Actividades

1. Calcula las razones trigonométricas de un ángulo α del segundo cuadrante, si sen $\alpha=\frac{4}{5}$.

De $\text{sen}^2\,\alpha+\cos^2\alpha=1$ se obtiene

$\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\text{sen}^2\,\alpha}=\pm\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\pm\sqrt{1-\frac{16}{25}}=\pm\sqrt{\frac{9}{25}}=$

$=\pm\frac{3}{5}$. Como α está en el tercer cuadrante, su coseno es negativo. Luego la solución válida es $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$.

Por tanto, $\text{tg}\,\alpha=\frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}=\frac{4/5}{-3/5}=-\frac{4}{3}$.

2. Si cos 24º = 0,91, determina, sin utilizar la calculadora, las razones trigonométricas de los siguientes ángulos: a) 114º , b) 156º, c) 204º, d) 336º.

$\text{sen}\,24^\circ=\sqrt{1-\cos^2 24^\circ}=\sqrt{1-(0{,}91)^2}\approx 0{,}41$.

Además, $\text{tg}\,24^\circ=\frac{\text{sen}\,24^\circ}{\cos 24^\circ}=\frac{0{,}41}{0{,}91}\approx 0{,}45$

a) Como 114º = 90º + 24º será:
sen 114º = cos 24º = 0,91
cos 114º = −sen 24º = −0,41
tg 114º = −cotg 24º = −2,22.

b) Como 156º = 180º − 24º será:
sen 156º = sen 24º = 0,41
cos 156º = −cos 24º = −0,91
tg 156º = −tg 24º = −0,45.

c) Como 204º = 180º + 24º será:
sen 204º = −sen 24º = −0,41
cos 204º = −cos 24º = −0,91
tg 204º = tg 24º = 0,45.

d) Como 336º = 360º − 24º será:
sen 336º = − sen 24º = −0,41
cos 336º = cos 24º = 0,91
tg 336º = −tg 24º = − 0,45.

3. Si cos $\alpha=\frac{3}{5}$ ($\alpha\in$ I cuadrante) y tg $\beta=-2$($\beta\in$ II cuadrante), calcula sin utilizar la calculadora, el valor de sen($\alpha+\beta$) y tg ($\alpha-\beta$).

$\text{sen}\,\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{4}{5}$ (elegimos el signo positivo de la raíz cuadrada pues α es un ángulo del primer cuadrante). Además, $\text{tg}\,\alpha=\frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}=\frac{4}{3}$.

De la relación $1+\text{tg}^2\,\beta=\sec^2\beta$ deducimos que

$\cos^2\beta=\frac{1}{5}\Rightarrow\cos\beta=-\frac{\sqrt{5}}{5}$ (con signo menos pues está en el segundo cuadrante):

también $\text{sen}\,\beta=\pm\sqrt{1-\cos^2\beta}=\sqrt{1-\frac{1}{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$ (elegimos el signo positivo de la raíz cuadrada pues β es del segundo cuadrante).

Sustituimos estos valores y obtenemos:

$\text{sen}\,(\alpha+\beta)=\text{sen}\,\alpha\cos\beta+\cos\alpha\,\text{sen}\,\beta=$

$\frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)+\frac{3}{5}\cdot\frac{2\sqrt{5}}{5}=\frac{2\sqrt{5}}{25}$

$\text{tg}\,(\alpha-\beta)=\frac{\text{tg}\,\beta-\text{tg}\,\alpha}{1+\text{tg}\,\beta\cdot\text{tg}\,\alpha}=\frac{-2-\frac{4}{3}}{1+(-2)\cdot\frac{4}{3}}=2$

4. Si sen $\alpha=-\frac{1}{5}$ $\left(\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}\right)$, determina sin calculadora, el valor de sen 2α y cos $\frac{\alpha}{2}$.

Empezamos calculando el valor de cos α.

$\cos\alpha=-\sqrt{1-\text{sen}^2\,\alpha}=-\sqrt{1-\left(-\frac{1}{5}\right)^2}=-\frac{2\sqrt{6}}{5}$

Aplicando la fórmula del seno del ángulo doble será:

$\text{sen}\,2\alpha=2\text{sen}\,\alpha\cos\alpha=2\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)\cdot\left(-\frac{2\sqrt{6}}{5}\right)=\frac{4\sqrt{6}}{25}$

Y aplicando la fórmula del coseno del ángulo mitad será:

$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}=-\sqrt{\frac{1-\frac{2\sqrt{6}}{5}}{2}}=-\sqrt{\frac{5-2\sqrt{6}}{10}}$

elegimos el signo − pues el ángulo $\frac{\alpha}{2}$ está en el segundo cuadrante).

5. Calcula el valor de la expresión $\frac{\text{sen}\,70^\circ+\text{sen}\,50^\circ}{\cos 70^\circ-\cos 50^\circ}$.

Utilizando las fórmulas de transformación se tiene:

$\frac{\text{sen}\,70^\circ+\text{sen}\,50^\circ}{\cos 70^\circ-\cos 50^\circ}=$

$=\frac{2\text{sen}\,\frac{70^\circ+50^\circ}{2}\,\text{sen}\,\frac{70^\circ-50^\circ}{2}}{-2\text{sen}\,\frac{70^\circ+50^\circ}{2}\,\text{sen}\,\frac{70^\circ-50^\circ}{2}}=\frac{2\text{sen}\,60^\circ\cos 10^\circ}{-2\text{sen}\,60^\circ\,\text{sen}\,10^\circ}=$

$=-\,\text{cotg}\,10^\circ$

6. Comprueba la identidad $\frac{\text{sen}\,2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=\text{tg}\,\alpha$.

$\frac{\text{sen}\,2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=\frac{2\text{sen}\,\alpha\cos\alpha}{1+\cos^2\alpha-\text{sen}^2\alpha}=\frac{2\text{sen}\,\alpha\cos\alpha}{2\cos^2\alpha}=\frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos^2\alpha}=\text{tg}\,\alpha$

7. Resuelve la ecuación sen $2x$ = sen x.

$\text{sen}\,2x=\text{sen}\,x\Leftrightarrow 2\text{sen}\,x\cos x=\text{sen}\,x\Leftrightarrow\text{sen}\,x(2\cos x-1)=0\Rightarrow$

$\begin{cases}\text{sen}\,x=0\\ 2\cos x-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\text{sen}\,x=0\\ \cos x=\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0^\circ+k\cdot 180^\circ\\ x=60^\circ+k\cdot 360^\circ\\ x=300^\circ+k\cdot 360^\circ\end{cases}$

las soluciones del primer giro son 0º, 60º, 180º y 300º.

