

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1:

BLOQUE OBLIGATORIO. Resuelve el siguiente ejercicio:

EJERCICIO 1. (2,5 puntos)

Juan ha gastado 80€ por la compra de un jersey, una camisa y un pantalón. Sabemos que el precio del jersey es un tercio del precio de la camisa y el pantalón juntos.

- a) [1,25 puntos] ¿Es posible determinar de forma única el precio del jersey? ¿Y el de la camisa? Razona la respuesta.
- b) [1,25 puntos] Si Juan hubiera esperado a las rebajas se habría gastado 57€, pues el jersey, la camisa y el pantalón tenían un descuento del 30%, del 40% y del 20%, respectivamente. Calcula el precio de cada prenda antes de las rebajas.

Solución:

- a) Llamamos “x”, “y” y “z” al precio de un jersey, una camisa y un pantalón.

Obtenemos las ecuaciones que podemos obtener de los datos del problema.

“Juan ha gastado 80€ por la compra de un jersey, una camisa y un pantalón” →

$$x + y + z = 80$$

“El precio del jersey es un tercio del precio de la camisa y el pantalón juntos” → $x = \frac{y+z}{3}$

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo intentamos resolver.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 80 \\ x = \frac{y+z}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 80 - x - z \\ 3x = y + z \end{array} \right\} \Rightarrow 3x = 80 - x - z + z \Rightarrow 4x = 80 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{80}{4} = 20 \Rightarrow y = 80 - 20 - z = 60 - z \Rightarrow \begin{cases} x = 20 \\ y = 60 - \lambda; 0 \leq \lambda \leq 60 \\ z = \lambda \end{cases}$$

Hemos obtenido el precio del jersey: 20 euros, pero del precio de la camisa y del pantalón solo sabemos que sus precios suman 60 €, por lo que no podemos determinar el precio de la camisa, solo que su precio está entre 0 y 60 euros.

- b) Obtenemos la nueva ecuación.

“Si Juan hubiera esperado a las rebajas se habría gastado 57€, pues el jersey, la camisa y el pantalón tenían un descuento del 30%, del 40% y del 20%, respectivamente” el descuento que hubiese obtenido en las rebajas es de $80 - 57 = 23$ euros → $0.3x + 0.4y + 0.2z = 23$.

Añadimos esta ecuación al sistema anterior y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} y = 80 - x - z \\ 3x = y + z \\ 0.3x + 0.4y + 0.2z = 23 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 80 - x - z \\ 3x = y + z \\ 3x + 4y + 2z = 230 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3x = 80 - x - z + z \\ 3x + 4(80 - x - z) + 2z = 230 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 4x = 80 \\ 3x + 320 - 4x - 4z + 2z = 230 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = \frac{80}{4} = 20 \\ -x - 2z = -90 \end{array} \right\} \Rightarrow -20 - 2z = -90 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 70 = 2z \Rightarrow z = \frac{70}{2} = 35 \Rightarrow y = 80 - 20 - 35 = 25$$

El jersey cuesta 20 €, la camisa cuesta 25 € y el pantalón 35 €.

El jersey cuesta 20 €, la camisa 25 € y el pantalón 35 €

Problema 2:

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 1. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 2. (2,5 puntos)

Sabiendo que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - ax + 2 - 2\cos(x)}{e^x - x\cos(x) - 1}$ es finito, calcula a y el valor del límite.

Solución:

Calculamos el límite indicado.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - ax + 2 - 2\cos(x)}{e^x - x\cos(x) - 1} &= \frac{\sin(0) - a \cdot 0 + 2 - 2\cos(0)}{e^0 - 0 \cdot \cos(0) - 1} = \frac{0}{0} = \\ &= \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - a + 2\sin(x)}{e^x - \cos(x) + x\sin(x)} = \\ &= \frac{\cos(0) - a + 2\sin(0)}{e^0 - \cos(0) + 0 \cdot \sin(0)} = \frac{1 - a}{1 - 1 + 0} = \frac{1 - a}{0} = \dots\end{aligned}$$

Para que este límite no valga ∞ debe ser el numerador igual a cero para que surja una indeterminación y sigamos con su cálculo. Es decir, debe ser $a = 1$. Seguimos con el cálculo del límite tomando $a = 1$.

$$\begin{aligned}\dots = \{a = 1\} &= \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin(x) + 2\cos(x)}{e^x + \sin(x) + \sin(x) + x\cos(x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin(x) + 2\cos(x)}{e^x + 2\sin(x) + x\cos(x)} = \frac{-\sin(0) + 2\cos(0)}{e^0 + 2\sin(0) + 0 \cdot \cos(0)} = \frac{2}{1 + 0 + 0} = \boxed{2}\end{aligned}$$

El valor de a necesario para que el límite sea finito es $a = 1$. Para este valor el límite vale 2.

