$$r = 2,5\% \text{ anual}$$

$$t = 4 \text{ años}$$

$$i = 0,025$$

La cuota de amortización anual del préstamo es:

$$C = 200000 \cdot \frac{0,025 \cdot (1 + 0,025)^4}{(1 + 0,025)^4 - 1} = 53163,58 €$$

Tabla de amortización del préstamo:

AÑO	CUOTA	INTERES	CAPITAL AMORTIZADO	CAPITAL PENDIENTE
1				200000
2	53163,58	5000,00	48163,58	151836,42
3	53163,58	3795,91	49367,66	102468,76
4	53163,58	2561,72	50601,86	51866,90
5	53163,58	1296,67	51866,90	0,00

Cálculos:

Anualidad 1: solicitamos el préstamo de 200000€

Anualidad 2: pagamos una cuota anual de 53163,58€. Parte de la cuota son intereses y otra parte es capital amortizado del préstamo. En este caso los intereses son $0,025 \cdot 200000 = 5000 €$. Por tanto, hemos amortizado $53163,58 - 5000 = 48163,58 €$.

El capital pendiente es $200000 - 48163,58 = 151836,42 €$

(para el resto de anualidades se razona de forma análoga)

Se puede observar que al cabo de los 4 años el capital pendiente es 0 y hemos amortizado el préstamo.

5. Una entidad bancaria A ofrece un interés anual del 6% con pago de interés mensual. En cambio, otra entidad B ofrece un interés anual del 6% con pago de interés trimestral. Calcula la Tasa anual equivalente de cada una de ellas y razona en cuál nos conviene más realizar una inversión de 1000€.

Entidad A: 6% anual $\rightarrow$ 0,5% mensual

$$\left(1 + \frac{0,5}{100}\right)^{12} = 1 + \frac{TAE}{100} \rightarrow TAE = 6,17 \%$$

Entidad B: 6% anual $\rightarrow$ 1,5% trimestral

$$\left(1 + \frac{1,5}{100}\right)^4 = 1 + \frac{TAE}{100} \rightarrow TAE = 6,14 \%$$

Para invertir 1000€ durante un año nos conviene más hacerlo en la entidad A ya que la tasa anual equivalente es superior a la de la entidad B.