

① Resuelve gráficamente

$$\left. \begin{array}{l} a) \ 2x + y = 3 \\ \quad x - 3y = 5 \end{array} \right\}$$

$$2x + y = 3$$

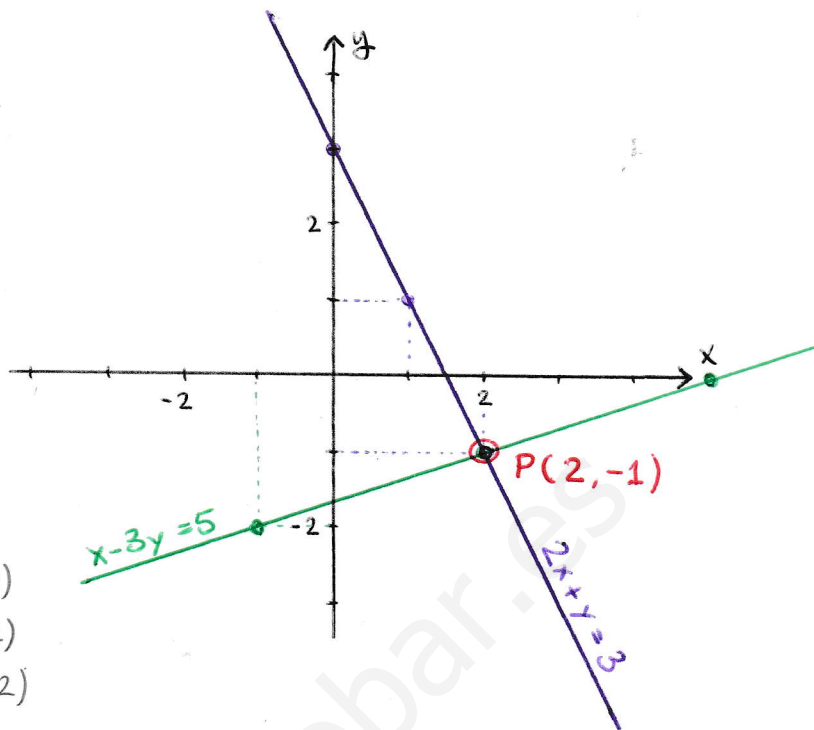
$$y = 3 - 2x$$

x	y
0	3 → (0,3)
1	1 → (1,1)
2	-1 → (2,-1)

$$x - 3y = 5$$

$$x = 5 + 3y$$

y	x
0	5 → (5,0)
-1	2 → (2,-1)
-2	-1 → (-1,-2)



SOLUCIÓN: Las funciones se cortan en $P(2, -1)$

CLASIFICACIÓN: Sistema compatible determinado

$$\left. \begin{array}{l} b) \ x - 2y = 1 \\ \quad -3x + 6y = -3 \end{array} \right\}$$

$$x - 2y = 1$$

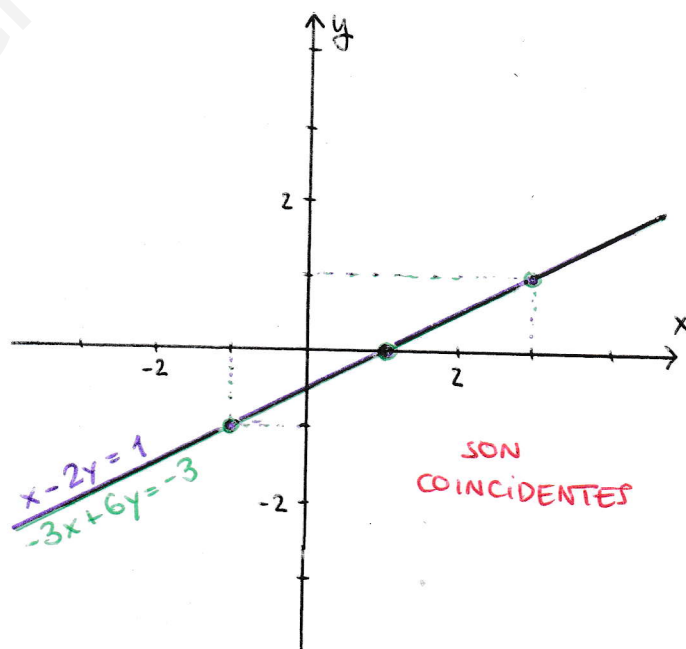
$$x = 1 + 2y$$

y	x
0	1 → (1,0)
-1	-1 → (-1,-1)
1	3 → (3,1)