Problemas propuestos

Tipo I. Relación entre las razones trigonométricas de un ángulo

1. Si $\operatorname{cosec}\alpha = -\frac{5}{2}$ y α es del cuarto cuadrante, calcula sin hallar el valor de α, sus restantes razones trigonométricas.

$\operatorname{sen}\alpha = -\frac{2}{5}$. $\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha} = \sqrt{1-\left(-\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{21}}{5}$ (elegimos el signo + pues el ángulo está en el cuarto cuadrante).

$\Rightarrow \sec\alpha = \frac{5}{\sqrt{21}} = \frac{5\sqrt{21}}{21}$.

Y $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{2}{\sqrt{21}} = \frac{2\sqrt{21}}{21}$; $\operatorname{cotg}\alpha = -\frac{\sqrt{21}}{2}$.

2. Si $\alpha = -0{,}76$ y α es del segundo cuadrante, calcula sin hallar el valor de α, sus restantes razones trigonométricas.

$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{1}{-0{,}76} = -1{,}315789474$.

$\operatorname{sen}\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-(-0{,}76)^2} = 0{,}649923072$

(elegimos el signo + pues el ángulo es del segundo cuadrante)

$\Rightarrow \operatorname{cosec}\alpha = 1{,}538643637$.

Por último, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{0{,}6499...}{-0{,}76} = -0{,}855161936$;

$\operatorname{cotg}\alpha = -1{,}169369165$.

3. De un ángulo α del primer cuadrante se conoce que $\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{3}$. Calcula el valor exacto de:

a) $\operatorname{tg}\alpha$ b) $\operatorname{sen}(2\alpha)$

a) $\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{8}}{3}$

(elegimos el signo + pues α es del primer cuadrante). Por tanto, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1/3}{\sqrt{8}/3} = \frac{1}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{8}}{8} = \frac{2\sqrt{2}}{8} = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

b) $\operatorname{sen}2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha = 2\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{\sqrt{8}}{3}\right) = \frac{2\sqrt{8}}{9} = \frac{4\sqrt{2}}{9}$.

4. Si $\operatorname{cotg}\alpha = -2$ y $\operatorname{sen}\beta = 4\cos\beta$ calcula:
a) $\operatorname{tg}2\alpha$ b) $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$

Si $\operatorname{cotg}\alpha = -2 \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{2}$.

Si $\operatorname{sen}\beta = 4\cos\beta \Rightarrow \operatorname{tg}\beta = 4$. Luego:

a) $\operatorname{tg}2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^2} = -\frac{4}{3}$

b) $\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta} = \frac{-\frac{1}{2}-4}{1+\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 4} = \frac{9}{2}$

5. Calcula las razones del ángulo $\alpha+\beta$ sabiendo que $\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{4}$, con $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, y $\cos\beta = -\frac{1}{3}$, con $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$.

Si $\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{4}$, al ser α del primer cuadrante, será $\cos\alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$ y $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{15}}{15}$.

Si $\cos\beta = -\frac{1}{3}$, al ser β del segundo cuadrante, será $\operatorname{sen}\beta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ y $\operatorname{tg}\beta = -2\sqrt{2}$. Luego $\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta =$

$= \frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{\sqrt{15}}{4}\cdot\frac{\sqrt{8}}{3} = \frac{-1+\sqrt{120}}{12}$;

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta =$

$= \frac{\sqrt{15}}{4}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{8}}{3} = \frac{-\sqrt{15}-\sqrt{8}}{12}$ y

$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta} = \frac{\frac{\sqrt{15}}{15}-\sqrt{8}}{1-\frac{\sqrt{15}}{15}\cdot(\sqrt{-8})} = \frac{\sqrt{15}-15\sqrt{8}}{15+\sqrt{120}}$

6. Si α es un ángulo del segundo cuadrante y $\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{3}$, calcula:

a) $\operatorname{sen}2\alpha$ b) $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}$

c) $\cos(\pi+\alpha)$ d) $\operatorname{tg}(\pi-\alpha)$

Si $\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{3}$, y α del segundo cuadrante, será $\cos\alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ y $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{4}$. Luego,

a) $\operatorname{sen}2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha = 2\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = -\frac{4\sqrt{2}}{9}$,

b) $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1-\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{3+2\sqrt{2}}{6}}$

(elegimos el signo + pues $\frac{\alpha}{2}$ está en el primer cuadrante),

c) $\cos(\pi+\alpha) = \cos\pi\cos\alpha - \operatorname{sen}\pi\operatorname{sen}\alpha =$

$= -1\cdot\cos\alpha - 0\cdot\operatorname{sen}\alpha = -\cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

d) $\operatorname{tg}(\pi-\alpha) = \frac{\operatorname{tg}\pi-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\pi\cdot\operatorname{tg}\alpha} = \frac{0-\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)}{1+0} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

7. Sin utilizar calculadora, determina el valor numérico de la expresión: $\frac{2}{5}$sen 330º $-\frac{1}{4}$tg 135º + 2cos 270º $-\frac{1}{6}$tg 240º.

Dado que sen 330º = − sen 30º = $-\frac{1}{2}$; tg 135º = −tg 45º = −1; cos 270º = 0 y que tg 240º = tg 60º = $\sqrt{3}$, la expresión dada $\frac{2}{5}$sen 330º $-\frac{1}{4}$tg 135º + 2cos 270º $-\frac{1}{6}$tg 240º vale

$$=\frac{2}{5}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}\cdot(-1)+2\cdot 0-\frac{1}{6}\cdot(\sqrt{3})=$$

$$=-\frac{1}{5}+\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{6}=\frac{3-10\sqrt{3}}{60}$$

8. Calcula el valor numérico de las expresiones:
a) cos 195º − cos 75º
b) $\frac{\text{sen } 40º+\text{sen } 20º}{\cos 40º+\cos 20º}$

a) $\cos 195º-\cos 75º=-2\text{sen}\frac{195º+75º}{2}\text{sen}\frac{195º-75º}{2}=$

$-2\text{sen } 135º \text{ sen } 60º==-2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}==-\frac{\sqrt{6}}{2}.$

b) $$\frac{\text{sen } 40º+\text{sen } 20º}{\cos 40º+\cos 20º}=\frac{2\text{sen}\frac{40º+20º}{2}\cos\frac{40º-20º}{2}}{2\cos\frac{40º+20º}{2}\cos\frac{40º-20º}{2}}=$$

$$=\frac{2\text{sen } 30º\cos 10º}{2\cos 30º\cos 10º}=\text{tg } 30º=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Tipo II. Identidades. Fórmulas de adición y transformación

