

1. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{x}{x^2-1} + 1 = \frac{x}{x+1}$

b) $x - \sqrt{25 - x^2} = 1$

c) $\log(x - 2) + 1 = \log(5x - 10) + \log\left(\frac{x-6}{3}\right)$

d) $9^{x+1} + 3^{2x+2} = 2$

2. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones lineales por el método de Gauss.

$$\begin{cases} -x + y + z = 5 \\ 2x - y - 4z = -5 \\ x + y - 5z = 5 \end{cases}$$

3. Resuelve el siguiente sistema de inecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + y \leq 9 \\ 0 \leq x \leq 5 \\ y \leq 2x \\ y \geq 0 \end{cases}$$

4. Un cajero automático de una determinada entidad bancaria sólo admite billetes de 50, 20 y 10 euros. Los viernes depositan en el cajero 225 billetes por un importe total de 7.000 euros. Sabiendo que la suma del número de billetes de 50 y de 10 euros es el doble que el número de billetes de 20 euros, calcula el número de billetes de cada valor depositado.

1. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{4}{x^2-1} + 1 = \frac{x}{x+1}$

$$\frac{4}{(x-1) \cdot (x+1)} + \frac{(x-1) \cdot (x+1)}{(x-1) \cdot (x+1)} = \frac{x \cdot (x-1)}{(x-1) \cdot (x+1)}$$

$$4 + (x-1) \cdot (x+1) = x \cdot (x-1); 4 + x^2 - 1 = x^2 - x; x = -3$$

Se comprueba que la solución es válida y que, además, no anula ningún denominador.

b) $x - \sqrt{25 - x^2} = 1$

$$x - 1 = \sqrt{25 - x^2}$$

$$(x-1)^2 = (\sqrt{25 - x^2})^2$$

$$(x-1)^2 = 25 - x^2$$

$$x^2 - 2x + 1 = 25 - x^2$$

$$2x^2 - 2x - 24 = 0$$

$$x^2 - x - 12 = 0 \rightarrow x = -3 \text{ y } x = 4$$

Se comprueba que la única solución válida es $x = 4$

c) $\log(x-2) + 1 = \log(5x-10) + \log\left(\frac{x-6}{3}\right)$

$$\log(x-2) + \log 10 = \log(5x-10) + \log\left(\frac{x-6}{3}\right)$$

$$\log[10 \cdot (x-2)] = \log\left[(5x-10) \cdot \left(\frac{x-6}{3}\right)\right]$$

$$10 \cdot (x-2) = (5x-10) \cdot \left(\frac{x-6}{3}\right)$$

$$10x - 20 = \frac{5x^2 - 40x + 60}{3}$$

$$30x - 60 = 5x^2 - 40x + 60$$

$$5x^2 - 70x + 120 = 0 \rightarrow x = 2 \text{ y } x = 12$$

Se comprueba que la única solución válida es $x = 12$

d) $9^{x+1} + 3^{2x+2} = 2$

$$9^{x+1} + 3^{2 \cdot (x+1)} = 2$$

$$9^{x+1} + 9^{x+1} = 2$$

$$2 \cdot 9^{x+1} = 2$$

$$9^{x+1} = 1$$

$$x + 1 = 0$$

$$x = -1$$

2. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones lineales por el método de Gauss.

$$\begin{cases} -x + y + z = 5 \\ 2x - y - 4z = -5 \\ x + y - 5z = 5 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & -4 & -5 \\ 1 & 1 & -5 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2+2f_1} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & -5 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3+f_1} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & -4 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_3-2f_2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ sistema compatible indeterminado}$$

Escribimos el sistema equivalente escalonado a partir de los coeficientes anteriores:

$$\begin{cases} -x + y + z = 5 \\ y - 2z = 5 \end{cases}$$

Despejamos el valor de la incógnita y de la segunda ecuación en función de la incógnita z (esta incógnita será un parámetro)