$$-3x + 6y = -3$$

$$y = \frac{3x - 3}{6}$$

x	y
3	1 → (3,1)
1	0 → (1,0)
-1	-1 → (-1,-1)



SOLUCIÓN: Tienen infinitos puntos en común

CLASIFICACIÓN: Sistema Compatible Indeterminado

② Resuelve y clasifica:

a) $\begin{cases} y = 2x + 10 \\ y = x + 7 \end{cases} \Rightarrow$ Este sistema se presta a resolverlo por IGUALACIÓN

$$2x + 10 = x + 7$$

$$2x - x = 7 - 10$$

$$\boxed{x = -3} \longrightarrow y = -3 + 7$$
$$\boxed{y = 4}$$

SOLUCIÓN: las funciones se cortan en $P(-3, 4)$

CLASIFICACIÓN: Sistema Compatible Determinado

b) $\begin{cases} 4x + 3y = -1 \\ 5x - 3y = 19 \end{cases} \Rightarrow$ Por REDUCCIÓN

$$\begin{array}{r} 4x + 3y = -1 \\ + \quad 5x - 3y = 19 \\ \hline 9x \quad \quad = 18 \end{array}$$

$$\boxed{x = 2} \longrightarrow 5 \cdot 2 - 3y = 19$$

$$10 - 19 = 3y$$

$$-9 = 3y$$

$$\boxed{-3 = y}$$

SOLUCIÓN: $P(2, -3)$

CLASIFICACIÓN: Sistema Compatible determinado

$$c) \left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{2} - \frac{x+y}{6} = \frac{11}{6} \\ \frac{2x-3y}{5} - \frac{1}{10} = \frac{33}{10} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{lo primero, eliminar denominadores}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{3x}{6} - \frac{x+y}{6} = \frac{11}{6} \\ \frac{2(2x-3y)}{10} - \frac{1}{10} = \frac{33}{10} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3x - x - y = 11 \\ 4x - 6y - 1 = 33 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} 2x - y = 11 \\ 4x - 6y = 34 \end{array}}$$

Resolvamos por cualquier método: REDUCCIÓN

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x - y = 11 \\ 4x - 6y = 34 \end{array} \right\} \xrightarrow{\times 2} \left\{ \begin{array}{l} 4x - 2y = 22 \\ 4x - 6y = 34 \end{array} \right\}$$

$$4y = -12$$

$$\boxed{y = -3} \rightarrow 2x - (-3) = 11$$

$$2x = 11 - 3$$

$$2x = 8$$

$$\boxed{x = 4}$$

SOLUCIÓN: $P(4, -3)$

CLASIFICACIÓN: Sistema Compatible Determinado

$$d) \left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{2} - \frac{x-y}{3} = \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} + y - \frac{2x-5y}{6} = \frac{19}{12} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{3x}{6} - \frac{2(x-y)}{6} = \frac{1}{6} \\ \frac{3}{12} + \frac{12y}{12} - \frac{2(2x-5y)}{12} = \frac{19}{12} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3x - 2(x-y) = 1 \\ 3 + 12y - 2(2x-5y) = 19 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3x - 2x + 2y = 1 \\ 3 + 12y - 4x + 10y = 19 \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x + 2y = 1 \\ -4x + 22y = 16 \end{array}}$$

