1. La *NASA*, Agencia espacial de EE.UU., ha lanzado recientemente la misión ***Europa Clipper*** que viajará hasta Júpiter, al que llegará en el año 2030 para estudiar el océano que existe bajo la corteza helada de su satélite ***Europa***. El conjunto tiene una masa de $3241\ kg$.
Se lanzó primero hasta una **órbita terrestre** baja o **Low Earth Orbit** *(LEO)* a $450\ km$ de **altura** sobre la superficie de la Tierra. **Justificando todas las fórmulas** que utilices, calcula:

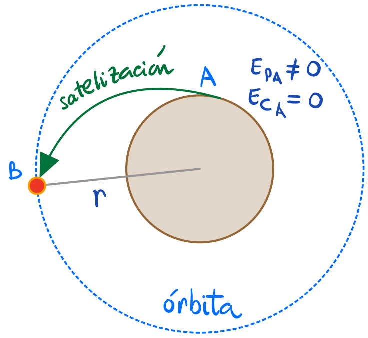
a) La **energía necesaria** de **satelización** para ponerlo en órbita. (1,75 pt.)

b) La **velocidad orbital** en **km/h** a esa misma **altura** de $450\ km$ **sobre la superficie** de la Tierra. (0,75 pt.)

Datos de La Tierra: $R_T = 6370\ km$, $g_0 = 9{,}81\ m/s^2$ (en su superficie)

a) Energía de satelización. Datos: $r = 6370 + 450\ km = 6{,}82 \cdot 10^6\ m$

$E_{m_A} + E_{necesaria} = E_{m_B}$; En A (superficie) no tiene energía cinética.



$$\boxed{E_{necesaria} = E_{m_B} - E_{m_A}}$$ Energía de satelización [J]

$$-G\frac{Mm}{R_T} + 0 + E_{necesaria} = -G\frac{Mm}{r} + \frac{1}{2}mv^2 \quad \text{siendo } r = R_T + h$$

En B, está en órbita: $G\frac{M\cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m}\frac{v^2}{\cancel{r}} \Longrightarrow G\frac{M}{r} = v^2$

$$E_{necesaria} = -G\frac{Mm}{r} + \frac{1}{2}mv^2 + G\frac{Mm}{R_T} = -G\frac{Mm}{r} + \frac{1}{2}m\,G\frac{M}{r} + G\frac{Mm}{R_T}$$

$$E_{necesaria} = GMm\left(-\frac{1}{r} + \frac{1}{2r} + \frac{1}{R_T}\right) = GMm\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2r}\right) \quad , \ r = R_T + h$$

$$\boxed{E_{necesaria} = GMm\cdot\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2\cdot r}\right)}$$ Energía de satelización [J]

No conozco ni G ni M, pero a partir de los datos: $\boxed{g_0 = G\frac{M}{R_T^2}} \Longrightarrow G\cdot M = g_0 \cdot R_T^2$, luego:

$$\boxed{E_{necesaria} = g_0\cdot R_T^2\cdot m\cdot\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2\cdot r}\right)} = 9{,}81\cdot(6{,}37\cdot 10^6)^2\cdot 3241\cdot\left(\frac{1}{6{,}37\cdot 10^6} - \frac{1}{2\cdot 6{,}82\cdot 10^6}\right) \simeq 1{,}079\cdot 10^{11}\ J$$

Como es lógico, la energía de satelización es positiva.

b) Calculamos la velocidad orbital.

$$F_g = F_c \Longrightarrow G\frac{M\cdot\cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m}\cdot\frac{v^2}{\cancel{r}} \Longrightarrow G\cdot\frac{M}{r} = v^2 \Longrightarrow v = \sqrt{G\frac{M}{r}} = \boxed{\sqrt{\frac{g_0\cdot R_T^2}{r}}}$$

$$v = \sqrt{\frac{9{,}81\cdot(6{,}37\cdot 10^6)^2}{6{,}82\cdot 10^6}} \simeq 7640 = 7{,}64\cdot 10^3\ m/s \simeq 2{,}75\cdot 10^4\ km/h$$

2. Calcula la **velocidad de escape desde la superficie de la Luna** con los datos del ejercicio. A continuación, calcula a qué **altura** sobre la superficie de la Luna la **velocidad de escape** es la **mitad que desde su superficie**. **Justifica la fórmula** de la velocidad de escape.