$$y - 2z = 5 \Leftrightarrow y = 2z + 5$$

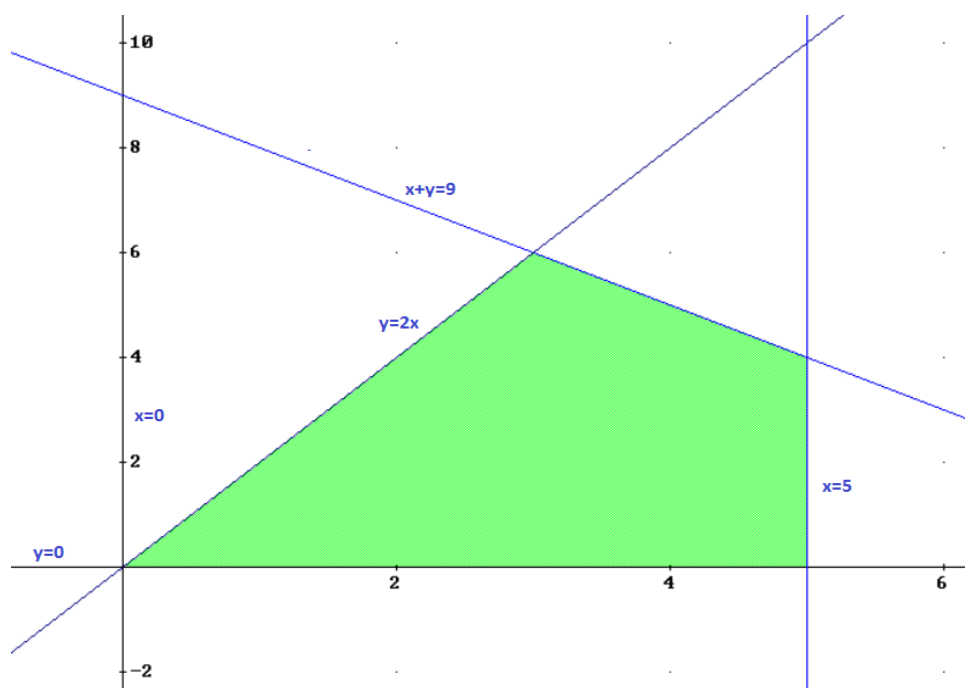
Sustituimos el valor anterior de la incógnita y en la primera ecuación. Posteriormente despejamos la incógnita x en función de la variable z .

$$-x + y + z = 5 \Leftrightarrow -x + 2z + 5 + z = 5 \Leftrightarrow x = 3z$$

La solución del sistema es: $(x = 3\lambda, y = 2\lambda + 5, z = \lambda) \lambda \in \mathbb{R}$

3. Resuelve el siguiente sistema de inecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + y \leq 9 \\ 0 \leq x \leq 5 \\ y \leq 2x \\ y \geq 0 \end{cases}$$



4. Un cajero automático de una determinada entidad bancaria sólo admite billetes de 50, 20 y 10 euros. Los viernes depositan en el cajero 225 billetes por un importe total de 7.000 euros. Sabiendo que la suma del número de billetes de 50 y de 10 euros es el doble que el número de billetes de 20 euros, calcula el número de billetes de cada valor depositado.

Planteamos el problema mediante un sistema de 3 ecuaciones lineales con 3 incógnitas.

Definimos las incógnitas:

- x: "número de billetes de 50 euros"
- y: "número de billetes de 20 euros"
- z: "número de billetes de 10 euros"

$$\begin{cases} x + y + z = 225 \\ 50x + 20y + 10z = 7000 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 225 \\ 50 & 20 & 10 & 7000 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2 - 50f_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 225 \\ 0 & -30 & -40 & -4250 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3 - f_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 225 \\ 0 & -30 & -40 & -4250 \\ 0 & -3 & 0 & -225 \end{pmatrix}$$

Observamos que de la última fila podemos despejar la incógnita y. Escribimos el sistema equivalente escalonado.

$$\begin{cases} x + y + z = 225 \\ -30y - 40z = -4250 \\ -3y = -225 \end{cases}$$

Despejamos y de la tercera ecuación: $y = 75$ billetes

Sustituimos el valor de y en la segunda ecuación y calculamos la incógnita z.

$$\begin{aligned} -30y - 40z &= -4250 ; 40z = -30y + 4250 ; 40z = -2250 + 4250 \\ 40z &= 2000 ; z = 50 \text{ billetes} \end{aligned}$$

Sustituimos los valores anteriores en la primera ecuación y obtenemos la incógnita x.

$$x + y + z = 225 ; x = 225 - y - z ; x = 225 - 75 - 50 ; x = 100 \text{ billetes}$$

Solución:

El cajero dispone de 100 billetes de 50 euros, 75 billetes de 20 euros y 50 billetes de 10 euros.