Para que el límite sea finito a debe valer 1, y entonces el límite vale 2

Problema 3:

EJERCICIO 3. (2,5 puntos)

Sea la función $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = a + \frac{\ln(x)}{x^2}$.

- a) [1 punto] Calcula a para que $y = 1$ sea una asíntota horizontal de la gráfica de f .
- b) [1,5 puntos] Para $a = 0$, calcula los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f . Estudia y halla los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

Solución:

- a) Para que $y = 1$ sea una asíntota horizontal debe cumplirse $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$. Calculamos el límite.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} a + \frac{\ln(x)}{x^2} = a + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = a + \frac{\infty}{\infty} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \\ &= a + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = a + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x^2} = a + \frac{1}{\infty} = a\end{aligned}$$

Como este límite debe valer 1 entonces debe ser $a = 1$.

- b) Para $a = 0$ la función queda $f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}$. Buscamos los puntos críticos de la función.

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{\ln(x)}{x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - 2x \ln(x)}{x^4} = \frac{x - 2x \ln(x)}{x^4} = \frac{1 - 2 \ln(x)}{x^3} \\ f'(x) &= 0 \Rightarrow \frac{1 - 2 \ln(x)}{x^3} = 0 \Rightarrow 1 - 2 \ln(x) = 0 \Rightarrow 1 = 2 \ln(x) \Rightarrow \ln(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{x = e^{1/2}}\end{aligned}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de punto crítico $x = e^{1/2} = 1.65$.

- En el intervalo $(0, e^{1/2})$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = \frac{1 - 2 \ln(1)}{1^3} = 1 > 0$.

La función crece en $(0, e^{1/2})$.

- En el intervalo $(e^{1/2}, +\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale

$$f'(2) = \frac{1 - 2 \ln(2)}{2^3} = -0.024 < 0. \text{ La función decrece en } (e^{1/2}, +\infty).$$

La función crece en $(0, e^{1/2})$ y decrece en $(e^{1/2}, +\infty)$.

Con esta evolución de la función podemos decir que la función tiene un máximo relativo y

absoluto en $x = e^{1/2}$. Como $f(e^{1/2}) = \frac{\ln(e^{1/2})}{(e^{1/2})^2} = \frac{\frac{1}{2}}{e} = \frac{1}{2e}$ las coordenadas del máximo son

$$\left(\sqrt{e}, \frac{1}{2e} \right).$$

$a = 1$; La función crece en $(0, e^{1/2})$ y decrece en $(e^{1/2}, +\infty)$. Máximo: $(e^{1/2}, 1/2e)$

Problema 4:

[EJERCICIO 4. (2,5 puntos)] Responde con una de las siguientes opciones.

EJERCICIO 4. (2,5 puntos)

Sean los puntos $O(0, 0, 0)$, $A(0, 2, -2)$, $B(1, 2, m)$ y $C(2, 3, 2)$.

- a) [1,25 puntos] Halla los valores de m para que el tetraedro determinado por los puntos O , A , B y C tenga un volumen de 3 unidades cúbicas.
- b) [1,25 puntos] Para $m = 0$, calcula la distancia del punto O al plano que pasa por los puntos A , B y C .

Solución:

- a) Hallamos la expresión del volumen del tetraedro $OABC$.

$$\left. \begin{array}{l} O(0, 0, 0) \\ A(0, 2, -2) \\ B(1, 2, m) \\ C(2, 3, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{OA} = (0, 2, -2) \\ \overrightarrow{OB} = (1, 2, m) \\ \overrightarrow{OC} = (2, 3, 2) \end{array} \right. \Rightarrow \text{Volumen } OABC = \frac{[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}]}{6} =$$
$$= \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & m \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} |0 + 4m - 6 + 8 - 4 - 0| = \frac{|4m - 2|}{6}$$

Buscamos el valor de m para el que dicho volumen vale 3 unidades cúbicas.

$$\text{Volumen } OABC = 3 \Rightarrow \frac{|4m - 2|}{6} = 3 \Rightarrow \begin{cases} \frac{4m - 2}{6} = 3 \rightarrow 4m - 2 = 18 \rightarrow 4m = 20 \rightarrow \boxed{m = 5} \\ \frac{-4m + 2}{6} = 3 \rightarrow -4m + 2 = 18 \rightarrow -4m = 16 \rightarrow \boxed{m = -4} \end{cases}$$

Para $m = -4$ y $m = 5$ el tetraedro determinado por los puntos O , A , B y C tiene un volumen de 3 unidades cúbicas.