Resolvamos por cualquier método: SUSTITUCIÓN

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ -4x + 22y = 16 \end{cases} \rightarrow x = 1 - 2y$$

$$\rightarrow -4(1 - 2y) + 22y = 16$$

$$-4 + 8y + 22y = 16$$

$$30y = 20$$

$$y = \frac{20}{30}$$

$$x + 2 \cdot \frac{2}{3} = 1 \leftarrow \boxed{y = \frac{2}{3}}$$

$$x + \frac{4}{3} = 1$$

$$\frac{3x}{3} + \frac{4}{3} = \frac{3}{3}$$

$$3x + 4 = 3$$

$$3x = -1$$

$$\boxed{x = -\frac{1}{3}}$$

SOLUCIÓN: $P(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$

CLASIFICACIÓN: Sistema Compatible Determinado

$$e) \begin{cases} \frac{2}{x} + \frac{1}{y} = 2 \\ \frac{x+y}{3} = \frac{x}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2y}{xy} + \frac{x}{xy} = \frac{2xy}{xy} \\ \frac{2(x+y)}{6} = \frac{3x}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y + x = 2xy \\ 2(x+y) = 3x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 2y = 2xy \\ 2x + 2y = 3x \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x + 2y = 2xy \\ 2y = x \end{cases}}$$

Resolvemos por cualquier método: SUSTITUCIÓN

$$2y + 2y = 2 \cdot (2y) \cdot y$$

$$4y = 4y^2$$

$$y = y^2$$

$$0 = y^2 - y$$

$$0 = y \cdot (y - 1)$$

$$\boxed{y = 0}$$

¡ CUIDADO ! Esta
solución anula una
fracción: $\frac{1}{y} = \frac{1}{0} = x$

$$y - 1 = 0$$

$$\boxed{y = 1}$$

→ Sustituyendo: $2 \cdot 1 = x$

$$\boxed{2 = x}$$

SOLUCIÓN: $P(2, 1)$

CLASIFICACIÓN: Sistema Compatible Determinado.

③ RESUELVE ALGEBRAICAMENTE Y GRÁFICAMENTE

$$\left. \begin{array}{l} 4) \ y = -x^2 + 4x + 1 \\ \quad x + y = 5 \end{array} \right\}$$

• ALGEBRAICAMENTE : Método más adecuado : IGUALACIÓN

$$\left. \begin{array}{l} y = -x^2 + 4x + 1 \\ y = 5 - x \end{array} \right\} \begin{array}{l} -x^2 + 4x + 1 = 5 - x \\ 0 = x^2 - 5x - 4 \end{array}$$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

Vemos los valores de y para los valores de x obtenidos, sustituyendo el valor de x en una de las ecuaciones (la más sencilla)

• Para $x_1 = 4$

$$\begin{array}{l} y_1 = 5 - x \\ y_1 = 5 - 4 \\ \boxed{y_1 = 1} \end{array} \rightarrow P(4, 1)$$

• Para $x_2 = 1$

$$\begin{array}{l} y_2 = 5 - x \\ y_2 = 5 - 1 \\ \boxed{y_2 = 4} \end{array} \rightarrow Q(1, 4)$$

Solución : Las funciones se cortan en dos puntos, en :
 $P(4, 1)$ y en $Q(1, 4)$.

• GRÁFICAMENTE : Le damos valores a las 2 funciones:

a) $y = -x^2 + 4x + 1$

$$0 = -x^2 + 4x + 1$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 1}}{2 \cdot (-1)} =$$

$$= \frac{-4 \pm \sqrt{20}}{-2} = \begin{cases} x = -0,24 \\ x = 4,24 \end{cases}$$

