Ejercicio 1. (1 pto.)

Sabiendo que $\cos\alpha = \frac{\sqrt{6}}{5}$ halla las restantes razones trigonométricas de α.

Recuerda que para calcular las restantes razones hay que emplear las relaciones geométricas fundamentales que son:

$$i.\, sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$$

$$ii.\, \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\mathrm{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}$$

Mediante la igualdad i podemos despejar el valor del $\mathrm{sen}\,\alpha$, a saber:

$$\mathrm{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \mathrm{sen}^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha \Rightarrow \mathrm{sen}\,\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} \Rightarrow$$

$$\mathrm{sen}\,\alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{6}}{5}\right)^2} = \sqrt{0{,}76} = \mathbf{0{,}8718}$$

Mediante la igualdad ii podemos calcular la tangente:

$$\cos\frac{\sqrt{6}}{5} = 0{,}4899$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\mathrm{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{0{,}8718}{0{,}4899} = \mathbf{1{,}7795}$$

Recuerda que las relaciones trigonométricas para un ángulo agudo son:

$$sen\ \alpha = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa}; \qquad \cos\alpha = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa};$$

$$tg\ \alpha = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente}$$

Ejercicio 2. (1 pto.)

Calcula a partir de las razones trigonométricas de $30°, 45°, 60°, 90°$ y aplicando las razones trigonométricas de la suma y la resta, las razones de:

a) $\mathrm{sen}\ 135°$

b) $\cos 15°$

c) $\mathrm{tg}\ 120°$

Recuerda que:

Razones trigonométricas suma:

$$\begin{cases} sen\ (a+b) = sen(a)\cdot\cos(b) + cos(a)\cdot\text{sen}(b) \\ cos\ (a+b) = cos(a)\cdot\cos(b) - sen(a)\cdot\text{sen}(b) \\ tg\ (a+b) = \dfrac{tg(a)+\text{tg}(b)}{1-tg(a)\cdot tg(b)} \end{cases}$$

Razones trigonométricas resta:

$$\begin{cases} sen\ (a-b) = sen(a)\cdot\cos(b) - cos(a)\cdot\text{sen}(b) \\ cos\ (a-b) = cos(a)\cdot\cos(b) + sen(a)\cdot\text{sen}(b) \\ tg\ (a-b) = \dfrac{tg(a)-\text{tg}(b)}{1+tg(a)\cdot tg(b)} \end{cases}$$

a) $\text{sen } 135° = \text{sen } (90° + 45°) =$ *Aplicando la suma del sen*

$$= \text{sen}(90°)\cdot\cos(45°) + \cos(90°)\cdot\text{sen}(45°) = 1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + 0\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} + 0$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \approx \mathbf{0,7071}$$

b) $\cos 15° = \cos(45° - 30°)$ *Aplicando la resta del cos*

$$= \cos(45°)\cdot\cos(30°) + \text{sen}(45°)\cdot\text{sen}(30°) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \approx \mathbf{0,9659}$$

Aplicando la suma del tg

c) $\text{tg } 120° = tg\ (60° + 60°) = \dfrac{tg(60°) + \text{tg}(60°)}{1 - tg(60°)\cdot tg(60°)} = \dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{1-\sqrt{9}} = \frac{2\sqrt{3}}{-2} = -\sqrt{3} \approx \mathbf{-1,7320}$$

Ejercicio 3. (2 ptos.)

Halla la solución de la siguiente ecuación trigonométrica:

$\text{sen}\,(4x) + \text{sen}\,(2x) = 0$

Para resolver la ecuación se va por partes:

1. Transformar la ecuación de suma en producto aplicando alguna de las identidades trigonométricas:

$$\text{sen}\,(4x) + \text{sen}\,(2x) = 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{4x + 2x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{4x - 2x}{2}\right) =$$

$$= 2 \cdot \text{sen}(3x)\cos(x) = 0$$

Recuerda para transformar las sumas en productos se emplean las siguientes identidades:

$$sen(a) + sen(b) = 2 \cdot sen\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot cos\left(\frac{a-b}{2}\right);$$
$$sen(a) - sen(b) = 2 \cdot cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot sen\left(\frac{a-b}{2}\right)$$
$$cos(a) + cos(b) = 2 \cdot cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$
$$cos(a) - cos(b) = -2 \cdot sen\left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot sen\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

2. Se iguala cada uno de los multiplicandos ya que si la ecuación es 0 cualquiera de los dos pudiera serlo:

$$\text{(a)}\quad \text{sen}(3x) = 0 \qquad \text{y} \qquad \text{(b)}\quad \cos(x) = 0$$

3. Se resuelve cada una de las ecuaciones:

(a) El sen es 0 en $0°$ y $180°$ y todas las vueltas de $360°$. Estas se representan por $360° \cdot k$, donde $k \in \mathbb{Z}$, vueltas.

