

TEMA 1. FUNCIONES: LÍMITE Y CONTINUIDAD.

1. Introducción.
2. Conceptos previos.
3. Definiciones y conceptos básicos.
4. Álgebra de límites.
5. Asíntotas. Estudio y representación.
6. Continuidad.
7. Álgebra de funciones continuas.
8. Propiedades de las funciones continuas.

1. Introducción.

Con este tema se inicia el núcleo de análisis y que es, con diferencia, el más extenso del curso. Este núcleo trata de funciones reales de variable real y abarca desde la definición de función hasta el cálculo integral y sus aplicaciones pasando por el cálculo diferencial y sus aplicaciones.

El curso pasado se estudiaron mucho de los conceptos del tema que abre este núcleo y es necesario que los repases previamente. En la siguiente pregunta se detallan los contenidos que debes conocer antes de seguir adelante.

2. Conceptos previos.

- Definición de función. Dominio de definición.
- Operaciones con funciones: suma, diferencia, producto, cociente y composición.
- Función inversa.
- Características generales de una función: dominio, recorrido, simetrías, monotonía, concavidad, extremos, puntos de inflexión, asíntotas, etc.
- Características generales de las funciones elementales y su representación gráfica: valor absoluto, polinómicas, racionales, irracionales, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas, inversas de las trigonométricas, etc.

Nota: Los problemas 1 a 7 del tema están dedicados al repaso de estas cuestiones.

3. Definiciones y conceptos básicos.

Definición: (Límite de una función en un punto)

Sea $f : \text{Dom}f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función, y sea $x_0 \in \mathbb{R}$ no necesariamente en $\text{Dom}(f)$.

Diremos que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$, (siendo L un número real), si al tomar x valores suficientemente próximos a x_0 pero distintos de x_0 , $f(x)$ toma valores tan próximos como queramos a L .

Es decir: L es el valor al que se acerca $f(x)$ cuando x se acerca a x_0 .

Ejemplo: considérese la función lineal $y = 2x + 1$. ¿A qué valor se aproxima la función, cuando x se aproxima al valor 3?

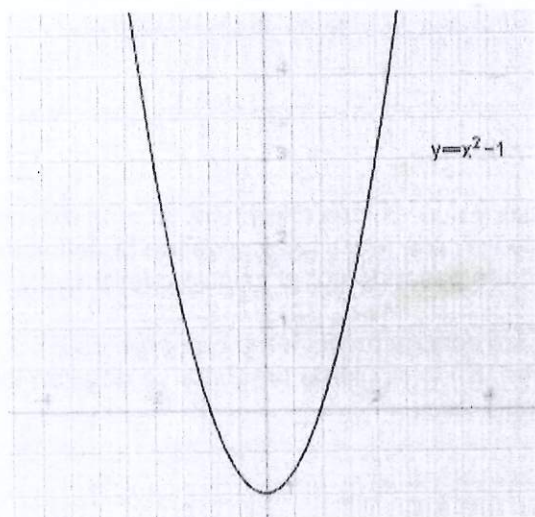
Resolución: se quiere estudiar el límite de esta función cuando x tiende a 3, hay que ver los valores que toma la función en puntos muy próximos a 3. Para ello se puede hacer la siguiente tabla de valores:

x	2,8	2,9	2,99	2,999	3,1	3,01	3,001
y	6,6	6,8	6,98	6,998	7,2	7,02	7,002

Se observa que al tomar valores de x muy próximos a 3, ya sean mayores o menores que él, sus imágenes se aproximan al valor 7. Cuanto mayor es la proximidad de x a 3, mayor es la proximidad de $f(x)$ a 7. Esto se expresa diciendo que, cuando x tiende a 3, el límite de la función $y = 2x + 1$ es 7, y se escribe

$$\lim_{x \rightarrow 3} (2x + 1) = 7.$$

Ejemplo: Consideremos la función $f(x) = x^2 + 1$. Vamos a analizar el comportamiento de la función a medida que damos a x valores cada vez más próximos a $x = 2$, pero con $x \neq 2$.



En la tabla siguiente se observa que, cuando damos a x valores próximos a 2, la función $f(x)$ se aproxima o tiende a 3. Y esto ocurre:

Tanto cuando nos aproximamos a $x = 2$ por la izquierda, (es decir con valores próximos pero menores que $x = 2$);

Se representa así: $x \rightarrow 2^- \rightarrow f(x) \rightarrow 3$

Como cuando nos aproximamos a $x = 2$ por la derecha (es decir, con valores próximos pero mayores que $x = 2$)

Se representa así: $x \rightarrow 2^+ \rightarrow f(x) \rightarrow 3$

x	1.9	1.95	1.99	1.999	1.9999	1.99999	$\rightarrow 2$
$f(x)$	2.61	2.8025	2.9601	2.9960001	2.9996	2.99996	$\rightarrow 3$

Comportamiento de la función a la izquierda de $x = 2$: $x \rightarrow 2^- \Rightarrow f(x) \rightarrow 3$

$2 \leftarrow$	2.000001	2.00001	2.0001	2.001	2.01	2.1	x
$3 \leftarrow$	3.000004	3.00004	3.0004	3.004001	3.0404	3.31	$f(x)$

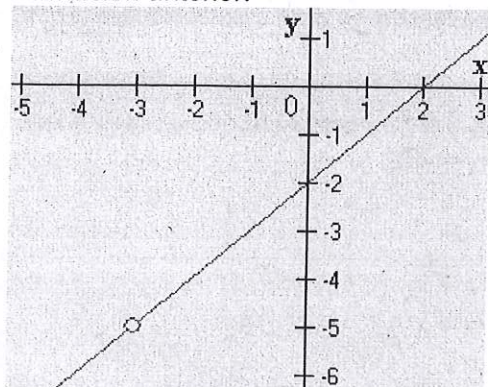
Comportamiento de la función a la derecha de $x = 2$: $x \rightarrow 2^+ \Rightarrow f(x) \rightarrow 3$

En este caso se cumple que $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 1) = f(2) = 3$

x	$f(x)$	Ejemplo: sea $f(x) = x^2 - 1$
1.9	2.61	En la tabla escribimos algunos valores para la variable independiente x , en el entorno de 2, y calculamos los valores correspondientes de la función $f(x)$:
1.99	2.9601	
1.999	2.996001	
1.9999	2.99960001	Cuando x se aproxima a 2, tanto por la izquierda como por la derecha, tomando valores menores o mayores que 2, $f(x)$ se aproxima, tiende, cada vez más a 3; y cuanto más cerca está x de 2, o lo que es lo mismo, cuando la diferencia en valor absoluto entre x y 2 es más pequeña asimismo la diferencia, en valor absoluto, entre $f(x)$ y 3 se hace cada vez más pequeña. (Estas diferencias se muestran en la tabla inferior derecha).
2.0001	3.00040001	
2.001	3.004001	
2.01	3.0401	
2.1	3.41	

Dada la función $h(x) = \frac{x}{x+1}$, calcula $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$

La mayoría de las veces ocurrirá que: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$; no obstante, por definición, el límite de una función en un punto no tiene nada que ver con el valor de la función en dicho punto, que incluso puede no existir. He aquí otro ejemplo donde podrás comprobar la afirmación anterior:



Considera la función: $f(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x + 3}$, cuya gráfica está al margen.