b) $y = 5 - x$

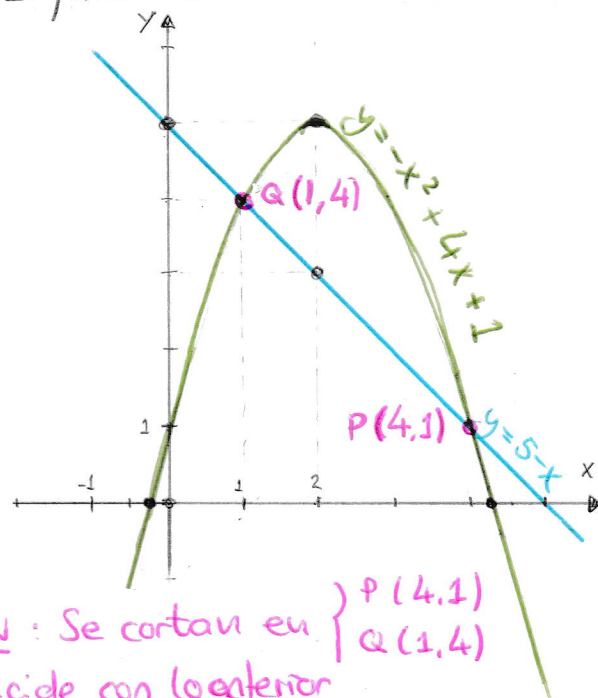
x	y
0	5
1	4
2	3

• Estas 2 soluciones son los cortes de la función al eje X.

• Calculamos el punto medio

$$P.M.(-0,24, 4,24) = 2$$

• Para $x=2 \Rightarrow y = -(2)^2 + 4 \cdot 2 + 1$
 $\boxed{y = 5}$



SOLUCIÓN : Se cortan en $\left. \begin{array}{l} P(4, 1) \\ Q(1, 4) \end{array} \right\}$ que coincide con lo anterior

Resolvemos por IGUALACIÓN

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$X_1 = 3$$

$$X_2 = 1$$

Para $x_2 = 1$

$$y_2 = 3 - 2 \cdot 1$$

$$y_2 = 1$$

$$P_2(1, 1)$$
$$y = 3 - 2x$$

0	$3 \rightarrow (0, 3)$
---	------------------------

$$1 \rightarrow (1, 1)$$

$$2 \mid -1 \rightarrow (2, -1)$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$
$$(-x^2 + 2x + 0 = 0)$$

$$0 = 2x - x^2$$

$$x = 0$$

$$2 - x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 2}$$

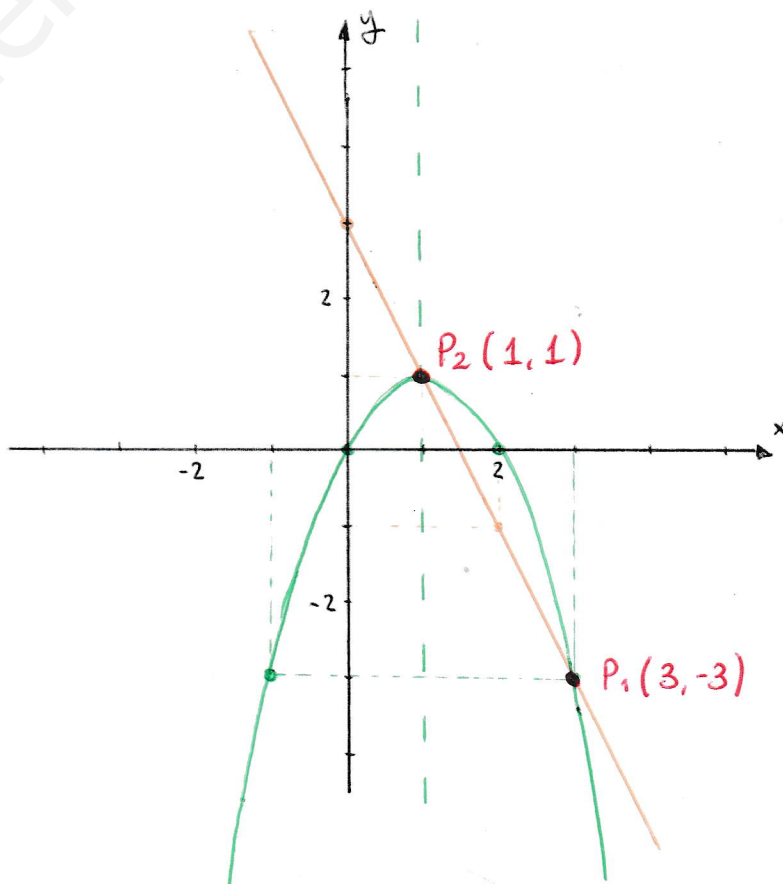
$$x = \frac{-2}{2(-1)} = \frac{-2}{-2} = 1$$

$$v(1,1)$$

Para $x = 1 \rightarrow 2 \cdot 1 - 1^2 = 1$

x	y
-1	-3

$\rightarrow (-1, -3)$



④ RESUELVE ALGEBRAICAMENTE

$$\begin{cases} 4) \ x^2 + y^2 - 4x - 2y = 20 \\ \quad -x^2 + y^2 - 12x + 2y = -12 \end{cases}$$