9. Demuestra que:
a) cos (α+β)· cos (α−β)=cos² α− sen² β
b) cos (α+β)· cos (α−β)=cos² β− sen² α

a) $\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)=$
$=(\cos\alpha\cdot\cos\beta-\text{sen }\alpha\cdot\text{sen }\beta)(\cos\alpha\cdot\cos\beta+\text{sen }\alpha\cdot\text{sen }\beta)=$
$=\cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta-\text{sen}^2\alpha\cdot\text{sen}^2\beta=$
$=\cos^2\alpha\,(1-\text{sen}^2\beta)-(1-\cos^2\alpha)\text{sen}^2\beta=$
$=\cos^2\alpha-\cos^2\alpha\,\text{sen}^2\beta-\text{sen}^2\beta+\cos^2\alpha\,\text{sen}^2\beta=$
$=\cos^2\alpha-\text{sen}^2\beta$

b) Para demostrar la segunda igualdad, en $\underset{(*)}{=}$ hacemos

$\underset{(*)}{=}(1-\text{sen}^2\alpha)\cos^2\beta-\text{sen}^2\alpha(1-\text{sen}^2\beta)=$

$=\cos^2\beta-\text{sen}^2\alpha\cos^2\beta-\text{sen}^2\alpha+\text{sen}^2\alpha\,\text{sen}^2\beta=$
$=\cos^2\beta-\text{sen}^2\alpha$

10. Comprueba las siguientes identidades:
a) $\text{cotg }\alpha-\frac{\text{cotg}^2\alpha-1}{\text{cotg }\alpha}=\text{tg }\alpha$
b) $\frac{\text{sen }\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\text{sen}^2\alpha}=\frac{\text{tg }\alpha}{1-\text{tg}^2\alpha}$

b) $$\text{cotg }\alpha-=\frac{\text{cotg}^2\alpha-1}{\text{cotg }\alpha}=\frac{1}{\text{tg }\alpha}-\frac{\frac{1}{\text{tg}^2\alpha}-1}{\frac{1}{\text{tg }\alpha}}=$$

$$=\frac{1}{\text{tg }\alpha}-\frac{\frac{1-\text{tg}^2\alpha}{\text{tg}^2\alpha}}{\frac{1}{\text{tg }\alpha}}=\frac{1}{\text{tg }\alpha}-\frac{1-\text{tg}^2\alpha}{\text{tg }\alpha}=\frac{\text{tg}^2\alpha}{\text{tg }\alpha}=\text{tg }\alpha$$

b) $\frac{\text{sen }\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\text{sen}^2\alpha}=$ (dividimos por $\cos^2\alpha$ en el numerador y denominador) $\frac{\frac{\text{sen }\alpha}{\cos\alpha}}{1-\frac{\text{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=\frac{\text{tg }\alpha}{1-\text{tg}^2\alpha}$

11. Comprueba la identidad:
$\frac{\text{sen }\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha-\text{sen }\alpha}\cdot\cos 2\alpha=1+\text{sen } 2\alpha$.

Desarrollamos el primer miembro: $\frac{\text{sen }\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha-\text{sen }\alpha}\cdot\cos 2\alpha=$

$=\frac{\text{sen }\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha-\text{sen }\alpha}\cdot(\cos^2\alpha-\text{sen}^2\alpha)=$

$=\frac{(\text{sen }\alpha+\cos\alpha)(\cos\alpha+\text{sen }\alpha)(\cos\alpha+\text{sen }\alpha)}{\cos\alpha-\text{sen }\alpha}=$

$=(\text{sen }\alpha-\cos\alpha)^2=\text{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha+2\text{sen }\alpha\cos\alpha=$
$=1+2\text{sen }\alpha\cos\alpha=1-\text{sen } 2\alpha$

12. Comprueba la identidad: $\frac{1-\text{tg }\alpha}{1+\text{tg }\alpha}=\frac{1-\text{sen } 2\alpha}{\cos 2\alpha}$.

Operamos en el primer miembro: $\frac{1-\text{tg }\alpha}{1+\text{tg }\alpha}=$

$=\frac{\cos\alpha-\text{sen }\alpha}{\cos\alpha+\text{sen }\alpha}=\frac{(\cos\alpha-\text{sen }\alpha)^2}{(\cos\alpha+\text{sen }\alpha)(\cos\alpha-\text{sen }\alpha)}=$

$=\frac{\text{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha-2\text{sen }\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\text{sen}^2\alpha}=\frac{1-2\text{sen }\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\text{sen}^2\alpha}=$

$=\frac{1-\text{sen } 2\alpha}{\cos 2\alpha}.$

13. Comprueba la identidad:
$2\cos\alpha\,\text{sen}^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)=\cos\alpha+\frac{1}{2}\text{sen } 2\alpha$.

Desarrollamos el primer miembro: $2\cos\alpha\,\text{sen}^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=$

$=2\cos\alpha\left(\text{sen}\frac{\pi}{4}\cos\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\pi}{4}\text{sen}\frac{\alpha}{2}\right)^2=$

$=2\cos\alpha\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\alpha}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\text{sen}\frac{\alpha}{2}\right)^2=$

$=2\cos\alpha\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\text{sen}\frac{\alpha}{2}\right)^2=$

$=2\cos\alpha\cdot\frac{2}{4}\cdot\left(\cos^2\frac{\alpha}{2}+\text{sen}^2\frac{\alpha}{2}+2\text{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right)=$

$=\cos\alpha\cdot\left(1+2\text{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right)=\cos\alpha\ (1+\text{sen}\ \alpha)=$

$=\cos\alpha+\cos\alpha\ \text{sen}\ \alpha=\cos\alpha+\frac{1}{2}\text{sen}\ 2\alpha$

14. Simplifica la expresión: $\frac{\text{sen}\ 5\alpha-\text{sen}\ 3\alpha}{\cos 5\alpha+\cos 3\alpha}$

$$\frac{\text{sen}\ 5\alpha-\text{sen}\ 3\alpha}{\cos 5\alpha+\cos 3\alpha}=$$

$$=\frac{2\cos\frac{5\alpha+3\alpha}{2}\ \text{sen}\frac{5\alpha-3\alpha}{2}}{2\cos\frac{5\alpha+3\alpha}{2}\ \cos\frac{5\alpha-3\alpha}{2}}=\frac{2\cos 4\alpha\ \text{sen}\ \alpha}{2\cos 4\alpha\ \cos\alpha}=\text{tg}\ \alpha$$

15. ¿Es cierta la igualdad $\frac{\text{tg}\ \alpha+\cos\alpha}{\text{sen}\ \alpha}=\sec\alpha+\text{tg}\ \alpha$?