$\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{3\}$, es decir en $x = 3$ no existe función, sin embargo sí que existe el límite, que por el dibujo es:

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = -5$$

Calcula: $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

Puede suceder que el comportamiento de la función sea diferente a ambos lados del punto x_0 , en otras palabras, la función toma valores muy distintos a la izquierda o a la derecha del punto x_0 .

Cuando sucede esto tenemos que analizar ambas situaciones por separado y entonces hablamos de **límites laterales**.

Definición: (Límites laterales de una función en un punto)

Sea $f: \text{Dom } f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función, y sea $x_0 \in \mathbb{R}$ no necesariamente en $\text{Dom}(f)$.

• El **límite por la izquierda** de una función $y = f(x)$, cuando x tiende a x_0 , es el valor al que tiende la función para puntos muy próximos a x_0 y menores que x_0 .

Para expresar el límite por la izquierda se escribe $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$.

• El **límite por la derecha** de una función $y = f(x)$, cuando x tiende a x_0 , es el valor al que tiende la función para puntos muy próximos a x_0 y mayores que x_0 .

Para expresar el límite por la derecha se escribe $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$.

Relación entre el límite y los límites laterales de una función

Para que exista el límite de una función en un punto, han de existir los límites laterales, y éstos, han de coincidir.

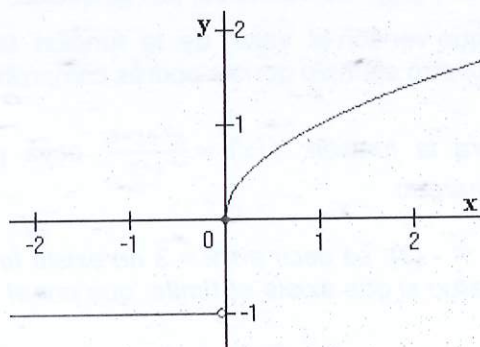
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l$$

Si se verifica esto, y l es un número finito, se dice que la función es convergente.

En el ejemplo anterior los límites por la derecha y por la izquierda coinciden:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} (2x + 1) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (2x + 1) = 7$$

Veamos estos conceptos con otro ejemplo: Sea la función: $f(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x}, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$



Calcula los siguientes límites:

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) \text{ y } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \text{ ¿Fácil?}$$

El problema está en este otro límite: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

Por tener la función un comportamiento distinto a la izquierda y a la derecha de $x = 0$ recurrimos a los límites laterales:

En la tabla siguiente se observa que, cuando damos a x valores próximos a 0, por la izquierda, (es decir con valores próximos pero menores que $x = 0$); la función $f(x)$ se aproxima o tiende a -1:

x	-0.5	-0.1	-0.01	-0.001	-0.0001	-0.000001	$\rightarrow 0$
$f(x)$	-1	-1	-1	-1	-1	-1	$\rightarrow -1$

O sea: $x \rightarrow 0^- \Rightarrow f(x) \rightarrow -1$ por lo que: $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$

Un estudio análogo dando a x valores próximos a 0, por la derecha, (es decir con valores próximos pero mayores que $x = 0$) nos indica que la función $f(x)$ se aproxima o tiende a 0:

$0 \leftarrow$	0.00000001	0.0001	0.001	0.01	0.1	0.5	x
$0 \leftarrow$	0.0001	0.01	0.0316227	0.1	0.316227	0.707106	$f(x)$

O sea: $x \rightarrow 0^+ \Rightarrow f(x) \rightarrow 0$ por lo que: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$

Puesto que los límites laterales son distintos no existe el límite en $x = 0$: $\nexists \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

Dada la función: $f(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 1, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$, estudia los siguientes límites:

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x); \lim_{x \rightarrow 1} f(x); \lim_{x \rightarrow 2} f(x); \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

Nota: Hemos de tener en cuenta que la definición de límite no depende del valor de la función en $x = a$, es decir, no tiene porqué cumplirse que $f(x) = l$, de hecho, ni siquiera tiene que estar definida la función en $x = a$.

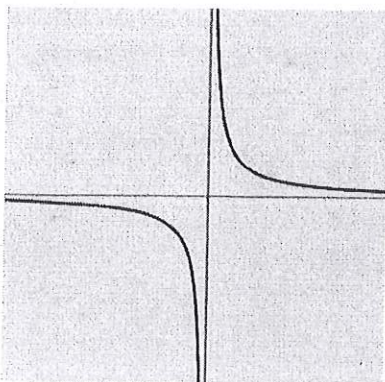
Definición: (Límites infinitos)

Diremos que la función $y = f(x)$ tiene límite $+\infty$ cuando $x \rightarrow x_0$ y se escribe así:

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, si dado un número real cualquiera K , se verifica que $f(x) > K$ cuando x toma valores suficientemente próximos a x_0 .

Diremos que la función $y = f(x)$ tiene límite $-\infty$ cuando $x \rightarrow x_0$ y se escribe así:

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$, si dado un número real cualquiera p , se verifica que $f(x) < p$ cuando x toma valores suficientemente próximos a x_0 .



Considera la función $f(x) = 1/x$. Estudiemos su comportamiento cerca de $x = 0$

Observa que: $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{0\}$, pero recuerda que el límite de f en $x = 0$ no tiene que ver con el valor de la función en $x = 0$. Vamos a hacer el estudio mediante los límites laterales:

En la tabla siguiente se observa que cuando damos a x valores próximos a 0, por la izquierda, (es decir con valores menores que $x = 0$); la función $f(x)$ se hace cada vez menor. Al acercarnos hacia 0 por la izquierda la función decrece tanto como se quiera:

x	-0.5	-0.1	-0.01	-0.001	-0.0001	-0,000001	$\rightarrow 0$
$f(x)$	-2	-10	-100	-1 000	-10 000	-100 000	$\rightarrow -\infty$

O sea: $x \rightarrow 0^- \Rightarrow f(x) \rightarrow -\infty$ por lo que: $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$

Haciendo un estudio similar dando a x valores próximos a 0, por la derecha, (es decir con valores próximos pero mayores que $x = 0$); la función $f(x)$ se hace cada vez mayor. Al acercarnos suficientemente hacia 0 por la derecha la función crece tanto como se quiera:

x	-0.5	-0.1	-0.01	-0.001	-0.0001	-0,000001	$\rightarrow 0$
$f(x)$	-2	-10	-100	-1 000	-10 000	-100 000	$\rightarrow -\infty$

O sea: $x \rightarrow 0^+ \Rightarrow f(x) \rightarrow +\infty$ por lo que: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$

4. Álgebra de límites.

En este epígrafe de la unidad vamos a analizar las **operaciones elementales con límites**, es decir, haremos una descripción de los resultados de sumas, restas, productos, divisiones y potencias (de base positiva) de funciones de los que se pueden calcular conocidos los resultados de los factores con los que operamos.

Sean f y g dos funciones definidas en un entorno del punto a . Supongamos que existen $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$, bien como número real, bien como más o menos infinito.

Salvo en los casos de indeterminación se verifican las siguientes propiedades:

$$-\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$-\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$-\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$$

$$-\lim_{x \rightarrow a} (f(x)^{g(x)}) = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right)^{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$$

El álgebra de límites también es válida para la composición de funciones continuas. Es decir: Supongamos que $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_1$ y que $\lim_{x \rightarrow L_1} f(x) = L_2$.