★ Resolvemos por REDUCCIÓN

$$8x - 4y = 32$$

← Despejamos una de las incógnitas

$$8x - 32 = 4y$$

NOTA: queda más sencillo si despejamos "y"

$$\frac{8x - 32}{4} = y$$

← Simplificamos

$$\frac{8x - 32}{4} = 2x - 8$$

$$2x - 8 = y$$

• Sustituimos en una de las ecuaciones:

¡OJO!

$$x^2 + (2x - 8)^2 - 4x - 2(2x - 8) = 20$$

$$x^2 + (2x)^2 + 8^2 - 2 \cdot 2x \cdot 8 - 4x - 4x - 16 = 20$$

$$\underline{x^2} + \underline{4x^2} + 64 - \underline{32x} - \underline{4x} - \underline{4x} - 16 = 20$$

$$5x^2 - 40x + 60 = 0$$

• Resolvemos la ecuación de 2º grado:

$$x = \frac{-(-40) \pm \sqrt{(-40)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 60}}{2 \cdot 5} = \frac{40 \pm \sqrt{400}}{10} = \frac{40 \pm 20}{10} = \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

• Sustituimos x_1 y x_2 en la ecuación más sencilla $\Rightarrow y = 2x - 8$

Para $x_1 = 6$

$$y_1 = 2x - 8$$

$$y_1 = 2 \cdot 6 - 8$$

$$y_1 = 4$$

$$P(6, 4)$$

Para $x_2 = 2$

$$y_2 = 2x - 8$$

$$y_2 = 2 \cdot 2 - 8$$

$$y_2 = -4$$

$$Q(2, -4)$$

SOLUCIÓN: Las dos funciones se cortan en $P(6, 4)$ y en $Q(2, -4)$

$$b) \quad \left. \begin{array}{l} x - 3y = -5 \\ xy - 2x - y = 1 \end{array} \right\} \rightarrow x = 3y - 5$$

$$(3y-5) \cdot y - 2(3y-5) - y = 1$$

$$3y^2 - 5y - 6y + 10 - y = 1$$

DIVIDO TODO
ENTRE 3 PARA
SIMPLIFICAR

$$3y^2 - 12y + 9 = 0$$

$$y^2 - 4y + 3 = 0$$

$$y = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} y_1 = 3 \\ y_2 = 1 \end{cases}$$

Para $y_1 = 3$

$$x = 3 \cdot 3 - 5$$

$$\boxed{x_1 = 1}$$

Para $y_2 = 1$

$$x = 3 \cdot 1 - 5$$

$$\boxed{x_2 = -2}$$

SOLUCIÓN : $P_1(1, 3)$

$P_2(-2, 1)$

$$c) \quad \left. \begin{array}{l} x \cdot y = 4 \\ x^2 + y^2 = 17 \end{array} \right\} \rightarrow x = \frac{4}{y}$$

$$\left(\frac{4}{y}\right)^2 + y^2 = 17$$

$$\frac{16}{y^2} = 17 - y^2$$

$$16 = (17 - y^2) \cdot y^2$$

$$16 = 17y^2 - y^4$$

$$y^4 - 17y^2 + 16 = 0$$

Resolvemos la ecuación bicuadrada

$$[z = y^2]$$

$$\hookrightarrow z^2 - 17z + 16 = 0$$

$$z = \frac{-(-17) \pm \sqrt{(-17)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16}}{2 \cdot 1} = \frac{17 \pm \sqrt{225}}{2} = \frac{17 \pm 15}{2} = \begin{cases} z_1 = 16 \\ z_2 = 1 \end{cases}$$

