

1. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{x^2+3x-2}{x^2+x-2} + 1 = \frac{x+1}{x-1}$

b) $x - \sqrt{16 - 2x} = 4$

c) $\log(x - 2) = \log(5x - 10) + \log\left(\frac{x-6}{3}\right) - 1$

d) $4^{x+1} + 2^{2x+2} - 4 = 0$

2. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones lineales por el método de Gauss.

$$\begin{cases} -2x + y - z = -4 \\ x - y + z = 1 \\ x + 2y - 2z = 7 \end{cases}$$

3. Resuelve el siguiente sistema de inecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x - y > -3 \\ -2 < x < 0 \\ -1 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

4. Un agricultor tiene repartidas sus 10 hectáreas de terreno en cultivo de arroz, de trigo y de cebada. La superficie dedicada al trigo ocupa 2 hectáreas más que la dedicada a la cebada, mientras que la de arroz tiene 6 hectáreas menos que la superficie total dedicada al cultivo de trigo y cebada. ¿Cuántas hectáreas tiene dedicadas a cada uno de los cultivos?

1. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{x^2+3x-2}{x^2+x-2} + 1 = \frac{x+1}{x-1}$

$$\frac{x^2+3x-2}{(x+2) \cdot (x-1)} + \frac{(x+2) \cdot (x-1)}{(x+2) \cdot (x-1)} = \frac{(x+2) \cdot (x+1)}{(x+2) \cdot (x-1)}$$

$$x^2+3x-2+(x+2) \cdot (x-1) = (x+2) \cdot (x+1)$$

$$x^2+3x-2+x^2+x-2 = x^2+3x+2$$

$$2x^2+4x-4 = x^2+3x+2$$

$$x^2+x-6 = 0 \rightarrow x = 2 \text{ y } x = -3$$

Se comprueba que las soluciones son válidas ya que no anulan ningún denominador.

b) $x - \sqrt{16-2x} = 4$

$$x-4 = \sqrt{16-2x}$$

$$(x-4)^2 = (\sqrt{16-2x})^2$$

$$x^2-8x+16 = 16-2x$$

$$x^2-6x = 0 \rightarrow x = 0 \text{ y } x = 6$$

Se comprueba que la única solución válida es $x = 6$

c) $\log(x-2) = \log(5x-10) + \log\left(\frac{x-6}{3}\right) - 1$

Reescribimos la ecuación: $\log(x-2) + 1 = \log(5x-10) + \log\left(\frac{x-6}{3}\right)$

$$\log(x-2) + \log 10 = \log(5x-10) + \log\left(\frac{x-6}{3}\right)$$

$$\log[10 \cdot (x-2)] = \log\left[(5x-10) \cdot \left(\frac{x-6}{3}\right)\right]$$

$$10 \cdot (x-2) = (5x-10) \cdot \left(\frac{x-6}{3}\right)$$

$$10x-20 = \frac{5x^2-40x+60}{3}$$

$$30x-60 = 5x^2-40x+60$$

$$5x^2-70x+120 = 0 \rightarrow x^2-14x+24 = 0 \rightarrow x = 2 \text{ y } x = 12$$

Se comprueba que la única solución válida es $x = 12$

d) $4^{x+1} + 2^{2x+2} - 4 = 0$

$$2^{2x+2} + 2^{2x+2} = 4$$

$$2 \cdot 2^{2x+2} = 4$$

$$2^{2x+2} = 2$$

$$2x+2 = 1$$

$$x = -1/2$$

2. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones lineales por el método de Gauss.

$$\begin{cases} -2x + y - z = -4 \\ x - y + z = 1 \\ x + 2y - 2z = 7 \end{cases}$$

Multiplicamos la primera ecuación por (-1) y la intercambiamos con la segunda, obteniendo el siguiente sistema equivalente:

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x - y + z = 4 \\ x + 2y - 2z = 7 \end{cases}$$

Aplicamos el método de Gauss para resolverlo:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -2 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2-2f_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3-f_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{f_3-3f_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ sistema compatible indeterminado}$$

Escribimos el sistema equivalente escalonado a partir de los coeficientes anteriores:

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ y - z = 2 \end{cases}$$

Despejamos el valor de la incógnita y de la segunda ecuación en función de la incógnita z (esta incógnita será un parámetro)

$$y - z = 2 \Leftrightarrow y = 2 + z$$

Sustituimos el valor anterior de la incógnita y en la primera ecuación. Posteriormente despejamos la incógnita x en función de la variable z .