Se verifica que $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = L_2$

Nota: Los valores L_1 y L_2 pueden ser finitos o infinitos. La expresión es válida salvo en los casos de indeterminación.

Operaciones con expresiones infinitas

$(+\infty) + l = +\infty$ $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$ $(-\infty) + l = -\infty$ $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$ $-(-\infty) = +\infty$	$(+\infty) \cdot (\pm l) = \pm\infty$ $(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$ $(-\infty) \cdot (\pm l) = \mp\infty$ $(-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$
$\frac{l}{\pm\infty} = 0$ $\frac{l}{0} = \pm\infty \quad \text{si } l \neq 0$ $\frac{\pm\infty}{0} = \pm\infty$ $\frac{0}{\pm\infty} = 0$	$(+\infty)^{(+l)} = +\infty$ $(+\infty)^{(-\infty)} = 0$ $(+\infty)^{(+l)} = +\infty$ $(+\infty)^{(-l)} = 0$ $l > 1 \quad \begin{cases} l^{(+\infty)} = +\infty \\ l^{(-\infty)} = 0 \end{cases}$ $0 < l < 1 \quad \begin{cases} l^{(+\infty)} = 0 \\ l^{(-\infty)} = +\infty \end{cases}$

Indeterminaciones

$$\infty - \infty \quad \infty \cdot 0 \quad \frac{0}{0} \quad \infty^0 \quad 1^\infty \quad 0^0 \quad \frac{\infty}{\infty}$$

Algunos límites infinitos

Potencias: si $k > 0$ $\lim_{x \rightarrow \infty} p \cdot x^k = \pm\infty$

Exponenciales: si $a > 0$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} p \cdot a^x = \pm\infty$$

Logarítmicas: si $a > 1$ $\lim_{x \rightarrow \infty} p \cdot \log_a x = \pm\infty$

Comparación de infinitos

Si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \pm\infty$ y $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \pm\infty$ se dice que $f(x)$ es un **infinito de orden superior**

a $g(x)$ si $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\infty$ o, lo que es lo mismo $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$

- Dadas dos potencias de x , la de mayor exponente es un infinito de orden superior.

Por ejemplo $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^4}}{5x} = \infty$

- Dadas dos funciones exponenciales de base mayor que 1, la de mayor base es un infinito de orden superior
- Toda función exponencial de base mayor que 1 es un infinito de orden superior que cualquier potencia.
- Funciones exponenciales y potencias de x son infinitos de orden superior que cualquier función logarítmica.

Sería conveniente que repasaras el cálculo de límites que se estudió el curso pasado

1º: El cálculo de límites de las funciones elementales: polinomios, fracciones algebraicas, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas, etc.

2º: Las principales técnicas para resolver indeterminaciones. Nosotros abordaremos los métodos de resolución de las 4 primeras indeterminaciones.

En la hoja de problemas encontrarás actividades para afianzar este repaso.

Aunque forma parte de la unidad siguiente, un eficaz y muy utilizado resultado en el cálculo de límites es la llamada **Regla de L'Hôpital**. Como ya se vio en el curso pasado el cálculo de derivadas, podemos utilizar dicha regla en lo que sigue.

Regla de L'Hôpital

Sean $f(x)$ y $g(x)$ funciones derivables en un entorno reducido de $x=a$ tales que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ presenta la indeterminación $0/0$ o ∞/∞ .

Si existe $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ entonces existe también $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ y coincide con el anterior.

El resultado también es válido para límites en el infinito.

En la práctica, esto supone que en la mayoría de las situaciones en las que se nos presenten indeterminaciones de tipo cociente, podemos derivar numerador y denominador y ver si el límite resultante existe, ya que, en tal caso, coincidirá con el anterior.

5. Asíntotas. Estudio y representación.

Si un punto (x,y) se desplaza continuamente por una función $y=f(x)$ de tal forma que, por lo menos, una de sus coordenadas tienda al infinito, mientras que la distancia entre ese punto y una recta determinada tiende a cero, esta recta recibe el nombre de **asíntota** de la función. Las asíntotas se clasifican en: **verticales, horizontales y oblicuas**.

Asíntota vertical

Diremos que la recta $x = x_0$ es una **asíntota vertical** de una función f si se cumple que

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty \quad \text{ó} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty$$

(El signo nos dará la posición de la función)

Asíntota Horizontal

Diremos que la recta $y = y_0$ es una **asíntota horizontal** de una función f si se cumple que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = y_0 \quad \text{ó} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = y_0$$

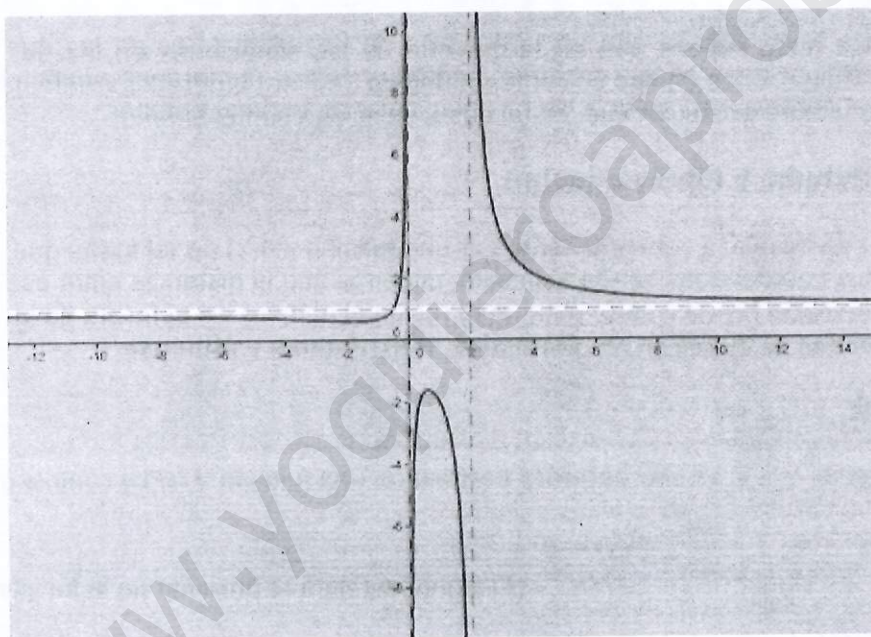
Para determinar la posición de la función respecto a la asíntota (si está por encima o por debajo de ella) habrá que estudiar si la función se acerca a y_0 mediante aproximaciones superiores o inferiores a y_0 . Para ello, podemos usar una tabla de valores adecuada o nuestra intuición matemática.

Ejemplo: $y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 2x}$ tiene dos asíntotas verticales en $x = 2$; $x = 0$ y una horizontal en $y = 1$

Para determinar la posición de la función respecto a la asíntota horizontal:

x	50	200	1000	La función se acerca a la asíntota por encima (valores superiores a 1)
f(x)	1'042	1'010	1'002	
Recta y=1	1	1	1	

x	-50	-200	-1000	La función se acerca a la asíntota por debajo (valores inferiores a 1)
f(x)	0'9619	0'990	0'998	
Recta y=1	1	1	1	



Asíntota Oblicua

Si existen los límites: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - mx = n$$

diremos que la recta $y = mx + n$ es una asíntota oblicua.