No es cierta, pues si desarrollamos el primer miembro:

$$\frac{\text{tg}\ \alpha+\cos\alpha}{\text{sen}\ \alpha}=\frac{\frac{\text{sen}\ \alpha}{\cos\alpha}+\cos\alpha}{\text{sen}\ \alpha}=\frac{\text{sen}\ \alpha+\cos^2\alpha}{\text{sen}\ \alpha\cos^2\alpha}=$$

$$=\frac{\text{sen}\ \alpha}{\text{sen}\ \alpha\cos\alpha}+\frac{\cos^2\alpha}{\text{sen}\ \alpha\cos\alpha}=\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\text{sen}\ \alpha}=$$

$=\sec\alpha+\text{cotg}\ \alpha$ que, en general, es distinto que $\sec\alpha+\text{tg}\ \alpha$.

16. Expresa tg 3α en función de tg α.

$$\text{tg}\ 3\alpha=\text{tg}\ (2\alpha-\alpha)=\frac{\text{tg}\ 2\alpha-\text{tg}\ \alpha}{1-\text{tg}\ 2\alpha\cdot\text{tg}\ \alpha}=\frac{\frac{2\text{tg}\ \alpha}{1-\text{tg}^2\alpha}+\text{tg}\ \alpha}{1-\frac{2\text{tg}\ \alpha}{1-\text{tg}^2\alpha}\text{tg}\ \alpha}=$$

$$=\frac{\frac{2\text{tg}\ \alpha+\text{tg}\ \alpha-\text{tg}^3\alpha}{1-\text{tg}^2\alpha}}{\frac{1-\text{tg}^2\alpha-2\text{tg}^2\alpha}{1-\text{tg}^2\alpha}}=\frac{3\text{tg}\ \alpha-\text{tg}^3\alpha}{1-3\text{tg}^2\alpha}$$

17. Expresa sen 4α en función de:
a) sen α; b) cos α.

a) $\cos 4\alpha=\cos 2(2\alpha)=\cos^2(2\alpha)-\text{sen}^2(2\alpha)=$
$=1-\text{sen}^2(2\alpha)-\text{sen}^2(2\alpha)=$
$=1-\text{sen}^2(2\alpha)=1-2(2\text{sen}\ \alpha\cos\alpha)^2=$
$=1-8\text{sen}^2\alpha\cos^2\alpha=$
$=1-8\text{sen}^2\alpha\ (1-\text{sen}^2\alpha)=1-8\text{sen}^2\alpha+8\text{sen}^4\alpha$

b) En $=1-8(1-\cos^2\alpha)\cos^2\alpha=1-8\cos^2\alpha+8\cos^4\alpha$

18. Expresa sen 4α en función de sen α y cos α.

$\text{sen}\ 4\alpha=\text{sen}\ 2(2\alpha)=2\text{sen}(2\alpha)\cos(2\alpha)=$
$=2\cdot 2\text{sen}\ \alpha\cos\alpha(\cos^2\alpha-\text{sen}^2\alpha)=$
$=4\text{sen}\ \alpha\cos\alpha(1-2\text{sen}^2\alpha)=4\text{sen}\ \alpha\cos\alpha-8\text{sen}^3\alpha\cos\alpha=$
También se puede poner en $=4\text{sen}\ \alpha\cos\alpha\ (2\cos^2\alpha-1)=$
$=8\text{sen}\ \alpha\cos^3\alpha-4\text{sen}\ \alpha\cos\alpha$

19. Expresa sen *x*, cos *x* y tg *x* en función de tg $\frac{x}{2}$.

- $\text{tg}\ x=\text{tg}\left(2\frac{x}{2}\right)=\frac{2\text{tg}\frac{x}{2}}{1-\text{tg}^2\frac{x}{2}}$

- Para expresar sen *x*, partimos de la relación $1+\text{cotg}^2 x=\text{cosec}^2 x\Leftrightarrow 1+\frac{1}{\text{tg}^2 x}=\frac{1}{\text{sen}^2 x}\Leftrightarrow\text{sen}^2 x=\frac{\text{tg}^2 x}{1+\text{tg}^2 x}$.
Sustituyendo en esta expresión el valor obtenido para tg *x* resulta:

$$\text{sen}^2 x=\frac{\left(\frac{2\text{tg}\frac{x}{2}}{1-\text{tg}^2\frac{x}{2}}\right)^2}{1+\left(\frac{2\text{tg}\frac{x}{2}}{1-\text{tg}^2\frac{x}{2}}\right)^2}=\frac{4\text{tg}^2\frac{x}{2}}{\left(1+\text{tg}^2\frac{x}{2}\right)^2}\Rightarrow$$

$$\text{sen}\ x=\frac{2\text{tg}\frac{x}{2}}{1+\text{tg}^2\frac{x}{2}}$$

- Como $\cos x=\frac{\text{sen}\ x}{\text{tg}\ x}$, resulta, sustituyendo las relaciones obtenidas anteriormente, que $\cos x=\frac{1-\text{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\text{tg}^2\frac{x}{2}}$.

Tipo III. Ecuaciones y sistemas trigonométricos

20. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $2\text{sen}\ 2x=1$ **b) $3\text{tg}\ 2x=\sqrt{3}$**

c) $3\cos\frac{x}{2}=1{,}5$ **d) $5\text{sen}\ 4x=0$**

a) $2\text{sen}\ 2x=1\Leftrightarrow\text{sen}\ 2x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow$
$2x=\begin{cases}30^\circ+k\cdot 360^\circ\\150^\circ+k\cdot 360^\circ\end{cases}\Leftrightarrow x=\begin{cases}15^\circ+k\cdot 180^\circ\\75^\circ+k\cdot 180^\circ\end{cases}$
Las soluciones del primer giro son: 15º, 75º, 195º y 255º.

b) $3\text{tg}\ 2x=\sqrt{3}\Leftrightarrow\text{tg}2x=\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow 2x=\frac{\pi}{6}+k\cdot\pi\Rightarrow x=\frac{\pi}{12}+\frac{k\cdot\pi}{2}$
las soluciones del primer giro son $\frac{\pi}{12}$ (para $k=0$), $\frac{7\pi}{12}$ (para $k=1$), $\frac{13\pi}{12}$ (para $k=2$) y $\frac{19\pi}{12}$ (para $k=3$).

c) $3\cos\frac{x}{2}=1{,}5\Leftrightarrow\cos\frac{x}{2}=\frac{1{,}5}{3}=0{,}5\Rightarrow\frac{x}{2}=\begin{cases}60^\circ+k\cdot 360^\circ\\300^\circ+k\cdot 360^\circ\end{cases}\Rightarrow$
$x=\begin{cases}120^\circ+k\cdot 720^\circ\\600^\circ+k\cdot 720^\circ\end{cases}\Rightarrow$
Las soluciones *del primer giro de la variable* son: 120º y 600º.

d) $5 \text{ sen } 4x = 0 \Leftrightarrow \text{sen } 4x=0 \Rightarrow 4x=0+k\cdot\pi \Leftrightarrow x=0+k\cdot\frac{\pi}{4}$.
Las soluciones del primer giro son:
$0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}$.

21. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ **b)** $\text{sen}(45^\circ+x)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

a) $\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x+\frac{\pi}{6}=\begin{cases}\frac{\pi}{6}+k\cdot 2\pi\\ \frac{11\pi}{6}+k\cdot 2\pi\end{cases}$

$\Rightarrow x=\begin{cases}k\cdot 2\pi\\ \frac{10\pi}{6}+k\cdot 2\pi=\frac{5\pi}{3}+k\cdot 2\pi\end{cases}$

Las soluciones del primer giro: 0 y $\frac{5\pi}{3}$ rad

b) $\text{sen}(45^\circ+x)=-\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 45^\circ+x=\begin{cases}225^\circ+k\cdot 360^\circ\\ 315^\circ+k\cdot 360^\circ\end{cases}$

$\Rightarrow x=\begin{cases}180^\circ+k\cdot 360^\circ\\ 270^\circ+k\cdot 360^\circ\end{cases}$

Las soluciones del primer giro son 180º y 270º.

22. Resuelve la ecuación: cos x = sen 2x

$\cos x=\text{sen } 2x \Leftrightarrow \cos x=2 \text{ sen } x \cos x \Leftrightarrow \cos x\,(1-2 \text{ sen } x) = 0$

$\Rightarrow \begin{cases}\cos x=0\pi\\ 1-2\text{sen}x=0\end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases}x=90^\circ+k\cdot 180^\circ\\ \begin{cases}x=30^\circ+k\cdot 360^\circ\\ x=150^\circ+k\cdot 360^\circ\end{cases}\end{cases} \quad (k\in Z).$

Las soluciones del primer giro son 90º, 270º, 30º y 150º.

23. Resuelve la ecuación: cos 3x + sen x = cos x

Teniendo en cuenta que $\cos 3x=\cos^3 x-3\text{sen}^2 x \cos x$, la ecuación inicial se puede expresar así: $\cos 3x+\text{sen } x=\cos x$
$\Leftrightarrow \cos^3 x-3\text{sen}^2 x\cos x+\text{sen } x-\cos x=0 \Leftrightarrow$
$\cos x\,(\cos^2 x-3 \text{ sen}^2 x-1)+\text{sen } x=0 \Leftrightarrow$
$\cos x\,(-4 \text{ sen}^2 x)+\text{sen } x=0 \Leftrightarrow$
$\text{sen } x\,(1-4\text{sen } x\cos x)=0 \Leftrightarrow$
$\text{sen } x\,(1-2\text{sen } 2x)=0 \Rightarrow \begin{cases}\text{sen } x=0\\ 1-2\text{sen } 2x=0\end{cases}$

- Si $\text{sen } x=0 \Rightarrow x=0^\circ+k\cdot 180^\circ$.
- Si $1-2\text{sen } 2x=0 \Leftrightarrow \text{sen } 2x$

$=\frac{1}{2} \Rightarrow 2x=\begin{cases}30^\circ+k\cdot 360^\circ\\ 150^\circ+k\cdot 360^\circ\end{cases} \Rightarrow x=\begin{cases}15^\circ+k\cdot 180^\circ\\ 75^\circ+k\cdot 180^\circ\end{cases} \quad (k\in Z)$

Las soluciones del primer giro son: 0º, 180º, 15º, 195º, 75º y 255º.

24. Resuelve la ecuación: tg $x=\sqrt{2}$ cos x

$\text{tg } x=\sqrt{2}\cos x \Leftrightarrow \text{sen } x=\sqrt{2}\cos^2 x \Leftrightarrow$
$\text{sen } x=\sqrt{2}\,(1-\text{sen}^2 x)$ que da lugar a la ecuación de segundo grado en sen x, $\sqrt{2}\text{ sen}^2 x+\text{sen } x-\sqrt{2}=0$ cuyas soluciones son

$\text{sen } x=\begin{cases}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ -\sqrt{2} \text{ (imposible)}\end{cases} \Rightarrow x=\begin{cases}45^\circ+k\cdot 360^\circ\\ 135^\circ+k\cdot 360^\circ\end{cases}$

Las soluciones del primer giro son 45º y 135º.

25. Resuelve la ecuación: tg 2x = −tg x

$\text{tg } 2x=-\text{tg } x \Leftrightarrow \frac{2\text{tg } x}{1-\text{tg}^2 x}-\text{tg } x \Leftrightarrow \text{tg}^3 x-3\text{tg } x=0$

$\Leftrightarrow \text{tg } x(\text{tg}^2 x-3)=0 \Rightarrow \begin{cases}\text{tg } x=0\\ \text{tg}^2 x-3=0\end{cases}$

- Si $\text{tg } x=0 \Rightarrow x=0^\circ+k\cdot 180^\circ$
- Si $\text{tg}^2 x-3=0$

$\Rightarrow \text{tg } x=\pm\sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases}\text{Si tg } x=+\sqrt{3} \Rightarrow x=60^\circ+k\cdot 180^\circ\\ \text{Si tg } x=-\sqrt{3} \Rightarrow x=120^\circ+k\cdot 180^\circ\end{cases}$

Las soluciones del primer giro son: 0º, 180º, 60º, 240º, 120º y 300º.

26. Resuelve la ecuación: sen 2x cos x = 3 sen$^2 x$

$\text{sen } 2x\cos x=3\text{ sen}^2 x \Leftrightarrow 2\text{sen } x\cos x.\ \cos x=3\text{sen}^2 x \Leftrightarrow$
$2\text{sen } x\cos^2 x=3\text{sen}^2 x \Leftrightarrow 2\text{sen } x(1-\text{sen}^2 x)=3\text{sen}^2 x \Leftrightarrow$
$2\text{sen } x-2\text{sen}^3 x-3\text{sen}^2 x=0 \Leftrightarrow \text{sen } x(2-2\text{sen}^2 x-3\text{sen } x)=0.$

- Si $\text{sen } x=0 \Rightarrow x=0^\circ+\text{k}\cdot 180^\circ$.
- Si $2-2\text{sen}^2 x-3\text{sen } x=0 \Leftrightarrow 2\text{sen}^2 x+3\text{sen } x-2=0$ que es una ecuación de 2º grado cuyas soluciones son $\text{sen } x \Rightarrow =\begin{cases}\frac{1}{2}\\ -2\end{cases}$. La solución $\text{sen } x=-2$ no es posible. Si

$\text{sen } x=\frac{1}{2} \Rightarrow x=\begin{cases}30^\circ+k\cdot 360^\circ\\ 150^\circ+k\cdot 360^\circ\end{cases} \quad (k\in Z)$

Las soluciones del primer giro son 0º, 180º, 30º y 150º.