Datos de la Luna: $R_L = 1737\ km$, $g_{0L} = 1{,}62\ m/s^2$ (en su superficie) (2 pt.)

a) Calculamos primeramente la velocidad de escape en general.

$E_c + E_p = E_{c\infty} + E_{p\infty}$ (no tenemos en cuenta la E_c)

$$\frac{1}{2} m v_e^2 - G\frac{M \cdot m}{r} = 0 - G\frac{M\cdot m}{\infty} = 0$$

$$\frac{1}{2} \cancel{m} v_e^2 = G\frac{M\cdot \cancel{m}}{r} \Rightarrow v_e^2 = \frac{2\cdot G\cdot M}{r} \Rightarrow \boxed{v_e = \sqrt{\frac{2\cdot G\cdot M}{r}}}$$

Velocidad de escape (fórmula general)

$$G\cdot M = g_0\cdot R_L^2 \Rightarrow v_e = \sqrt{\frac{2\cdot g_0\cdot R_L^2}{r}} = \sqrt{\frac{2\cdot g_0\cdot R_L^{\cancel{2}}}{\cancel{R_L}}} = \boxed{\sqrt{2\cdot g_0\cdot R_L}}$$

Velocidad de escape desde la superficie

$r = R_L$ en la superficie

$$v_e = \sqrt{2\cdot g_0\cdot R_L} = \sqrt{2\cdot 9{,}81\cdot 1{,}737\cdot 10^6} = 2372\ m/s = 2{,}372\cdot 10^3\ m/s$$

b) Calculamos a qué altura la v_e es la mitad que en la superficie.

$$v_e = \sqrt{\frac{2\cdot g_0\cdot R_L^2}{r}} = \frac{1}{2}\cdot \underbrace{\sqrt{2\cdot g_0\cdot R_L}}_{\text{en la superficie}}$$

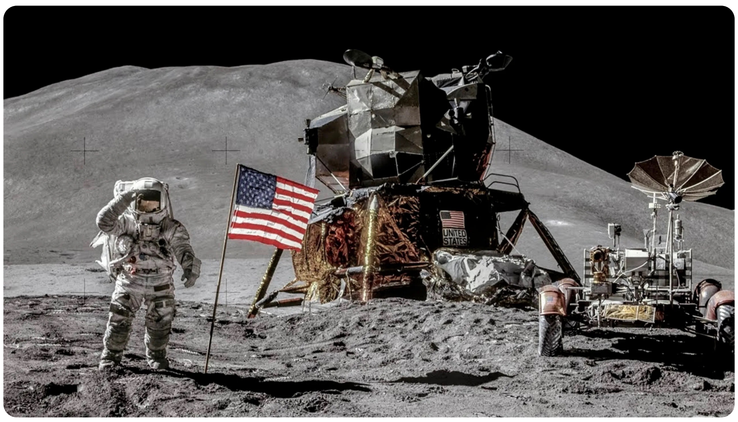
; elevamos al cuadrado

$$\Rightarrow \frac{\cancel{2}\cdot \cancel{g_0}\cdot R_L^{\cancel{2}}}{r} = \frac{1}{4}\cdot \cancel{2}\cdot \cancel{g_0}\cdot \cancel{R_L} \Rightarrow r = 4\cdot R_L = R_L + h \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = r - R_L = 4\cdot R_L - R_L = 3\cdot R_L = 3\cdot 1{,}737\cdot 10^6 = 5{,}211\cdot 10^6\ m = 5211\ km$$

(sobre la superficie)

Método II: $v_e = \sqrt{\frac{2\cdot g_0\cdot R_L^2}{r}} = \frac{1}{2}\cdot 2372\ m/s$ y despejar r