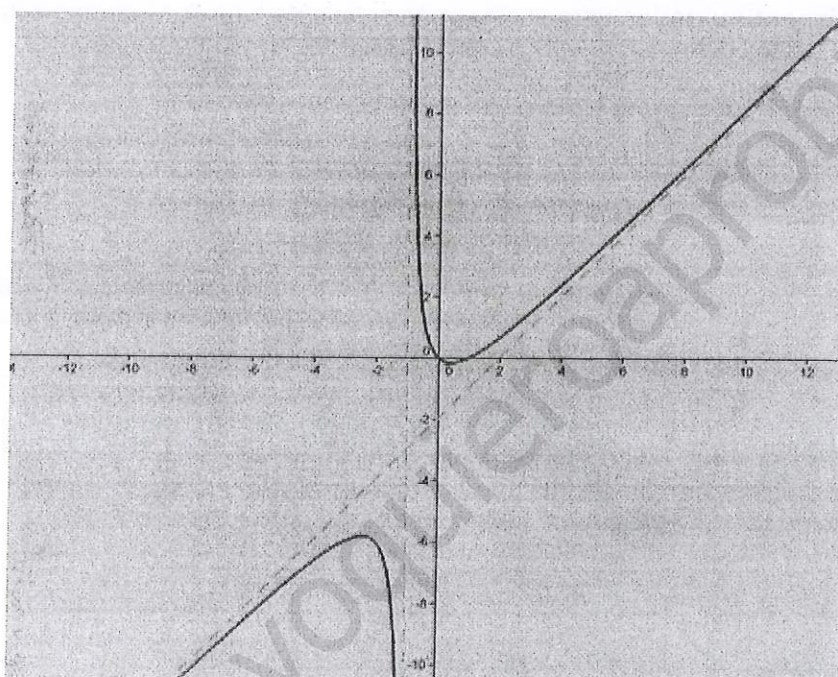
Para determinar la posición de la función respecto a la asíntota (si está por encima o por debajo de ella) habrá usar una tabla de valores adecuada o nuestra intuición matemática.

Ejemplo: $y = \frac{x^2 - x}{x + 1}$ tiene una asíntota vertical en $x = -1$ y una oblicua en $y = x - 2$

Para determinar la posición de la función respecto a la asíntota oblicua:

x	50	100	500	La función se acerca a la asíntota por encima (valores superiores a la recta)
f(x)	48'039	98'019	498'003	
Recta $y = x - 2$	48	98	498	

x	-50	-100	-500	La función se acerca a la asíntota por debajo (valores inferiores a la recta)
f(x)	-52'04	-102'02	-502'004	
Recta $y = x - 2$	-52	-102	-502	



NOTA 1: Un modo sencillo el cálculo de asíntotas en funciones racionales es:

- Una función tiene tantas **asíntotas verticales** como raíces reales distintas tenga el denominador y que no pertenezcan al numerador.
- Una función tiene una **asíntota horizontal** si el grado del numerador es menor o igual que el del denominador.
- Una función tiene una **asíntota oblicua** si el grado del numerador es uno más que el del denominador. Para calcularla hacemos la división de la fracción y el cociente es la fórmula de la asíntota buscada. Ejemplo:

$$\frac{x^2 - 3 \cdot x + 3}{x - 1} \Rightarrow \frac{x^2 - 3 \cdot x + 3}{1} \begin{array}{l} \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \end{array} \begin{array}{l} x-1 \\ x-2 \\ x-2 \end{array} \Rightarrow \text{asíntota } y = x - 2$$

NOTA 2: Antes de continuar hagamos algunas aclaraciones sobre el número de asíntotas que puede tener una función:

- Una función puede tener infinitas asíntotas verticales y el acercamiento a ellas puede ser por la izquierda, por la derecha o por ambas direcciones. Además, los puntos en los que se encuentran las asíntotas suelen ser valores en los que no está definida la función.

- Una función puede tener, como máximo dos asíntotas entre horizontales y oblicuas.
- No puede haber simultáneamente asíntotas horizontales y oblicuas en $+\infty$ ni en $-\infty$. Lo que sí puede darse es que haya una horizontal en un lado y una oblicua en otro. En resumen, sí puede haber simultáneamente horizontal y oblicua, pero no en el mismo lado.

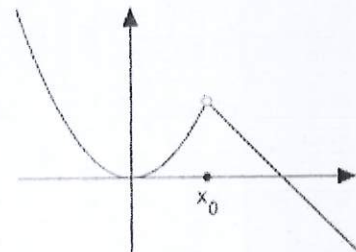
6. Continuidad.

Intuitivamente una función continua es aquella cuya gráfica puede dibujarse sin levantar el lápiz del papel. Esta idea se matematiza a través del concepto de límite.

Las funciones continuas son de suma importancia en matemática y en distintas aplicaciones. Sin embargo, no todas las funciones son continuas. Puede ocurrir que una función no sea continua en todo su dominio de definición. Si una función no es continua en un punto, se dice que la función tiene una **discontinuidad** en ese punto y que la función es **discontinua**.

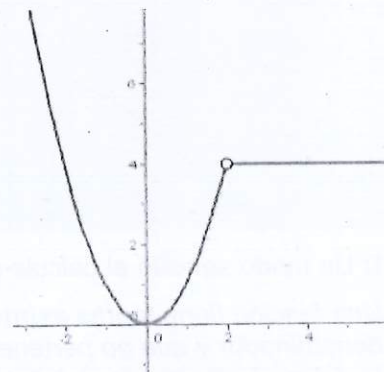
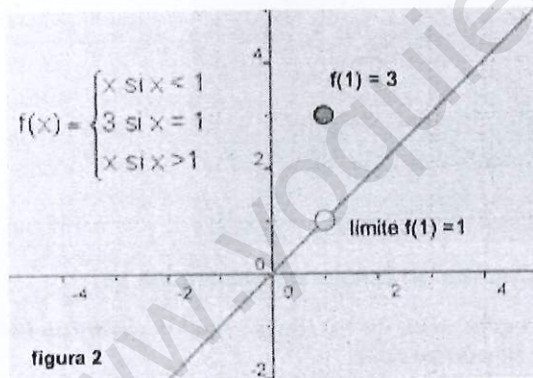
Clasificación de discontinuidades para el caso más simple de funciones de una sola variable real.

Discontinuidad evitable



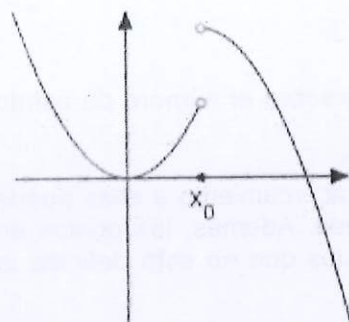
$$f_1(x) = \begin{cases} x^2 & \text{para } x < 1 \\ 0 & \text{para } x = 1 \\ 2 - x & \text{para } x > 1 \end{cases}$$

El punto $x_0 = 1$ es una discontinuidad evitable. Esta función puede *hacerse continua* simplemente redefiniendo la función en este punto para que valga $f_1(x_0) = 1$.