27. Resuelve la ecuación: cos 2x + 5cos x + 3 = 0

$\cos 2x+5\cos x+3=0 \Leftrightarrow \cos^2 x-\text{sen}^2 x+5\cos x+3=0 \Leftrightarrow$
$2\cos^2 x+5\cos x+2=0$, ecuación de segundo grado en cos x,

cuya solución es $\cos x=\begin{cases}-1/2\\ -2 \text{ (imposible)}\end{cases}$

$\Rightarrow x=\text{arc cos }(-1/2)=\begin{cases}120^\circ+k\cdot 360^\circ\\ 240^\circ+k\cdot 360^\circ\end{cases} \Rightarrow (k\in Z)$

Las soluciones del primer giro son 120º y 240º.

28. Resuelve la ecuación: sen(2x + 40º) + sen(x + 20º) = 0.

$\text{sen}(2x+40^\circ)+\text{sen}(x+20^\circ)=0$

$\Leftrightarrow 2\text{sen }\frac{3x+60^\circ}{2}\cos\frac{x+20^\circ}{2}=0 \Rightarrow$

- Si $\text{sen }\frac{3x+60^\circ}{2}=0 \Rightarrow \frac{3x+60^\circ}{2}=\begin{cases}0^\circ+k\cdot 360^\circ\\ 180^\circ+k\cdot 360^\circ\end{cases}$

$\Rightarrow 3x+60^\circ=\begin{cases}0^\circ+k\cdot 720^\circ\\ 360^\circ+k\cdot 720^\circ\end{cases} \Rightarrow 3x=\begin{cases}-60^\circ+k\cdot 720^\circ\\ 300^\circ+k\cdot 720^\circ\end{cases} \Rightarrow$

$x=\begin{cases}-20^\circ+k\cdot 240^\circ\\ 100^\circ+k\cdot 240^\circ\end{cases}$

- Si $\cos\dfrac{x+20^\circ}{2}=0 \Rightarrow \dfrac{x+20^\circ}{2}=90^\circ+k\cdot 180^\circ$
  $\Rightarrow x+20^\circ=180^\circ k\cdot 360^\circ \Rightarrow x=160^\circ+k\cdot 360^\circ$
  Las soluciones del primer giro son 220º, 100º, 340º y 160º.

29. Resuelve la ecuación: $\cos 2x - \cos 6x = \text{sen } 5x + \text{sen } 3x$

La ecuación planteada es equivalente a
$-2\text{sen}\dfrac{2x+6x}{2}\ \text{sen}\dfrac{2x-6x}{2}=2\text{sen}\dfrac{5x+3x}{2}\ \cos\dfrac{5x-3x}{2} \Leftrightarrow$
$\text{sen } 4x\ \text{sen}(-2x) = \text{sen } 4x \cos x \Leftrightarrow \text{sen } 4x(\cos x - \text{sen } 2x) = 0$
$\Rightarrow \begin{cases}\text{sen } 4x=0\\ \cos x-\text{sen } 2x=0\end{cases}$

- Si $\text{sen } 4x = 0 \Rightarrow 4x = 0^\circ + k\cdot 180^\circ \Rightarrow x = 0^\circ + k\cdot 45^\circ$
- Si $\cos x - \text{sen } 2x = 0 \Leftrightarrow \cos x - 2\text{sen } x \cos x = 0 \Leftrightarrow$ $\cos x(1 - 2\text{sen } x) = 0$
  $\Rightarrow \begin{cases}\cos x=0\\ \text{sen } x=\dfrac{1}{2}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=90^\circ+k\cdot 180^\circ\\ x=\begin{cases}30^\circ+k\cdot 360^\circ\\ 150^\circ+k\cdot 360^\circ\end{cases} \quad (k\in Z)\end{cases}$
  Las soluciones del primer giros son 0º, 45º, 90º, 135º, 180º, 225º, 270º, 315º, 30º y 150º.

30. Resuelve el sistema $\begin{cases}\text{sen } x+\text{sen } y=1\\ x+y=90^\circ\end{cases}$

De la segunda ecuación, $x = 90^\circ - y$. Sustituyendo en la primera, $\text{sen }(90^\circ - y) + \text{sen } y = 1 \Leftrightarrow \text{sen } 90^\circ \cos y - \cos 90^\circ \text{sen } y + \text{sen } y = 1 \Leftrightarrow \cos y + \text{sen } y = 1$ cuyas soluciones son (está resuelta en los ejemplos del texto) $y = 0^\circ + k\cdot 360^\circ$ ó $y = 90^\circ + k\cdot 360^\circ$.
En el primer giro, si $y = 0^\circ \Rightarrow x = 90^\circ$ y si $y = 90^\circ \Rightarrow x = 0^\circ$. Las soluciones del primer giro son, pues, (90º, 0º) y (0º, 90º).

31. Resuelve el sistema $\begin{cases}\text{sen } x\cos y=\dfrac{3}{4}\\ \cos x\ \text{sen } y=\dfrac{1}{4}\end{cases}$

Si sumamos y restamos las ecuaciones del sistema
$\begin{cases}\text{sen } x\cos y=\dfrac{3}{4}\\ \cos x\ \text{sen } y=\dfrac{1}{4}\end{cases}$ se obtiene este otro:

$\begin{cases}\text{sen } x\cos y+\cos x\ \text{sen } y=1\\ \text{sen } x\cos y-\cos x\ \text{sen } y=\dfrac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\text{sen }(x+y)=1\\ \text{sen }(x-y)=\dfrac{1}{2}\end{cases}$

Este da lugar a estos otros dos:
$(I)\begin{cases}x+y=90^\circ+k_1\cdot 360^\circ\\ x-y=30^\circ+k_2\cdot 360^\circ\end{cases}$ y $(II)\begin{cases}x+y=90^\circ+k_1\cdot 360^\circ\\ x-y=150^\circ+k_2\cdot 360^\circ\end{cases}$

La soluciones de (I) son de la forma
$[60^\circ + (k_1 + k_2)\cdot 180^\circ, 30^\circ + (k_1 - k_2)\cdot 180^\circ]$.
Las de (II) son de la forma
$[120^\circ + (k_1 + k_2)\cdot 180^\circ, -30^\circ + (k_1 - k_2)\cdot 180^\circ]$
$\Leftrightarrow [120^\circ + (k_1 + k_2)\cdot 180^\circ, 330^\circ + (k_1 - k_2)\cdot 180^\circ]$.
Las soluciones particulares se obtienen dando valores a k_1 y k_2.

k_1 y k_2	Sistema (I)	Sistema (II)
$k_1 = k_2 = 0$	(60º, 30º)	(120º, 330º)
$k_1 = 1\ \ k_2 = 0$	(240º, 210º)	(300º, 330º)

10 cuestiones básicas

Estas 10 cuestiones debes contestarlas, aproximadamente, en 15 minutos. Si fallas más de dos te recomendamos que estudies un poco más. (En este caso puedes consultar algunas fórmulas).