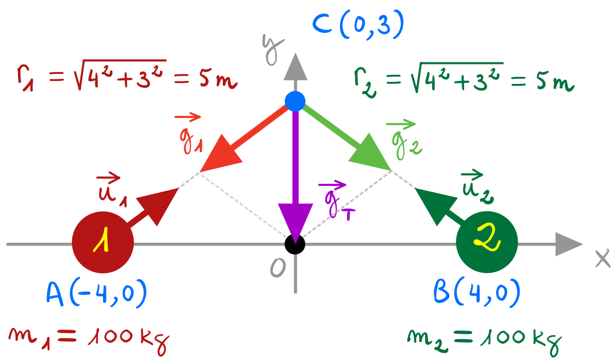
Imágenes del programa estadounidense NASA Apollo en la Luna. A la derecha Buzz Aldrin del Apollo 11, primera misión en alunizar con humanos, fotografiado por Neil Armstrong. A la izquierda la misión Apollo 15 con el róver lunar y el módulo Falcon. Saluda el astronauta James Irwin.

3. Tenemos dos **masas** de $100\ kg$ situadas en los puntos $A(-4{,}0)$ y $B(4{,}0)$. Las distancias están expresadas en metros. Dato: Constante de la gravitación universal $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2/kg^2$

a) Dibuja un **diagrama**. Calcula el **vector campo gravitatorio total** en el punto $C(0{,}3)$. (1,5 pt.)

b) Calcula el **trabajo** necesario para **trasladar** una masa de $3\ kg$ **desde** el **origen** $O(0{,}0)$ **hasta el infinito**. **Interpreta** el **signo** del **trabajo**. (1 pt.)

a) Calculamos primero los vectores unitarios hacia $C(0,3)$



$$\vec{u}_1 = \frac{(0,3)-(-4,0)}{\sqrt{4^2+3^2}} = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right) = \frac{4}{5}\vec{i} + \frac{3}{5}\vec{j}$$

$$\vec{u}_2 = \frac{(0,3)-(4,0)}{\sqrt{4^2+3^2}} = \left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right) = -\frac{4}{5}\vec{i} + \frac{3}{5}\vec{j}$$

$r_1 = r_2 = 5\,m$

Esperamos un campo total que se anule en su componente horizontal porque las masas son iguales y equidistantes del punto C. Esperamos que el campo total tenga sentido hacia abajo.

Según el principio de superposición $\vec{g}_T = \vec{g}_1 + \vec{g}_2$ $\boxed{\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} = -G \cdot \frac{M}{r^2} \cdot \vec{u}_r}$ Campo gravitatorio (forma vectorial) $\left[\frac{N}{kg} = \frac{m}{s^2}\right]$

$$\vec{g}_1 = -G\frac{m_1}{r_1^2}\vec{u}_1 = -G\frac{100}{5^2}\cdot\left(\frac{4}{5}\vec{i} + \frac{3}{5}\vec{j}\right) = -2{,}134\cdot 10^{-10}\,\vec{i} - 1{,}6\cdot 10^{-10}\,\vec{j}\ \frac{N}{kg}$$

$$\vec{g}_2 = -G\frac{m_2}{r_2^2}\vec{u}_2 = -G\frac{100}{5^2}\cdot\left(-\frac{4}{5}\vec{i} + \frac{3}{5}\vec{j}\right) = +2{,}134\cdot 10^{-10}\,\vec{i} - 1{,}6\cdot 10^{-10}\,\vec{j}\ \frac{N}{kg}$$

$$\vec{g}_T = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 = -2\cdot 1{,}6\cdot 10^{-10}\,\vec{j} = -3{,}2\cdot 10^{-10}\,\vec{j}$$ en $C(0,3)$ hacia abajo.

b) $\boxed{W_{0\to\infty} = -m\cdot(V_\infty - V_0) = -(E_{P_\infty} - E_{P_0})}$, $m = 10\,kg$ $\boxed{V = \frac{E_p}{m} = -G\frac{M}{r}}$ Potencial gravitatorio (escalar) $\left[\frac{J}{kg}\right]$