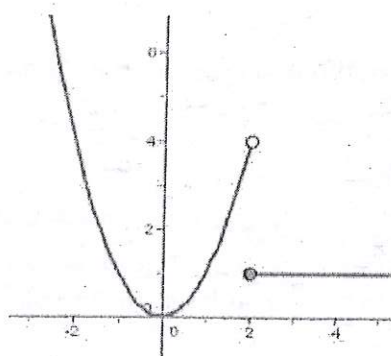
Discontinuidad de primera especie

En este tipo de discontinuidad existen dos tipos: **salto finito** y **salto infinito**

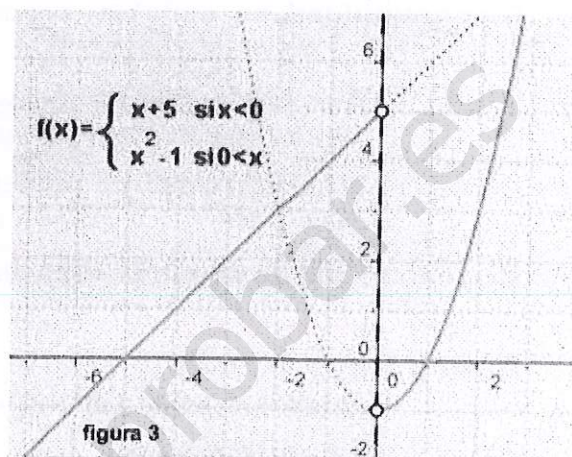
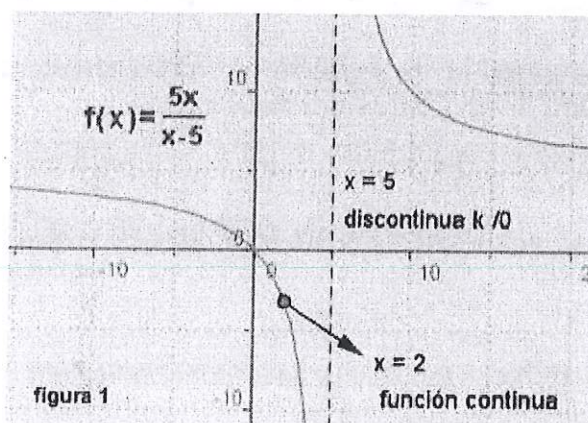


$$f_2(x) = \begin{cases} x^2 & \text{para } x < 1 \\ 0 & \text{para } x = 1 \\ 2 - (x - 1)^2 & \text{para } x > 1 \end{cases}$$

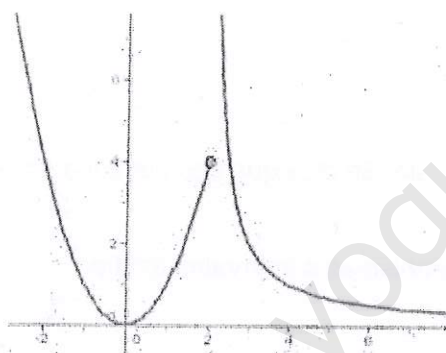
El punto $x_0 = 1$ es una discontinuidad por **salto finito**



$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$



El punto $x_0 = 5$ es una discontinuidad por **salto infinito**.



$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 2 \\ \frac{2}{x-2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Discontinuidad de segunda especie

Al menos uno de los límites laterales no existe.

Para determinar de forma rigurosa el tipo de discontinuidad habrá que utilizar el concepto de límite.

Continuidad de una función en un punto

Sea f una función real de variable real y a un número real. Se dice que f es **continua en el punto a** si se cumple:

- 1º Existe $f(a)$
- 2º Existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ (los límites laterales son finitos y coinciden)
- 3º $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Nota: Se dice que una función es **discontinua** en el punto a si no es continua en el punto a .

Existen los siguientes tipos de discontinuidades:

Discontinuidad evitable, si existen los límites laterales en $x = a$, y éstos coinciden, pero no coinciden con el valor de la función en el punto $x = a$, o bien, dicho valor no existe.

Discontinuidad no evitable, si existen los límites laterales en $x = a$, pero éstos no coinciden. Pueden ser de dos tipos:

- a) **Discontinuidad de primera especie de salto finito**, si los límites laterales en $x = a$ existen y son finitos, pero no coinciden.
- b) **Discontinuidad de primera especie de salto infinito**, si los límites laterales en $x = a$ existen, pero al menos, uno de ellos, es infinito.

Discontinuidad de segunda especie, si alguno de los límites laterales no existe.

Notas:

- Si existe $f(a)$, existe $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ se dice que la función es **continua en a por la derecha**.
- Si existe $f(a)$, existe $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$ se dice que la función es **continua en a por la izquierda**.

Continuidad de una función en un intervalo

Sea f una función real de variable real y (a,b) un intervalo. Se dice que f es continua en (a,b) si es continua en cada uno de los puntos de (a,b) .

Nota 1: La definición de continuidad se extiende sin problemas a intervalos del tipo $(-\infty, a)$, $(a, +\infty)$ o en todo $\mathbb{R}$.

Nota 2: Cuando se diga que una función es continua en un intervalo cerrado $[a,b]$, se entenderá que es continua en (a,b) , continua por la derecha en el punto a y continua por la izquierda en el punto b .

7. Álgebra de funciones continuas

Sean f y g dos funciones reales de variable real, continuas en el punto a .

Se verifica que las funciones $f+g$, $f-g$ y $f \cdot g$ son continuas en el punto a .

Si además $g(a) \neq 0$, la función f/g es continua en el punto a .

Si además $f(a) > 0$ o $g(a) \neq 0$, la función f^g es continua en el punto a .

Sea g una función continua en el punto a y f una función continua en el punto $g(a)$.

Entonces $f \circ g$ es una función continua en $g(a)$.

A continuación se da una tabla de los dominios de continuidad de algunas funciones. Las funciones que no estén explícitamente en la lista pueden estudiarse usando la lista y el álgebra de funciones continuas.

- $f(x) = \text{cte.}$	Continua en todo $\mathbb{R}$
- $f(x) = \text{polinomio.}$	Continua en todo $\mathbb{R}$
- $f(x) = \text{fracción algebraica}$	Continua en $\mathbb{R} - \{\text{ceros del denominador}\}$
- $f(x) = \sqrt{x}$	Continua en $[0, +\infty)$
- $f(x) = a^x \quad (a > 0)$	Continua en $\mathbb{R}$
- $f(x) = \text{Log}_a x \quad (a > 0)$	Continua en $(0, +\infty)$
- $f(x) = \text{Sen } x$	Continua en $\mathbb{R}$
- $f(x) = \text{Cos } x$	Continua en $\mathbb{R}$
- $f(x) = \text{Tg } x$	Continua en $\mathbb{R} - \{\pi/2 + k\pi\}, \forall k \in \mathbb{Z}$

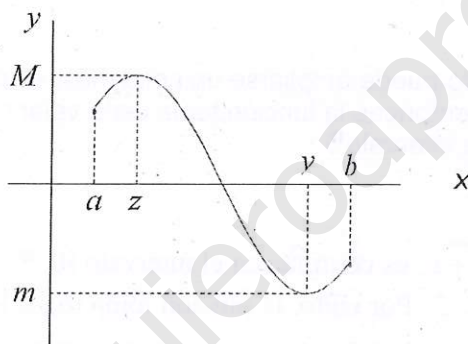
8. Propiedades de las funciones continuas

Los siguientes teoremas, que se enuncian sin demostración, nos dan una idea del comportamiento de las funciones continuas en un intervalo cerrado.