1. El ángulo $\dfrac{11\pi}{6}$ rad expresado en grados sexagesimales vale:
a) 330º b) 165º c) 150º

a) 330º

2. $1+\text{tg}^2\ \alpha$ es igual a:
a) $\text{sen}^2\ \alpha$ b) $\text{cosec}^2\ \alpha$ c) $\sec^2\ \alpha$

c) $\sec^2\ \alpha$

3. Las razones trigonométricas del ángulo 2 550º son las mismas que las del ángulo:
a) 50º b) 30º c) 210º

b) 30º

4. Si $\text{tg}\ \alpha > 0$, sólo una de las siguientes afirmaciones es verdadera:
a) $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ b) $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$ c) $\alpha > 3$

b) $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$

5. De las siguientes fórmulas sólo una es cierta para cualquier valor de letra griega alfa:
a) $\text{sen }(180+\alpha)=\text{sen }(360-\alpha)$
b) $\text{sen }(180+\alpha)=\cos\alpha$
c) $\text{sen }(90-\alpha)=\cos (90+\alpha)$

a) $\text{sen }(180+\alpha)=\text{sen }(360-\alpha)$

6. Señala la fórmula verdadera:

a) $\text{sen}\left(\dfrac{\alpha}{2}+\beta\right)=\text{sen}\dfrac{\alpha}{2}+\text{sen}\ \beta$

b) $\text{sen}\left(\dfrac{\alpha}{2}+\beta\right)=\text{sen}\dfrac{\alpha}{2}\ \text{sen}\ \beta+\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\beta$

c) $\text{sen}\left(\dfrac{\alpha}{2}+\beta\right)=\text{sen}\dfrac{\alpha}{2}\ \text{sen}\ \beta+\cos\dfrac{\alpha}{2}\ \text{sen}\ \beta$

a) $\text{sen}\left(\dfrac{\alpha}{2}+\beta\right)=\text{sen}\dfrac{\alpha}{2}+\text{sen}\ \beta$

7. El valor de la expresión $\frac{\text{tg } 23° + \text{tg } 37°}{1 - \text{tg } 23° \cdot \text{tg } 37°}$ es:

a) $\sqrt{3}$ b) 1 c) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

c) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

8. Sólo una de las siguientes fórmulas es correcta:

a) $\text{tg } 2\beta = 2\text{tg } \beta$

b) $\text{tg } 2\beta = \frac{2\text{tg } \beta}{1 - \text{tg}^2 \beta}$

c) $\text{tg } 2\beta = \frac{2\text{tg } \beta}{1 - \text{tg}^2 \beta}$

a) $\text{tg } 2\beta = 2\text{tg } \beta$

9. Si $\text{tg } (\alpha + \beta) = 5$ y $\text{tg } \beta = 2$ entonces:

a) $\text{tg } \alpha = 3$

b) $\text{tg } \alpha = \frac{2}{5}$

c) $\text{tg } \alpha = \frac{3}{11}$

c) $\text{tg } \alpha = \frac{3}{11}$

10. La solución de la ecuación $\text{tg } \alpha = 0$ es:

a) $\alpha = 0°$, $\alpha = 180°$,

b) $\alpha = 0° + k \cdot 180° (k \in Z)$

c) $\alpha = 90° + k \cdot 180° (k \in Z)$

c) $\alpha = 90° + k \cdot 180° (k \in Z)$

2 cuestiones para investigar

1. Comprueba que el área de cualquier triángulo ABC viene dada por la fórmula $S = \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \frac{\text{tg } B \cdot \text{tg } C}{\text{tg } B + \text{tg } C}$

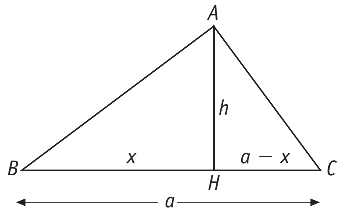

Fig. 7.1.

Observa la figura. El área del triángulo es, como siempre, $S = \frac{1}{2}$ base·altura$= \frac{1}{2} \cdot a \cdot h$. Por otra parte, al trazar la altura h sobre el lado a, dividimos al triángulo ABC en dos:

$$\begin{cases} \text{En el } ABH,\ \text{tg } B = \frac{h}{x} \\ \text{En el } AHC,\ \text{tg } C = \frac{h}{a - x} \end{cases}$$

Si despejamos x en la primera, $x = \frac{h}{\text{tg } B}$, y sustituimos en la segunda, $h = (a - x) \cdot \text{tg } C = \left(a - \frac{h}{\text{tg } B}\right) \cdot \text{tg } C = a \cdot \text{tg } C - h \cdot \frac{\text{tg } C}{\text{tg } B} \Rightarrow$

$$h \cdot \left(1 + \frac{\text{tg } C}{\text{tg } B}\right) = a \cdot \text{tg } C \Rightarrow h = a \cdot \frac{\text{tg } C}{1 + \frac{\text{tg } C}{\text{tg } B}} = a \cdot \frac{\text{tg } B \cdot \text{tg } C}{\text{tg } B + \text{tg } C}.$$

Llevando este valor de h a la fórmula del área,

$$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \frac{\text{tg } B \cdot \text{tg } C}{\text{tg } B + \text{tg } C} = \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \frac{\text{tg } B \cdot \text{tg } C}{\text{tg } B + \text{tg } C}.$$

2. Compara la demostración clásica (con notación actual) de la fórmula de Herón que encontrarás en http://www.arrakis.es/~mcj/heron.htm con la demostración por métodos trigonométricos que aparece en http://es.wikipedia.org/wiki/heron.

Ver páginas web indicadas.

Actividades

1. Resuelve el triángulo rectángulo del que conocemos la hipotenusa $a = 1$ cm y el cateto $c = 12$ cm.

sen $C=\dfrac{12}{15}=0{,}8 \Rightarrow C=53°7'48''$. $B = 90°$, $C = 36°52'12''$. El cateto b, por Pitágoras, vale $b=\sqrt{15^2-12^2}=9$ cm.