Deshacemos el cambio: $z = y^2 \rightarrow y = \sqrt{z}$

$$\text{Para } z_1 = 16 \rightarrow y = \sqrt{16} = \begin{cases} y_1 = 4 \\ y_2 = -4 \end{cases}$$

$$\text{Para } z_2 = 1 \rightarrow y = \sqrt{1} = \begin{cases} y_3 = 1 \\ y_4 = -1 \end{cases}$$

$$\text{Para } y_1 = 4 \rightarrow x_1 = \frac{4}{4} = 1 = x_1$$

$$\text{Para } y_2 = -4 \rightarrow x_2 = \frac{4}{-4} = -1 = x_2$$

$$\text{Para } y_3 = 1 \rightarrow x_3 = \frac{4}{1} = 4 = x_3$$

$$\text{Para } y_4 = -1 \rightarrow x_4 = \frac{4}{-1} = -4 = x_4$$

SOLUCIÓN: $P_1(1, 4)$

$P_2(-1, -4)$

$P_3(4, 1)$

$P_4(-4, -1)$

⑤ RESUELVE ALGEBRAICAMENTE

$$\begin{cases} 2^x + 3^y = 7 \\ 2^x - 3^y = 1 \end{cases}$$

• Hacemos el siguiente cambio $\begin{cases} 2^x = a \\ 3^y = b \end{cases}$

• Re-escribimos el sistema:

$$\begin{aligned} a + b &= 7 \\ a - b &= 1 \end{aligned} \quad \begin{aligned} &\xrightarrow{+} (1+b) + b = 7 \\ &\xrightarrow{-} a = (1+b) \end{aligned} \quad \begin{aligned} &(1+b) + b = 7 \\ &1 + b + b = 7 \\ &2b = 6 \\ &b = 3 \end{aligned}$$

$a = 1 + b$
 $a = 1 + 3$
 $a = 4$

• Pero nos piden x e y , por lo tanto:

• Como $2^x = a$
 $2^x = 4$

$$\log_2 4 = x$$

$$2 = x$$

• Como $3^y = b$
 $3^y = 3$

$$\log_3 3 = y$$

$$1 = y$$

$$P(2,1)$$

Solución: Las 2 funciones se cortan en $P(2,1)$

$$b) \begin{cases} 2^x + 3^y = 17 \\ 5 \cdot 2^x - 4 \cdot 3^y = 4 \end{cases} \quad \begin{matrix} 2^x = a \\ 3^y = b \end{matrix}$$

$$\begin{array}{rcl} a + b = 17 & \xrightarrow{\times 4} & 4a + 4b = 68 \\ 5a - 4b = 4 & \xrightarrow{+} & 5a - 4b = 4 \\ \hline 9a & & = 72 \end{array}$$

$$a = 8$$



$$a + b = 17$$

$$8 + b = 17$$

$$b = 9$$

Deshacemos el cambio:

$$2^x = a \longrightarrow x = \log_2 a$$

$$x = \log_2 8 = 3 = x$$

$$3^y = b \longrightarrow y = \log_3 b$$

$$y = \log_3 9 = 2 = y$$

SOLUCIÓN: $P(3, 2)$

⑥ RESUELVE ALGEBRAICAMENTE

$$\left. \begin{array}{l} 4) \log x + \log y = \log 12 \\ - \log x - \log y = \log 3 \end{array} \right\}$$

Ⓐ Usamos el método de REDUCCION

$$2 \cdot \log y = \log 12 - \log 3$$

$$\log y^2 = \log \frac{12}{3}$$

$$y^2 = 4$$

$$y = \sqrt{4} = \pm 2$$

$y = 2 \rightarrow$ Comprobamos $\Rightarrow$ VÁLIDA
 $y = -2 \rightarrow$ Comprobamos $\Rightarrow$ NO VÁLIDA
porque $\log -2$