Teorema de Weierstrass

Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$. Entonces, f alcanza en $[a, b]$ un máximo absoluto y un mínimo absoluto.

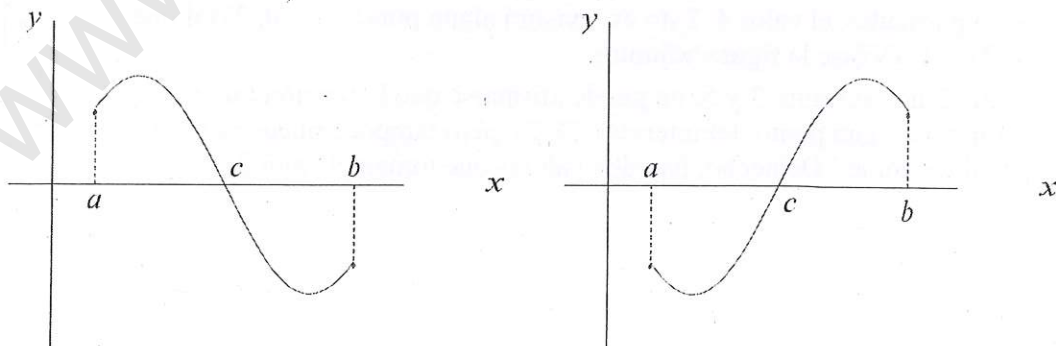
Es decir:



$$\exists y, z \in [a, b] \text{ tales que } f(y) \leq f(x) \leq f(z), \forall x \in [a, b]$$

Teorema de Bolzano!

Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ tal que $f(a) > 0$ y $f(b) < 0$ (o $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$). Entonces, existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = 0$.

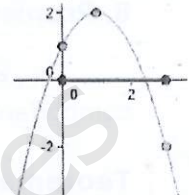


Obsérvese que este teorema viene a decir que si f es una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces, f tiene una raíz c en dicho intervalo. Gráficamente, eso significa que la gráfica de f corta al eje de abscisas en un punto c del intervalo $[a, b]$.

Ejemplos:

a) La función $f(x) = x^3 - 3x - 1$ es continua en todo $\mathbf{R}$, y en particular en el intervalo $[1, 2]$. Como $f(1) = 1 - 3 - 1 = -3 < 0$ y $f(2) = 8 - 6 - 1 = 1 > 0$, puede asegurarse que esa función toma el valor 0 para algún número comprendido entre 1 y 2. Esto es, existe un número c , mayor que 1 y menor que 2, tal que $f(c) = 0$. Ese número c será una solución de la ecuación $x^3 - 3x - 1 = 0$, pues cumple que $c^3 - 3c - 1 = 0$. (Otra cosa es encontrar el valor exacto de esa solución, ya que salvo en casos concretos no podrá obtenerse; aunque, como se verá en las aplicaciones de estos teoremas siempre se puede hallar una buena aproximación).

a) La función $f(x) = -x^2 + 2x + 1$ es continua en el intervalo $[0, 3]$ (y en todo $\mathbf{R}$). Por tanto, existe un punto de ese intervalo en el cual $f(x) = -x^2 + 2x + 1$ alcanza su valor máximo; y otro punto en el que toma el valor mínimo. En este caso, al tratarse de una parábola es fácil encontrar esos puntos. El máximo lo toma en $x = 1$, y vale 2; el mínimo, en $x = 3$ y vale -2.



Teorema de los valores intermedios (Darboux)

Sea f una función continua en $[a, b]$. Entonces f toma todos los valores comprendidos entre $f(a)$ y $f(b)$.

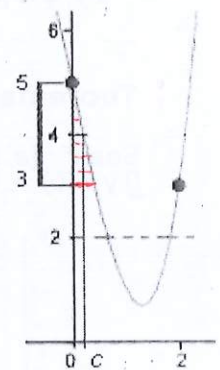
Observación. Este resultado puede ampliarse un poco más, afirmando que "Si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$, entonces la función toma cada valor comprendido entre el mínimo y el máximo de $f(x)$ en ese intervalo".

Ejemplos:

a) La función $f(x) = \sqrt{x+1}$, es continua en el intervalo $[0, 3]$. En sus extremos toma los valores $f(0) = 1$ y $f(3) = 2$. Por tanto, la función toma todos los valores entre 1 y 2; por ejemplo, el valor 1,83. (Ese valor lo toma en la solución de la ecuación $1,83 = \sqrt{x+1}$, que es $x = 1,83^2 - 1 = 2,3489 \in [0, 3]$).

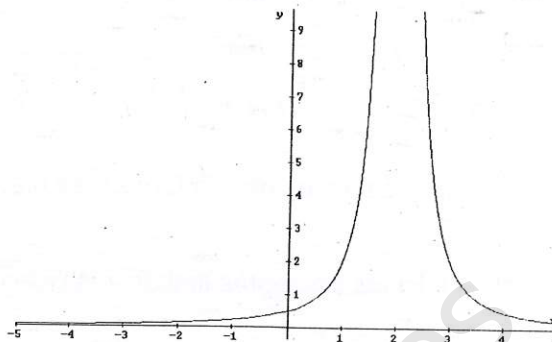
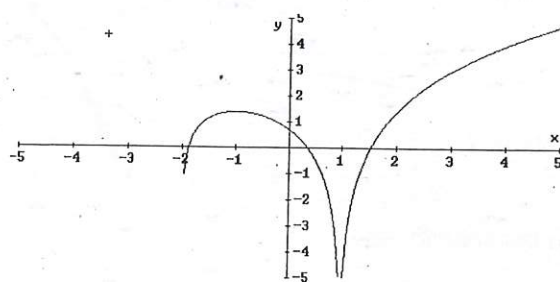
b) Dada la función $f(x) = x^3 - 5x + 5$. ¿Puede afirmarse que esa función toma el valor 4 en algún punto del intervalo $[0, 2]$? ¿Y el valor 2? Como la función es continua y en los extremos del intervalo toma los valores $f(0) = 5$ y $f(2) = 3$, se deduce que toma todos los valores entre 3 y 5; en particular, el valor 4. Esto es, existirá algún punto $c \in (0, 2)$ tal que $f(c) = 4$. (Véase la figura adjunta).

Como 2 no está entre 3 y 5, no puede afirmarse que la función tome ese valor para algún punto del intervalo $(0, 2)$; pero tampoco puede afirmarse que no lo tome. (De hecho, hay dos valores que toman el valor 2).



PROBLEMAS TEMA 1

1.- Indica todo lo que puedas de las funciones representadas a continuación.



2.- Representa gráficamente las funciones:

a) $f(x) = |x+1|$

b) $f(x) = |x^2 - 5x + 6|$

c) $f(x) = |x+1| + |x+3|$

3.- Calcula el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^3 + x^2 + 3$

b) $f(x) = \frac{3x-1}{x^2-4}$

c) $f(x) = \frac{3x-1}{x^2+x+1}$

d) $f(x) = \sqrt{x}$

e) $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+2}}$

g) $f(x) = \ln x$

h) $f(x) = \ln(x^2 - 4)$

i) $f(x) = 2^x$

j) $f(x) = 3^{\ln x}$

k) $f(x) = \text{Sen } x$

l) $f(x) = \text{Tg } x$

m) $f(x) = \ln(\text{Sen } x)$

n) $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)$

4.- Sean $f(x) = \cos x$, $g(x) = x^2$ y $h(x) = 2^x$.