Dividiendo entre 3

$$\operatorname{sen}(3x) = 0 \Rightarrow 3x = \begin{cases} 0° + 360° \cdot k \\ 180° + 360° \cdot k \end{cases} \Rightarrow x = \begin{cases} 0° + 120° \cdot k \\ 60° + 120° \cdot k \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \begin{cases} \mathbf{0° + 360° \cdot k} \\ \mathbf{120° + 360° \cdot k} \\ \mathbf{240° + 360° \cdot k} \\ \mathbf{60° + 360° \cdot k} \\ \mathbf{180° + 360° \cdot k} \\ \mathbf{300° + 360° \cdot k} \end{cases} \text{posibles soluciones}$$

(b) El cos es 0 en 90° y 270 ° y todas las vueltas de 360°.

$$\cos(x) = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} \mathbf{90° + 360° \cdot k} \\ \mathbf{270° + 360° \cdot k} \end{cases} \text{posibles soluciones}$$

Ejercicio 4. (2 ptos.)

Resuelve el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + sen^2 y = 2 \\ x + cos^2 y = 1 \end{cases}$$

El sistema se puede resolver por reducción. Restando a la primera ecuación la segunda $(1) - (2)$.

$$\begin{cases} (1)\ x + \operatorname{sen}^2 y = 2 \\ (2)\ x + \cos^2 y = 1 \end{cases}$$

Por la ecuación fundamental $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}^2 y - \cos^2 y = 1 \text{ transformando } \cos^2 y = 1 - \operatorname{sen}^2 y$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}^2 y - (1 - \operatorname{sen}^2 y) = 1 \Rightarrow 2 \cdot \operatorname{sen}^2 y = 2 \Rightarrow \operatorname{sen}^2 y = 1$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen} y = 1 \Rightarrow \boldsymbol{y = 90° + 360° \cdot k}$$

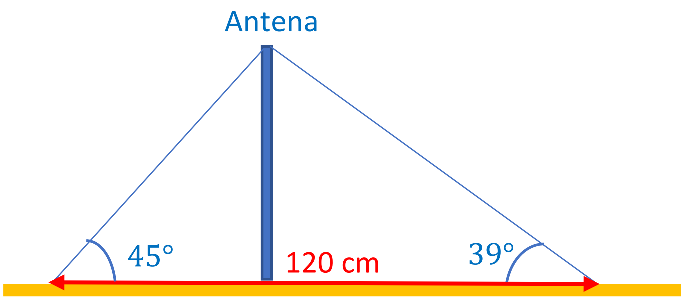
Despejando de (1)

$$x + \operatorname{sen}^2 y = 2 \Rightarrow x = 2 - \operatorname{sen}^2 y = 2 - 1 \Rightarrow \mathbf{x = 1}$$

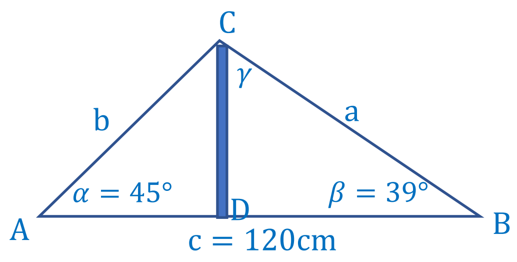
Recuerda que para resolver los sistemas de ecuaciones puedes emplear cualquiera de los métodos ya conocidos: reducción, despeje de variable, cambio de variable, y demás. Para ello utiliza las identidades trigonométricas estudiadas. Posteriormente solo queda despejar las incógnitas.

Ejercicio 5. (2 ptos.)

Una antena de televisión está sujeta al suelo con dos cables. Los puntos de sujeción de los cables están alineados con el pie de la antena y distan entre ellos 120 cm, a su vez si se traza línea horizontal alineando el pie de la antena y puntos de sujeción se forman ángulos entre los cables y esa horizontal de $45°$ y $39°$, respectivamente. ¿Cuánto mide la antena? Dibújalo en un gráfico.