• Sustituimos en una el valor de "y":

$$\log x + \log 2 = \log 12$$

$$\log x = \log 12 - \log 2$$

$$\log x = \log \frac{12}{2}$$

$$x = 12/2$$

$$\boxed{x = 6}$$

SOLUCIÓN: Los 2 funciones se cortan en $P(6, 2)$

$$b) \left. \begin{aligned} \log x + \log y &= 3 \cdot \log 2 \\ \log x - \log y &= \log 2 \end{aligned} \right\} \text{Aplicamos propiedades}$$

$$\left. \begin{aligned} \log x \cdot y &= \log 2^3 \\ \log \frac{x}{y} &= \log 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} x \cdot y &= 8 \\ \frac{x}{y} &= 2 \end{aligned} \right\} \rightarrow x = 2y$$

$$2y \cdot y = 8$$

$$2y^2 = 8$$

$$y^2 = 4$$

$$y = \sqrt{4}$$

$$y_1 = 2$$

$$y_2 = -2$$

NO VÁLIDA PORQUE NO SE PUEDEN HACER LOG DE NÚMEROS NEGATIVOS

$$\text{Para } y_1 = 2 \rightarrow x = 2 \cdot 2$$

$$x = 4$$

SOLUCIÓN: P (4, 2)

$$c) \left. \begin{aligned} \log x - \log y &= \log 3 \\ 2 \log x - 3 \log y &= \log 3 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \log \frac{x}{y} &= \log 3 \\ \log \frac{x^2}{y^3} &= \log 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \frac{x}{y} &= 3 \\ \frac{x^2}{y^3} &= 3 \end{aligned} \right\} \rightarrow x = 3y$$

$$\frac{(3y)^2}{y^3} = 3$$

$$9y^2 = 3y^3$$

$$9y^2 - 3y^3 = 0$$

$$y^2 \cdot (9 - 3y) = 0$$

$$9 - 3y = 0$$

$$y = 0 \text{ (no válida)}$$

$$y = 3$$

⊕ $y = 0$ NO ES VÁLIDA PORQUE NO EXISTE EL $\log 0$

Para $y=3 \rightarrow x = 3 \cdot 3$
 $x = 9$

SOLUCIÓN: $P(9, 3)$

d)

$$\left. \begin{aligned} \log x + \log y &= 1 \\ 3 \cdot \log x - \log y &= -1 + 4 \cdot \log 2 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \log x \cdot y &= \log 10 \\ \log \frac{x^3}{y} &= \log 0,1 + \log 2^4 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} \log x \cdot y &= \log 10 \\ \log \frac{x^3}{y} &= \log 0,1 \cdot 16 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} x \cdot y &= 10 \\ \frac{x^3}{y} &= 1,6 \end{aligned} \right\} \rightarrow x = \frac{10}{y}$$

$$\hookrightarrow \frac{\left(\frac{10}{y}\right)^3}{y} = 1,6$$

$$\frac{10^3}{y^3} = 1,6 y$$

$$10^3 = 1,6 y \cdot y^3$$

$$1000 = 1,6 y^4$$

$$625 = y^4$$

$$\sqrt[4]{625} = y$$

$$y_1 = 5$$

$$y_2 = -5$$

Para $y = 5$

$$x = \frac{10}{5}$$

$$x = 2$$

SOLUCIÓN: $P(2, 5)$

⑥

$$\begin{cases} E) \log(x+1) + \log y = 2 \cdot \log 2 \\ 2 \cdot \log x + \log y = \log 2 \end{cases}$$

$$\log(x+1) - 2 \cdot \log x = \log 2$$

$$\log(x+1) - \log x^2 = \log 2$$

$$\log \frac{(x+1)}{x^2} = \log 2$$

$$\frac{x+1}{x^2} = 2$$

$$x+1 = 2x^2$$

$$0 = 2x^2 - x - 1$$

$$x = \frac{+1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} x=1 \\ x=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

La solución negativa no tiene sentido, porque $\log -\frac{1}{2}$

Para $x=1$:

$$\log(1+1) + \log y = 2 \cdot \log 2$$

$$\log 2 + \log y = 2 \log 2$$

$$\log y = 2 \log 2 - \log 2$$

$$\log y = \log 2$$

$$\boxed{y=2}$$

Solución: Se cortan en el punto:
 $P(1,2)$