- b) Para $m = 0$ los puntos quedan $O(0, 0, 0)$, $A(0, 2, -2)$, $B(1, 2, 0)$ y $C(2, 3, 2)$.
Hallamos el plano π determinado por los puntos A , B y C .

$$\left. \begin{array}{l} A(0, 2, -2) \\ B(1, 2, 0) \\ C(2, 3, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{u} = \overrightarrow{AB} = (1, 2, 0) - (0, 2, -2) = (1, 0, 2) \\ \vec{v} = \overrightarrow{AC} = (2, 3, 2) - (0, 2, -2) = (2, 1, 4) \\ A(0, 2, -2) \in \pi \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x & y-2 & z+2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 4(y-2) + z+2 - 4(y-2) - 2x = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: -2x + z + 2 = 0}$$

Hallamos la distancia del punto $O(0, 0, 0)$ al plano $\pi: -2x + z + 2 = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} \pi: -2x + z + 2 = 0 \\ O(0, 0, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow d(O, \pi) = \frac{|-2 \cdot 0 + 0 + 2|}{\sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Para $m = 0$ la distancia del punto O al plano que pasa por los puntos A , B y C tiene un valor de $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ unidades.

Problema 5:

EJERCICIO 5. (2,5 puntos)

Considera el punto $P(1, 1, 1)$ y la recta $r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{2}$.

a) [1 punto] Halla el plano que pasa por el punto P y contiene a la recta r .

b) [1,5 puntos] Halla la recta que pasa por el punto P y corta perpendicularmente a la recta r .

Solución:

a) Hallamos un punto y un vector director de la recta.

$$r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{2} \Rightarrow \begin{cases} Q_r(1,2,3) \\ \vec{v}_r = (1,2,2) \end{cases}$$

El plano π que pasa por el punto P y contiene a la recta r tiene como vectores directores $\vec{v}_r(1,2,2)$ y $\overrightarrow{PQ_r}$.

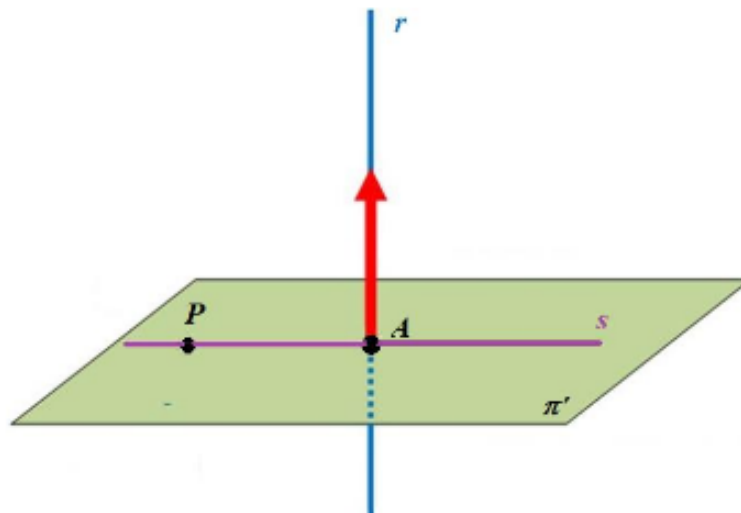
$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \vec{v}_r = (1,2,2) \\ \vec{v} = \overrightarrow{PQ_r} = (1,2,3) - (1,1,1) = (0,1,2) \\ P(1,1,1) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4(x-1) + z-1 - 2(y-1) - 2(x-1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x - 4 + z - 1 - 2y + 2 - 2x + 2 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi: 2x - 2y + z - 1 = 0}$$

El plano que pasa por el punto P y contiene la recta r tiene ecuación $\pi: 2x - 2y + z - 1 = 0$.

b) Seguimos los pasos del dibujo.



