1. Estudia la continuidad de la siguiente función y explica las discontinuidades $f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2+1}{x+3} & si\ x < -2 \\ 4x - 6 & si - 2 \leq x \leq 3 \\ \frac{2x+3}{x} & si\ > 3 \end{cases}$

2. Averiguar a, b para que la función f(x) sea continua: $f(x) = \begin{cases} \frac{2x-b}{3x-1} & si\ x \leq 0 \\ \frac{3x}{4x-2} & si\ 0 < x < 1 \\ \frac{x^2+a}{x+3} & si\ \ x \geq 1 \end{cases}$

3.Calcula todas las asíntotas de las siguientes funciones: (2 puntos)

a) $\frac{5x^3+6x^2-2x}{2x^2-8}$ $\qquad$ $b. f(x) = \frac{7x+3}{9x^2-4}$

4. Calcula los siguientes límites (5 puntos)

$a.\ \lim_{x\to 3} \frac{x^2-5x+6}{x^2-6x+9}$ $\qquad$ $b. \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x}-1}{x}$ $\quad$ $c.\ \lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x^2-6x}{2x^2-x-5}\right)^{\frac{x^2}{x+1}}$ $d. \lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x^2+2}{x-8} - \frac{4x^2-5x}{3x-7}\right)$ $e. \lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{4x^2 - 2x + 3} - 2x\right)$

5. Tres parejas de una especie en peligro de extinción se introducen en un parque natural para intentar su recuperación. Los estudios indican que la población, n, aumentará de acuerdo con la función n(t) = 6 + $\frac{300t^2}{t^2+100}$ donde t es el tiempo en años.
   a. ¿Cuál es la población actualmente? ¿ Y dentro de 10 años?
   b. Cuando pase mucho tiempo, ¿Qué conclusiones se pueden deducir? (1 punto)

① (1) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{3x^2+1}{x+3} & \text{si } x<-2 \\ 4x-6 & \text{si } -2\le x\le 3 \\ \dfrac{2x+3}{x} & \text{si } x>3 \end{cases}$

Disc. en $x=-3$

Cont. por ser polinómica

cont pq $0 \notin$ Dom

En $x=-3$ Discontinuidad evitable porque $\nexists f(-3)$

En $x=-2$

$f(-2)=-8-6=-14$

$\lim_{x\to -2^-} \dfrac{3x^2+1}{x+3} = \dfrac{13}{1}=13$

$\neq$

$\lim_{x\to -2^+} 4x-6=-14$

Disc. inevitable de salto finito

En $x=3$

$f(3)=12-6=6$

$\lim_{x\to 3^-} 4x-6=6$

$\neq$

$\lim_{x\to 3^+} \dfrac{2x+3}{x}=3$

Disc. inev. de salto finito.

② (1) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x-b}{3x-1} & \text{si } x\le 0 \\ \dfrac{3x}{4x-2} & \text{si } 0<x<1 \\ \dfrac{x^2+a}{x+3} & \text{si } x\ge 1 \end{cases}$

Cont pq $1/3 \notin$ Dom

Disc en $x=\frac{1}{2}$ pq $\nexists f(\frac{1}{2})$

Cont pq $-3\notin$ Dom

En $x=0$

$f(0)=\dfrac{-b}{-1}=b$

$\lim_{x\to 0^-} \dfrac{2x-b}{3x-1}=b$

$\parallel \Rightarrow b=0$

$\lim_{x\to 0^+} \dfrac{3x}{4x-2}=0$

En $x=1$

$f(1)=\dfrac{1+a}{4}$

$\lim_{x\to 1^-} \dfrac{3x}{4x-2}=\dfrac{3}{2}$

$\parallel \Rightarrow \dfrac{3}{2}=\dfrac{1+a}{4}$

$\lim_{x\to 1^+} \dfrac{x^2+a}{x+3}=\dfrac{1+a}{4}$

$12=2+2a$

$10=2a \to a=5$

Si $a=5$, $b=0$ continua, excepto en $x=\frac{1}{2}$ Disc. evitable.