Efectúa las composiciones: $f \circ g$, $f \circ h$, $g \circ h$, $g \circ f$, $h \circ f$, $h \circ g$, $f \circ g \circ h$.

5.- Calcula la inversas de las siguientes funciones: a) $f(x) = 2x-1$

b) $f(x) = \frac{x-1}{x-2}$

c) $f(x) = \text{Arc Sen}(x+1)$

d) $f(x) = \ln(x^2+1)$

e) $f(x) = 2 + \cos x$

f) $f(x) = \sqrt{2x-3} + 1$

6.- El radio de un círculo mide 10 cm. Expresa el área del rectángulo inscrito en el mismo en función de la medida x , de la base. ¿Cuál es el dominio de la función obtenida?

7.- Representa gráficamente:

a) $y = \frac{1-x}{1+2x}$

b) $y = 2 - \log_{\frac{1}{3}}(x+3)$

c) $y = 5 \cos x$

d) $y = |3 + \log(1-x)|$

e) $y = 2^{1-x} - 3$

f) $y = \text{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

g) $f(x) = \begin{cases} \frac{x-3}{x+5} & \text{si } x < -2 \\ x^2 - 2x + 2 & \text{si } -2 \leq x \leq 2 \\ 4x & \text{si } 2 < x < 10 \end{cases}$

h) $y = \begin{cases} -2 & \text{si } x \leq -1 \\ -2x^2 + x + 1 & \text{si } -1 < x < 1 \\ \frac{1-2x}{3} & \text{si } 2 < x \leq 5 \end{cases}$

8.- Calcula $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ en los siguientes casos:

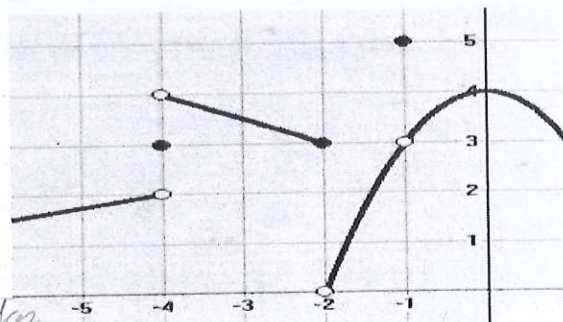
a) $f(x) = \frac{x}{x^2+5}$

b) $f(x) = \frac{e^x+1}{e^x-1}$

c) $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$

9.- Encuentra los límites de la gráfica:

- a) $\lim_{x \rightarrow -4^+} f(x)$ 4 b) $\lim_{x \rightarrow -4^-} f(x)$ 2 c) $\lim_{x \rightarrow -4} f(x)$ A
 d) $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$ 3 e) $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$ 0 f) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ A
 g) $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ 3 h) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ 4 i) $f(-4)$ 3 j) $f(-1)$ 5



k) ¿En qué valores de x la función es discontinua?

En -4, -2, -1 saltos finitos
 ↳ Evitable

10.- Halla los siguientes límites, justificando las soluciones:

- a) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x}{(x+2)^3}$ b) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x}{(x+2)^3}$ c) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x}{(x+2)^3}$ d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x^4}$ e) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{5x^2}{(x-3)^2}$
 f) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-7x}{x-1}$ g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^5 - \sqrt{x} + 1)$ h) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 0.5^x$ i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log x$ j) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-4^x)$
 k) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3 + 1}$ l) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x$ m) $\lim_{x \rightarrow 2^-} e^{\frac{1}{x-2}}$ n) $\lim_{x \rightarrow 2^+} e^{\frac{1}{x-2}}$ ñ) $\lim_{x \rightarrow 2} e^{\frac{1}{x-2}}$

11.- Halla los siguientes límites, justificando las soluciones:

- a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2}{x^2 + 2x - 3}$ b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 - 3x + 1}{3x^2 + 2}$ c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$ d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-1}{\sqrt{4x^2-x}}$
 e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x-2} - \sqrt{x+1})$ f) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{\sqrt{x} - 2}$ g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 - 5} - (2x - 3))$ h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 2x^2}{x^2 + x}$

12.- Halla los siguientes límites, justificando las soluciones:

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4x-2}{3x}\right)^{2x-1}$ b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\log x)^{1-3x}$ c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x-1}{3x+2}\right)^{\frac{x-1}{2}}$ d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x+6}-3}$

13.- Calcula m de forma que:

- a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(1-mx)(2x+3)}{x^2-4} = 6$ b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + mx - 6}{3x - 9}$ sea finito
 c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2mx^2 - 7x + 5}{7x^2 - 3} = -1$ d) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{mx^2 - m}{x^2 + 3x + 2} = 4$ e) $\lim_{x \rightarrow \infty} 2x - \sqrt{4x^2 + ax + 1} = 1$

14.- Determina y representa razonadamente las asíntotas de las siguientes funciones:

- a) $f(x) = \frac{x^2 + 4}{x^2 - 4}$ b) $g(x) = \frac{2x^3 + x}{x^2 - 3x}$

15.- Determina y representa razonadamente las asíntotas de las siguientes funciones:

- a) $f(x) = \frac{2x^3 + 5x}{x^3 + 1}$ b) $g(x) = x^2 - \sqrt{x^4 - x^3}$

16.- Estudia las asíntotas verticales de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \ln(x^2 - 4)$ b) $g(x) = e^{\frac{1}{x}}$

17.- Determina y representa razonadamente las asíntotas de: $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$

18.- Calcula a y b para que la función $y = \frac{ax-3}{x+b}$ tenga como asíntotas $y=2$ y $x=-2$.

19.- Calcula todas las asíntotas de las siguientes funciones. Representa las asíntotas e intenta esbozar la gráfica de las funciones.

a) $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ b) $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$ c) $f(x) = \frac{x^2-x+2}{x}$ d) $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$

e) $f(x) = \sqrt{x^2-9}$ f) $f(x) = \ln(x^2-4)$ g) $f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$ h) $f(x) = e^{-x^2}$

20.- Dibuja una función que tenga una asíntota vertical en $x = 1$ y una asíntota oblicua en $y = x+2$

21.- Dada la función $f(x) = x^2 - 3x$, hallar $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

22.- Dada $f(x) = \sqrt{5x+1}$ hallar $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ cuando $x > -\frac{1}{5}$.