Podemos utilizar el método de los potenciales o bien el de las energías potenciales. $r_{01} = r_{02} = 4m$

$$V_0 = V_{01} + V_{02}\ ,\quad V_0 = -G\cdot\frac{M}{r} = -G\cdot\left[\frac{100}{4} + \frac{100}{4}\right] \simeq -3{,}335\cdot 10^{-9}\ \frac{J}{kg}$$

$V_\infty = -G\frac{M}{r} = -G\frac{M}{\infty} = 0$ para ambas masas.

$$W_{0\to\infty} = -m\cdot(V_\infty - V_0) = -3\,kg\cdot\left(0 - \left(-3{,}335\cdot 10^{-9}\ \frac{J}{kg}\right)\right) \simeq -1\cdot 10^{-8}\ J < 0$$

$W_g < 0$ El trabajo lo realiza una fuerza externa en contra del campo gravitatorio.

Tiene sentido porque la masa se aleja en contra de la atracción gravitatoria de las otras dos masas.

4. CUESTIÓN: (**Justifica** la respuesta). Un exoplaneta describe una órbita **elíptica** alrededor de su estrella. ¿Cuál de las siguientes **afirmaciones** es **correcta**? : (1 pt.)

a) Se **conserva** el **momento angular** y el **momento lineal**.

b) Se **conserva** el **momento lineal** y el **momento de fuerza** que los une.

c) **Varía** el **momento lineal** y se **conserva** el **momento angular**.

La opción ⓐ es falsa porque la velocidad cambia según la 2ª ley de Kepler $v_a \cdot r_a = v_p \cdot r_p$ $\left\{ \begin{array}{l} a \equiv \text{afelio} \\ p \equiv \text{perihelio} \end{array} \right.$

Por lo tanto, varía el momento lineal. Por la misma razón la ⓑ es falsa.

La opción ⓒ es verdadera. El momento lineal varía según la 2ª ley de Kepler $v_a \cdot r_a = v_p \cdot r_p$

El momento angular se conserva en un campo de fuerzas centrales.

$\boxed{\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}}$ Momento angular $\left[m \cdot kg \cdot \frac{m}{s} = kg \cdot \frac{m^2}{s} \right]$

$|\vec{L}| = |\vec{r} \times \vec{p}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{p}| \cdot \operatorname{sen} \theta$ Módulo

Calculemos cómo varía el momento angular con el tiempo: $\frac{d\vec{L}}{dt} = \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt}}_{\vec{v}} \times \underbrace{\vec{p}}_{m \cdot \vec{v}} + \vec{r} \times \underbrace{\frac{d\vec{p}}{dt}}_{\vec{F}} = \underbrace{\vec{v} \times m\vec{v}}_{0} + \vec{r} \times \vec{F}$

$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}}$ El momento de la fuerza es la variación del momento angular con respecto del tiempo.

$\boxed{\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}, \text{ si } \vec{M} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{cte}}$ Principio de conservación del momento angular

$|\vec{M}| = |\vec{r} \times \vec{F}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \cdot \operatorname{sen} \theta$ Módulo (θ = ángulo que forman)

$\vec{M} = 0$ no sólo cuando r o F son nulos sino también cuando $\operatorname{sen} \theta = 0$, es decir, $\vec{r} \parallel \vec{F}$.

En el caso de la gravedad $\theta = 180°$, $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{cte}$; Se conserva.

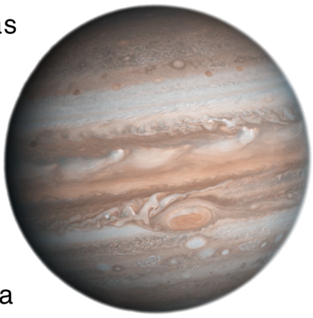
En una fuerza central el radio vector y la fuerza son paralelos.

La opción correcta es la ⓒ

Robert Goddard

Físico e ingeniero de EE.UU., pionero de la astronáutica, inventó los sistemas de control de cohetes con giroscopios, aplicación del momento angular.