Procedemos a nombrar los lados y ángulos a fin de aplicar lo que corresponde para la resolución del triángulo.



La antena es la altura sobre el lado c$\Rightarrow \overline{\mathrm{CD}}$, que divide el triángulo en dos triángulos rectángulos. Hallar el ángulo γ:

La suma de los ángulos de un triángulo es $180°$:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180° \Rightarrow \gamma = 180° - (\alpha + \beta) = 180° - (45° + 39°) = 96°$$

Aplicar el Teorema de los senos para hallar el lado b:

$$\frac{\text{sen}\ \alpha}{a} = \frac{\text{sen}\ \beta}{b} = \frac{\text{sen}\ \gamma}{c}$$

$$\frac{\text{sen}\ \beta}{b} = \frac{\text{sen}\ \gamma}{c} \Rightarrow b = \frac{\text{sen}\ \beta \cdot c}{\text{sen}\ \gamma} = \frac{\text{sen}\ 39° \cdot 120\text{cm}}{\text{sen}\ 96°} \approx 75{,}9\ \text{cm}$$

Recuerda que conocidos un lado y dos ángulos se debe en primer lugar calcular el ángulo restante (por la suma de los ángulos es $180°$) y aplicando Teorema de los senos calcular los lados restantes.

Hallar la altura $\overline{CD}$ aplicando el $\text{sen}\ \alpha$ al triángulo rectángulo ACD.

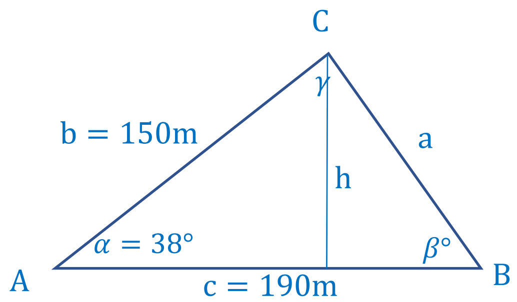
$$\text{sen}\ \alpha = \frac{\overline{CD}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{CD}}{b} \Rightarrow \overline{CD} = \text{sen}\ \alpha \cdot b = \text{sen}\ 45° \cdot 75{,}9\text{cm} = \mathbf{53,7\ cm}$$

La antena mide 53,7 cm

Nota: El problema pudo también resolverse hallando el lado a y la altura $\overline{CD}$ a través del triángulo rectángulo BCD

Ejercicio 6. (2 ptos.)

Una finca tiene forma triangular. Dos de sus lados miden 150 m y 190 m respectivamente y el ángulo entre ambos es de 38°. Calcula el perímetro y superficie de la finca.



Recuerda que conocidos dos lados y el ángulo entre ellos para resolver el triángulo se debe en primer lugar calcular lado restante por el Teorema de los cosenos. Después calcular un ángulo utilizando un lado menor utilizando el Teorema de los senos. El último ángulo se calcula por la suma de los ángulos $180°$.

Hallar a por el Teorema del coseno:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot cos\,\alpha \Rightarrow$$

$$\mathrm{a}^2 = (150\mathrm{m})^2 + (190\mathrm{m})^2 - 2 \cdot 150 \cdot 190 \cdot \cos 38° =$$

$$= 22500 + 36100 - 44916{,}6 = 13683{,}4 \Rightarrow \mathrm{a} = \sqrt{13683{,}4} \approx 117\ \mathrm{m}$$

Calcular la altura h para poder calcular la superficie del triángulo. Emplear el seno del triángulo rectángulo que se forma.

$$\mathrm{sen}\ \alpha = \frac{\mathrm{h}}{\mathrm{b}} \Rightarrow \mathrm{h} = \mathrm{sen}\ \alpha \cdot \mathrm{b} = \mathrm{sen}\ 38° \cdot 150\mathrm{m} \approx 92{,}3\ \mathrm{m}$$

Hallar el perímetro y superficie de la finca:

$$\mathrm{Perímetro} = \mathrm{a} + \mathrm{b} + \mathrm{c} \approx 117\ \mathrm{m} + 150\ \mathrm{m} + 190\ \mathrm{m} \approx \mathbf{457\ m}$$

$$\mathrm{Superficie} = \frac{\mathrm{c} \cdot \mathrm{h}}{2} \approx \frac{190\ \mathrm{m} \cdot 92{,}3\ \mathrm{m}}{2} \approx \mathbf{8768,5\ m^2}$$