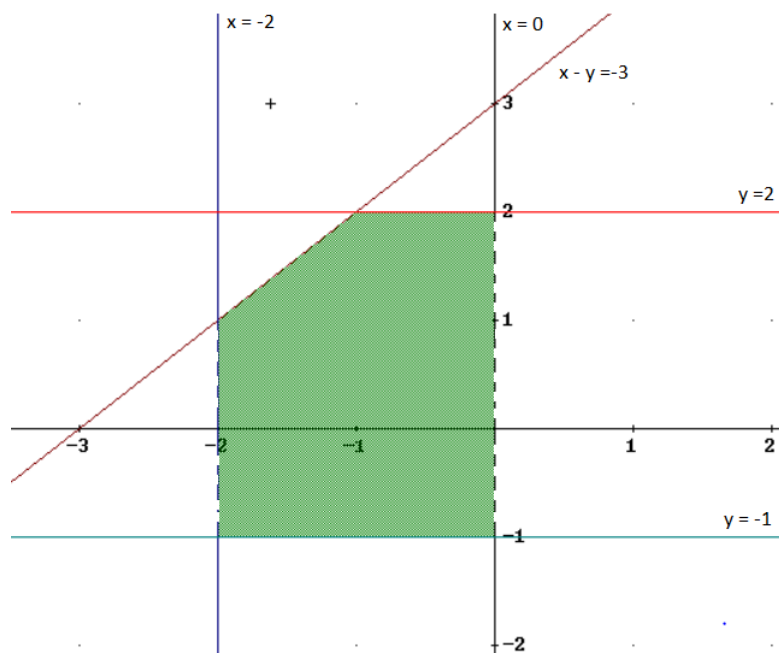
$$x - y + z = 1 \Leftrightarrow x - (2 + z) + z = 1 \Leftrightarrow x = 3$$

La solución del sistema viene dada por: $(x = 3, y = 2 + \lambda, z = \lambda) \quad \lambda \in \mathbb{R}$

3. Resuelve el siguiente sistema de inecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x - y > -3 \\ -2 < x < 0 \\ -1 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

Representamos cada una de las inecuaciones anteriores y obtenemos la siguiente región del plano:



4. Un agricultor tiene repartidas sus 10 hectáreas de terreno en cultivo de arroz, de trigo y de cebada. La superficie dedicada al trigo ocupa 2 hectáreas más que la dedicada a la cebada, mientras que la de arroz tiene 6 hectáreas menos que la superficie total dedicada al cultivo de trigo y cebada. ¿Cuántas hectáreas tiene dedicadas a cada uno de los cultivos?

Planteamos el problema mediante un sistema de 3 ecuaciones lineales con 3 incógnitas.

Definimos las incógnitas:

- x: "hectáreas cultivo de arroz"
- y: "hectáreas cultivo de trigo"
- z: "hectáreas cultivo de cebada"

$$\begin{cases} x + y + z = 10 \\ y = z + 2 \\ x = y + z - 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y + z = 10 \\ y - z = 2 \\ x - y - z = -6 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3 - f_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & -16 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3 + 2f_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -12 \end{pmatrix}$$

Escribimos el sistema equivalente escalonado.

$$\begin{cases} x + y + z = 10 \\ y - z = 2 \\ 4z = 12 \end{cases}$$

Despejamos z de la tercera ecuación: $z = 3$

Sustituimos el valor de z en la segunda ecuación y calculamos la incógnita y.

$$y - z = 2; \quad y = z + 2; \quad y = 3 + 2 = 5$$

Sustituimos los valores anteriores en la primera ecuación y obtenemos la incógnita x.

$$x + y + z = 10; \quad x = 2$$

Solución: 2 hectáreas para el cultivo de arroz, 5 hectáreas para el cultivo de trigo y 3 hectáreas para el cultivo de cebada.