5. CUESTIÓN **Práctica:** A partir de las medidas del radio orbital, r, y del período, T, de los cuatro satélites galileanos que orbitan alrededor del Júpiter se obtiene la tabla adjunta. Determina a partir de los datos la **masa de Júpiter** (**media**), la **incertidumbre (desviación estándar)** y el **error relativo de la medida**. **Justifica** la **fórmula** que utilices.



Satélite	T [días]	r [km]
Ío	1,77	420.000
Europa	3,55	670.000
Ganímedes	7,20	1.070.000
Calisto	16,70	1.880.000

Dato: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2/kg^2$

De acuerdo con la condición de órbita $\boxed{F_g = F_c}$

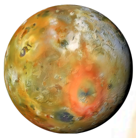
$$G\frac{M\cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \cancel{m}\cdot\frac{v^2}{\cancel{r}} \Rightarrow G\frac{M}{r} = v^2$$

En el movimiento circular $v = \frac{2\pi r}{T}$

$$\left.\begin{array}{l} G\frac{M}{r} = v^2 \\ v = \frac{2\pi r}{T}\end{array}\right\} G\frac{M}{r} = \left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2 = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G\cdot M} = K} \Rightarrow \boxed{T^2 = K\cdot r^3} \Rightarrow \boxed{M_J = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2}}$$

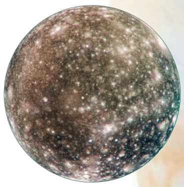
Vamos a calcular la masa de Júpiter analíticamente (unidades S.I.)



Ío: $$M_J = \frac{4\pi^2\cdot(420.000\cdot 10^3\ m)^3}{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot\left(1{,}77\ \text{día}\cdot\frac{24h}{1\ \text{día}}\cdot\frac{3600\,s}{1h}\right)} \simeq 1{,}88\cdot 10^{27}\ kg$$

Europa: $$M_J = \frac{4\pi^2\cdot(670.000\cdot 10^3\ m)^3}{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot\left(3{,}55\ \text{día}\cdot\frac{24h}{1\ \text{día}}\cdot\frac{3600\,s}{1h}\right)} \simeq 1{,}89\cdot 10^{27}\ kg$$

Ganímedes: $$M_J = \frac{4\pi^2\cdot(1.070.000\cdot 10^3\ m)^3}{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot\left(7{,}20\ \text{día}\cdot\frac{24h}{1\ \text{día}}\cdot\frac{3600\,s}{1h}\right)} \simeq 1{,}87\cdot 10^{27}\ kg$$



Calisto: $$M_J = \frac{4\pi^2\cdot(1.880.000\cdot 10^3\ m)^3}{6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot\left(16{,}7\ \text{día}\cdot\frac{24h}{1\ \text{día}}\cdot\frac{3600\,s}{1h}\right)} \simeq 1{,}89\cdot 10^{27}\ kg$$

La media de la masa de Júpiter, $\overline{M}_J = \frac{1{,}88+1{,}89+1{,}87+1{,}89}{4}\cdot 10^{27} \simeq 1{,}88\cdot 10^{27}\ kg$ Tomo 2 decimales arbitrariamente

$$\boxed{\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1}\cdot\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}}$$

Desviación estándar: cuantifica la incertidumbre de la medida.

$n = 4$

$$\sigma = \sqrt{\frac{0^2+0{,}01^2+0{,}01^2+0{,}01^2}{4}}\cdot 10^{27} \simeq 0{,}01\cdot 10^{27}$$

La medida se expresa como media ± incertidumbre: $\bar{x} \pm \sigma$,

En nuestro caso $\overline{M}_J \pm \sigma = (1{,}88 \pm 0{,}01)\cdot 10^{27}\ kg$

El error relativo $$\boxed{E_r = \frac{\sigma}{\overline{M}_J}\cdot 100} = \frac{0{,}01}{1{,}88}\cdot 100 \simeq 0{,}53\ \%$$