2. Las diagonales de un paralelogramo de 19,15 cm² de área forman un ángulo de 50º al cortarse. Calcula la longitud de las diagonales si una mide el doble que la otra.

Si D es la diagonal mayor, la otra diagonal vale $\dfrac{D}{2}$. Por tanto el área del paralelogramo será $19{,}15=\dfrac{\dfrac{D}{2}\cdot\dfrac{D}{4}\cdot \text{sen } 50°}{2}\Rightarrow$

$\Rightarrow D^2=99{,}994... \Rightarrow D=10$. Las diagonales miden 10 cm y 5 cm.

3. Del triángulo *ABC* se conocen los ángulos $\hat{A} = 62°$, $B = 97°$ y el lado $b = 4$ cm. Calcula la longitud del lado a.

Por el teorema del seno,

$a=\dfrac{b\cdot\text{sen } A}{\text{sen } B}=\dfrac{4\cdot\text{sen } 62°}{\text{sen } 97°}\approx 3{,}56$ cm.

4. Del triángulo *ABC* se conocen los lados $a = 15$ cm, $c = 10$ cm y el ángulo $B = 52°$. Calcula la longitud del lado b.

Por el teorema del coseno es $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B = 15^2 + 10^2 - 2 \cdot 15 \cdot 10 \cdot \cos 52° = 140{,}30 \Rightarrow b=\sqrt{140{,}3016}\approx 11{,}85$ cm.

5. Resuelve el triángulo *ABC* del que se conocen los siguientes datos: $\hat{A} = 52°$, $B = 65°$ y $c = 10$ m.

El tercer ángulo vale $C = 180° - (\hat{A} + B) = 180° - (52° + 65°) = 63°$.

Del teorema del seno $a=\dfrac{c\cdot\text{sen } A}{\text{sen } C}=\dfrac{10\cdot\text{sen } 52°}{\text{sen } 63°}=8{,}84$ cm y

$b=\dfrac{c\cdot\text{sen } B}{\text{sen } C}=\dfrac{10\cdot\text{sen } 65°}{\text{sen } 63°}=10{,}17$ cm.

6. Resuelve el triángulo *ABC* del que se sabe que $a = 27$ m, $c = 11$ m y $B = 63°$.

Por el teorema del coseno es $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B = 27^2 + 11^2 - 2 \cdot 27 \cdot 11 \cdot \cos 63° \approx 580{,}33 \Rightarrow b = 24{,}09$ m.
De los dos ángulos que faltan por determinar, el menor es C por ser el opuesto al lado menor. Lo calculamos por el teorema del seno:
$\dfrac{11}{\text{sen } C}=\dfrac{24{,}09}{\text{sen } 63°}\Rightarrow \text{sen } C=\dfrac{11\cdot\text{sen } 63°}{24{,}09}$ Por tanto $C = 24°0'26''$ (un ángulo y su suplementario tienen el mismo seno. Así, C puede ser $24°0'26''$ o su suplementario, $180° - 24°0'26'' = 155°59'34''$. Pero como $c < b$ también ha de ser $C < B$, es decir $24°0'26''$).

Por último $\hat{A} = 180° - (B + C) = 180° - (63° + 24°0'26'') = 92°59'34''$.

7. Resuelve el triángulo *ABC* del que se sabe que $a = 5$ m, $b = 8$ m y $B = 54°$.

Por el teorema del seno
$\dfrac{5}{\text{sen } A}=\dfrac{8}{\text{sen } 54°}\Rightarrow \text{sen } A=\dfrac{5\cdot\text{sen } 54°}{8}=0{,}505635621$.
De los dos ángulos que tienen este seno ($30°22'25''$ y su suplementario, $149°37'35''$) elegimos el menor, pues al ser $a < b$, será también $A < B$. Por tanto $A = 30°22'25''$.
El tercer ángulo vale $C = 180° - (\hat{A} + B) = 180° - (30°22'25'' + 54°) = 95°37'35''$.
El lado c se calcula por el teorema del seno:
$c=\dfrac{b\cdot\text{sen } C}{\text{sen } B}=\dfrac{8\cdot\text{sen } 95°37'35''}{\text{sen } 54°}\approx 9{,}84$ m.

8. Resuelve el triángulo *ABC* del que se sabe que $a = 10$ cm, $b = 16$ cm y $\hat{A} = 30°$.

Por el teorema del seno:
$\dfrac{10}{\text{sen } 30°}=\dfrac{16}{\text{sen } B}\Rightarrow \text{sen } B=\dfrac{16\cdot\text{sen } 30°}{10}=0{,}8$. El ángulo B puede ser $53°7'48''$ o su suplementario, $126°52'12''$. Las dos soluciones son posibles, pues al ser $a < b$, la condición que tienen que cumplir es que $\hat{A} < B$. Hay por tanto dos soluciones:

Solución 1

$B_1 = 53°7'48''$
$C_1 = 180° - (\hat{A} + B_1) = 180° - (30° + 53°7'48'') = 96°52'12''$.
$\dfrac{10}{\text{sen } 30°}=\dfrac{c_1}{\text{sen } 96°52'12''}\Rightarrow$

$c_1=\dfrac{10\cdot\text{sen } 96°52'12''}{\text{sen } 30°}\approx 19{,}86$ cm.

Solución 2

$B_2 = 126°52'12''$
$C_2 = 180° - (\hat{A} + B_2) = 180° - (30° + 126°52'12'') = 23°7'48''$.
$\dfrac{10}{\text{sen } 30°}=\dfrac{c_2}{\text{sen } 23°7'48''}\Rightarrow$

$c_2=\dfrac{10\cdot\text{sen } 23°7'48''}{\text{sen } 30°}\approx 7{,}86$ cm.

9. Resuelve el triángulo *ABC* del que se conocen los siguientes datos: $a = 6$ cm, $b = 9$ cm y $c = 14$ cm.

Por el teorema del coseno $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \Leftrightarrow$

$6^2 = 9^2 + 14^2 - 2 \cdot 9 \cdot 14 \cdot \cos A \Rightarrow$

$\cos A=\dfrac{241}{252}=0{,}956349206$, luego $\hat{A} = 16°59'29''$.
Análogamente calculamos el ángulo B:
$9^2 = 6^2 + 14^2 - 2 \cdot 6 \cdot 14 \cdot \cos B \Rightarrow$

$\cos B=\dfrac{151}{168}=0{,}898809523$, luego $B = 25°59'53''$.
Por último, $C = 180° - (\hat{A} + B) = 137°0'38''$.