23.- Resuelve los siguientes límites:

Si $f(x) = x^2$, demuestre que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 2x$

Si $f(x) = \frac{1}{x}$, demuestre que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = -\frac{1}{x^2}$

24.- Estudiar la continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } x < 1 \\ 1/2 & \text{si } x = 1 \\ -(x-1)^2 + 1 & \text{si } 1 < x \end{cases}$ b) $g(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + x - 2}{x^2 - x - 2}$

25.- Estudia la continuidad de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

a) $f(x) = \begin{cases} \text{Sen } x & \text{si } 0 \leq x \\ x^2 & \text{si } -1 < x < 0 \\ -2x-1 & \text{si } x \leq -1 \end{cases}$

en $x=0$ y $x=-1$

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{|x+2|}{x+2} & \text{si } x \neq -2 \\ -2 & \text{si } x = -2 \end{cases}$ en $x=-2$

c) $f(x) = \begin{cases} x^2 + \frac{x}{|x|} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ en $x=0$

d) $f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{1+e^{\frac{1}{x-2}}} & \text{si } x \neq 2 \\ 0 & \text{si } x = 2 \end{cases}$ en $x=2$

26.- Estudia la continuidad de las siguientes funciones

$$a) f(x) = \frac{x-1}{x^2+2}$$

$$b) f(x) = \frac{1+x}{1-|x|}$$

$$c) f(x) = \frac{|x|}{x}$$

$$d) f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{x-7}$$

$$e) f(x) = \ln(x^2-1)$$

$$f) f(x) = \begin{cases} \frac{1-e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$g) f(x) = \log(\cos x)$$

$$h) f(x) = \sqrt{\pi^2 - x^2}$$

$$i) f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$$

$$j) f(x) = \frac{\log(x^2 - 3x + 2)}{\log(x^2 - 7x + 12)}$$

$$k) f(x) = |1 - |x||$$

27.- Encuentra el valor de los parámetros, para los que las siguientes funciones son continuas

$$a) f(x) = \begin{cases} x+a^2 & \text{si } x < 2 \\ x^2-a & \text{si } x \geq 2 \end{cases} \quad b) f(x) = \begin{cases} \frac{x^2(x-3)^a}{x^2-6x+9} & \text{si } x \neq 3 \\ 9 & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

$$c) f(x) = \begin{cases} x^2-6x+9 & \text{si } 2 \leq x \leq 5 \\ -x^2+ax+b & \text{si } x < 2 \text{ o } x > 5 \end{cases}$$

$$28.- \text{ Si } f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x} & \text{si } x < a \\ 3x-5 & \text{si } x > a \end{cases} \text{ .Halla } a \text{ y define } f(a) \text{ para que } f \text{ sea continua en } \mathbb{R}.$$

$$29.- \text{ Sea } f(x) = \begin{cases} \frac{2}{2-x^2} & \text{si } a < x < b \\ 3-x^2 & \text{si } x < a \text{ o } x > b \end{cases} \quad \text{donde } a \text{ y } b \text{ son dos parámetros con } a < b$$

b. Determina a y b y define f(a) y f(b) para que f sea continua en todo $\mathbb{R}$.

30.- Dibuja razonadamente una función que cumpla las siguientes condiciones:

a) Tiene asíntota vertical en $x = 2$ y asíntota horizontal en $y = -1$

b) Su Dominio es $\mathbb{R} - \{0, 2\}$

c) Corta al eje OX sólo en el punto (1,0)

31.- Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4x}{x+3} & \text{si } x \leq -1 \\ \frac{x^2+x-2}{x^2-1} & \text{si } -1 < x < 1 \\ mx-2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Estudia su continuidad y halla m para que sea continua en x

32.- La temperatura (en °C) de un objeto viene dada por la función

$$f(t) = \frac{30t^2 + 20t + 40}{2t^2 + 4t + 5} \text{ donde } t \text{ es el tiempo en horas. Calcula la temperatura inicial, la}$$

temperatura cinco horas más tarde y la temperatura que puede alcanzar el objeto si se deja transcurrir mucho tiempo.

33.- Estudia la continuidad/discontinuidad según los valores de a y de b

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax & \text{si } x \leq -1 \\ -3 & \text{si } -1 < x \leq 2 \\ bx + 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

34.- Dependiendo de los valores de p , ¿tiene la función $f(x) = \frac{2x-2}{x^2-px+1}$ alguna discontinuidad? Si la tuviese, ¿podría evitarse en algún caso?

35.- La función $f(x) = \frac{x^2+kx+4}{x^2-4}$ es discontinua en los puntos 2 y -2. ¿Podría evitarse alguna discontinuidad para algún valor de k ?

36.- Encuentra razonadamente la expresión analítica de una función racional que cumpla:

- a) Tiene una discontinuidad evitable en $x = 3$
- b) Tiene asíntotas verticales en $x = 1$ y $x = -1$
- c) Tiene asíntota horizontal en $y = 2$
- d) Haz una representación gráfica aproximada de dicha función.

37.- ¿Puede existir una función f tal que: f continua en $[0,5]$ $f(2) = 10, f(4) = -3$
 $f(t) \neq 1$ para todo $t \in [1,5]$

38.- Demuestra que las siguientes ecuaciones tienen al menos una solución. (usa el teorema de Bolzano)

- a) $20x^3 - 3x^2 + 1 = 0$ b) $\cos x = x^3$ c) $\ln x = 1/x$ d) $x \sin x = \frac{1}{2}$

39. Comprueba que la ecuación $e^{-x} + 2x - 1 = 0$ tiene una raíz en el intervalo $[-2, -1]$.
 Calcula un valor de esa raíz con una aproximación del orden de las centésimas.

40. Comprueba que el polinomio $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 0,2$ tiene dos raíces negativas y otra positiva. Da una solución aproximada de la raíz positiva.

ALGUNAS ACTIVIDADES DE SELECTIVIDAD

Actividad 42: (2008) Dada la función definida para $x \neq 0$ por $f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$, determina las asíntotas de su gráfica.

Actividad 43: (2009) Calcula $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{2}{x^2 - 1} \right)$, siendo $\ln$ la función logaritmo neperiano.

Actividad 44: (2009) Se considera la función $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{x^2 - x} + x$. Determina la asíntota de la gráfica de f .

Actividad 45: (2009) Sea $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} -\frac{x(\ln x)^2}{(x-1)^2} & \text{si } x \neq 1 \\ a & \text{si } x = 1 \end{cases}$.

- a) Sabiendo que f es continua, calcula a ($\ln$ denota logaritmo neperiano).
 b) Estudia la existencia de asíntota horizontal para la gráfica de esta función. En caso de que exista, determina su ecuación.

Actividad 46: (2010) Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x^2}$

Actividad 47: (2015)

Sabiendo que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax^2 + bx + 1 - \cos(x)}{\sin(x^2)}$ es finito e igual a 1, calcula los valores de a y b .

Actividad 48: (2015)

Halla a y b sabiendo que es continua la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x + \cos(x) - ae^x}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ b & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Actividad 49: (2016)

Sea la función $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, donde $\ln$ denota logaritmo neperiano.

- a) Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f .

Actividad 50: (2017)

Considera la función definida por $f(x) = -x + \frac{4}{x^2}$ para $x \neq 0$.

- a) Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de f .

Actividad 51: (2020)

Calcula a sabiendo que $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\ln(1-x)} - \frac{ax-1}{x} \right) = \frac{7}{2}$

Actividad 52: (2021)

Se sabe que la gráfica de la función f definida por $f(x) = \frac{ax^2 + bx + 2}{x-1}$ (para $x \neq 1$) tiene una asíntota oblicua que pasa por el punto $(1,1)$ y tiene pendiente 2. Calcula a y b .

Actividad 53: (2021)

Sea la función continua $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(e^x + x^3)}{x} & \text{si } x < 0 \\ 4x^2 + a & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ b + \sin(\pi x) & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$

($\ln$ denota la función logaritmo neperiano). Determina a y b .