③ (2) a) $f(x)=\dfrac{5x^3+6x^2-2x}{2x^2-8}$

$2x^2-8=0 \to x^2=4 \to x=\pm 2$

AV $\lim_{x\to 2} \dfrac{5x^3+6x^2-2x}{2x^2-8}=\dfrac{60}{0}=\pm\infty \to \boxed{x=2}$

$\lim_{x\to -2} \dfrac{5x^3+6x^2-2x}{2x^2-8}=\dfrac{-12}{0}=\pm\infty \to \boxed{x=-2}$

AH $\lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{5x^3+6x^2-2x}{2x^2-8}=\pm\infty \to \nexists$ AH

AO $m=\lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{5x^3+6x^2-2x}{2x^3-8x}=\dfrac{5}{2}$

$n=\lim_{x\to\pm\infty}\left[\dfrac{5x^3+6x^2-2x}{2x^2-8}-\dfrac{5}{2}x\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\dfrac{\cancel{10x^3}+12x^2-4x-\cancel{10x^3}+40x}{4x^2-16}=$

$\boxed{y=\frac{5}{2}x+3}$

b) $f(x) = \dfrac{7x+3}{9x^2-4}$

$9x^2-4=0 \to x = \pm\frac{2}{3}$

AV $\lim_{x\to 2/3} \dfrac{7x+3}{9x^2-4} = \dfrac{23/3}{0} = \pm\infty \to \boxed{x=\frac{2}{3}}$

$\lim_{x\to -2/3} \dfrac{7x+3}{9x^2-4} = \dfrac{-7/3}{0} = \pm\infty \to \boxed{x=-\frac{2}{3}}$

AH $\lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{7x+3}{9x^2-4} = 0 \longrightarrow y=0$

AO no hay porque tiene AH

(4) a) $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2-6x+9} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 3} \dfrac{(x-2)\cancel{(x-3)}}{(x-3)^{\cancel{2}}} = \lim_{x\to 3} \dfrac{x-2}{x-3} = \dfrac{1}{0} = \begin{cases} \lim_{x\to 3^-} f = \frac{+}{-} = -\infty \\ \lim_{x\to 3^+} f = \frac{+}{+} = +\infty \end{cases}$ $\nexists$ lim

b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1-x}-1}{x} = \left[\dfrac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \dfrac{[\sqrt{1-x}-1][\sqrt{1-x}+1]}{x[\sqrt{1-x}+1]} = \lim_{x\to 0} \dfrac{\cancel{1}-x\cancel{-1}}{x[\sqrt{1-x}+1]} = \lim_{x\to 0} \dfrac{-\cancel{x}}{\cancel{x}(\sqrt{1-x}+1)}$

$= \lim_{x\to 0} \dfrac{-1}{\sqrt{1-x}+1} = -\dfrac{1}{2}$

c) $\lim_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x^2-6x}{2x^2-x-5}\right)^{\frac{x^2}{x+1}} = [1^\infty] = e^{\lim_{x\to\infty}\left[\frac{2x^2-6x}{2x^2-x-5}-1\right]\frac{x^2}{x+1}} =$

$= e^{\lim_{x\to\infty} \frac{-5x+5}{2x^2-x-5}\cdot\frac{x^2}{x+1}} = e^{-5/2}$

d) $\lim_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x^2+2}{x-8} - \dfrac{4x^2-5x}{3x-7}\right) [\infty-\infty] = \lim_{x\to\infty} \dfrac{6x^3-14x^2+6x-14-4x^3+32x^2+5x^2-40x}{3x^2-7x-24x+56} =$

$= \lim_{x\to\infty} \dfrac{2x^3+23x^2-36x-14}{3x^2-31x+56} = +\infty$

e) $\lim_{x\to\infty} (\sqrt{4x^2-2x+3} - 2x) = [\infty-\infty] = \lim_{x\to\infty} \dfrac{\cancel{4x^2}-2x+3-\cancel{4x^2}}{\sqrt{4x^2-2x+3}+2x} \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \dfrac{-2}{2+2} = -\dfrac{1}{2}$

(5) $n(t) = 6 + \dfrac{300t^2}{t^2+100}$

a) $n(0) = 6 + \dfrac{0}{100} = 6$

$n(10) = 6 + \dfrac{300\cdot 100}{100+100} = 6 + \dfrac{300\cancel{00}}{2\cancel{00}} = 6+150 = 156$

b) $\lim_{x\to+\infty} 6 + \dfrac{300t^2}{t^2+100} = 6+300 = 306$. Se estabiliza en 306