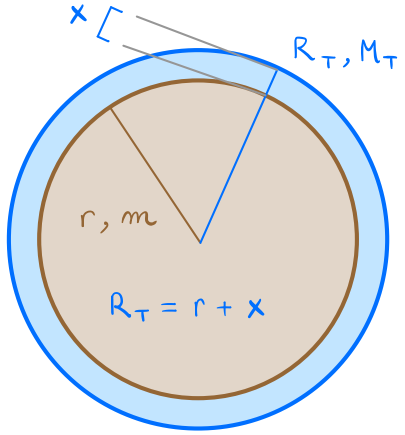
COMPLEMENTARIO Calcula el **campo gravitatorio** a $2000\ km$ de **profundidad** en el interior de la Tierra. Suponemos que la **densidad** de la Tierra es **constante**. **Justifica** la **fórmula** del **campo gravitatorio en el interior** de la Tierra.

Datos de La Tierra: $R_T = 6370\ km$, $g_0 = 9{,}81\ m/s^2$ (en su superficie) (1,5 pt.)

$$\boxed{\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m} = -G \cdot \frac{M}{r^2} \cdot \vec{u}_r}$$

Campo gravitatorio (forma vectorial)

$$\boxed{V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi r^3}$$



$$\boxed{g_0 = G \cdot \frac{M_T}{R_T^2}}$$; Suponemos una densidad constante: ρ

$$\rho = \frac{masa}{volumen} = \frac{M_T}{\frac{4}{3}\pi R_T^3} \Rightarrow M_T = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R_T^3$$

$$\left.\begin{array}{l} g_0 = G \cdot \frac{M_T}{R_T^2} = \frac{G \cdot \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R_T^3}{R_T^2} = G \cdot \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R_T \\ g_{int} = G \cdot \frac{m}{r^2} = \frac{G \cdot \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3}{r^2} = G \cdot \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r \end{array}\right\}$$

$r \equiv$ radio interior

$x \equiv$ profundidad

$R_T \equiv$ radio Tierra

$$\frac{g_{int}}{g_0} = \frac{G \cdot \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r}{G \cdot \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R_T} = \frac{r}{R_T} \Rightarrow \boxed{g_{int} = \left(\frac{g_0}{R_T}\right) \cdot r}$$

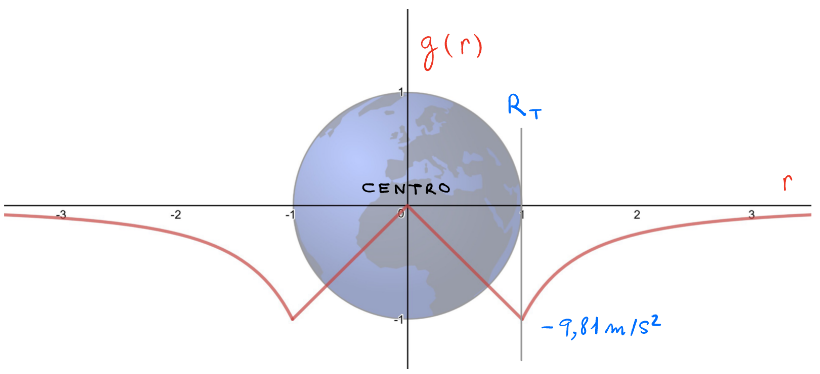
Campo en el interior (ec. recta)

La profundidad $x = 2000\ km \Rightarrow R_T = r + x \Rightarrow R_T = 6370\ km = 6{,}37 \cdot 10^6\ m$

$r = R_T - x = 6370 - 2000 = 4370\ km = 4{,}37 \cdot 10^6\ m$

$$g_{int} = \left(\frac{g_0}{R_T}\right) \cdot r = \frac{9{,}81\ m/s^2}{6{,}37 \cdot 10^6\ m} \cdot 4{,}37 \cdot 10^6\ m \simeq 6{,}73\ m/s^2$$

Como es lógico, la intensidad del campo gravitatorio en el interior de la Tierra, es menor que en la superficie.



Campo gravitatorio dentro y fuera

$$\boxed{g(r) = \begin{cases} G \cdot \frac{M_T}{r^2} & si\ r \geq R_T \\ \left(\frac{g_0}{R_T}\right) \cdot r & si\ r < R_T \end{cases}}$$

Es una función definida a trozos.