Hallamos el plano π' perpendicular a la recta r que pasa por P . Este plano tiene como vector normal el director de la recta.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n}' = \vec{v}_r = (1, 2, 2) \\ P(1, 1, 1) \in \pi' \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \pi': x + 2y + 2z + D = 0 \\ P(1, 1, 1) \in \pi' \end{array} \right\} \Rightarrow 1 + 2 + 2 + D = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D = -5 \Rightarrow \boxed{\pi': x + 2y + 2z - 5 = 0}$$

Hallamos el punto A de corte del plano $\pi': x + 2y + 2z - 5 = 0$ y la recta r .

$$\left. \begin{array}{l} \pi': x + 2y + 2z - 5 = 0 \\ r \equiv \left\{ \begin{array}{l} Q(1, 2, 3) \\ \vec{v}_r = (1, 2, 2) \end{array} \right\} \rightarrow r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + \alpha \\ y = 2 + 2\alpha \\ z = 3 + 2\alpha \end{array} \right\} \end{array} \right\} \Rightarrow 1 + \alpha + 2(2 + 2\alpha) + 2(3 + 2\alpha) - 5 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + \alpha + 4 + 4\alpha + 6 + 4\alpha - 5 = 0 \Rightarrow 9\alpha + 6 = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{-6}{9} = \frac{-2}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \\ y = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3} \\ z = 3 - \frac{4}{3} = \frac{5}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow A\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right)$$

La recta s que buscamos pasa por los puntos P y A.

$$\left. \begin{array}{l} A\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right) \in s \\ P(1, 1, 1) \in s \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AP} = (1, 1, 1) - \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-2}{3}\right) \\ P(1, 1, 1) \in s \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \vec{v}_s = 3\overrightarrow{AP} = 3\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{-2}{3}\right) = (2, 1, -2) \\ P(1, 1, 1) \in s \end{array} \right\} \Rightarrow s: \boxed{\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 - 2\lambda \end{cases}; \lambda \in \mathbb{R}}$$

La recta que pasa por el punto P y corta perpendicularmente a la recta r tiene ecuación

$$\text{paramétrica } s: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 - 2\lambda \end{cases}; \lambda \in \mathbb{R}.$$

Plano: $2x - 2y + z - 1 = 0$; Recta: $(x, y, z) = (1, 1, 1) + t(2, 1, -2)$

Problema 6:

BLOQUE CON OPTATIVIDAD 3. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 6. (2,5 puntos)

Halla la función $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ que pasa por los puntos $(2, e - 2 - 2\ln(2))$ y $(1, 0)$, y verifica que $f''(x) = e^{x-1} - \frac{1}{x}$.

Solución:

Integramos la derivada segunda para obtener la derivada primera de la función.

$$f'(x) = \int f''(x) dx = \int e^{x-1} - \frac{1}{x} dx = e^{x-1} - \ln x + A$$

Integramos la primera derivada para obtener la función (salvo dos parámetros a determinar).

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int e^{x-1} - \ln x + A dx = e^{x-1} - \int \ln x dx + Ax = \dots$$

$\int \ln x dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = \ln x \rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = dx \rightarrow v = \int dx = x \end{array} \right\} = x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x$

$$\dots = e^{x-1} - (x \ln x - x) + Ax = e^{x-1} - x \ln x + (A+1)x + B$$

Sabemos que la función tiene la expresión $f(x) = e^{x-1} - x \ln x + (A+1)x + B$, falta por determinar A y B.

Si la función pasa por los puntos $(2, e - 2 - 2\ln(2))$ y $(1, 0)$ se debe cumplir:

$$f(2) = e - 2 - 2\ln 2 \text{ y } f(1) = 0.$$

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = e^{x-1} - x \ln x + (A+1)x + B \\ f(2) = e - 2 - 2\ln 2 \\ f(1) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} e - 2 - 2\ln 2 = e^{2-1} - 2\ln 2 + (A+1)2 + B \\ 0 = e^{1-1} - \ln 1 + (A+1) + B \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} e - 2 - 2\ln 2 = e - 2\ln 2 + 2A + 2 + B \\ 0 = 1 - 0 + A + 1 + B \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -4 = 2A + B \\ 0 = A + 2 + B \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -4 - 2A = B \\ 0 = A + 2 + B \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 = A + 2 - 4 - 2A \Rightarrow 0 = -A - 2 \Rightarrow \boxed{A = -2} \Rightarrow \boxed{B = -4 - 2(-2) = 0}$$

Hemos obtenido que debe ser $A = -2$ y $B = 0$.

La función que cumple todo lo pedido es $f(x) = e^{x-1} - x \ln x - x$.

$$f(x) = e^{x-1} - x \ln x - x$$

Problema 7:

EJERCICIO 7. (2,5 puntos)

En la tabla siguiente se recoge el número de coches y motos que se presentaron a la ITV en el año 2023:

	Coches	Motos
Aptos	116.383	160.667
No aptos	2.679	3.447

Se elige un vehículo al azar de entre los coches y motos que se presentaron a dicha inspección.

- a) **[1,25 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que el vehículo elegido sea una moto o haya resultado apto?
- b) **[1,25 puntos]** Si el vehículo elegido es un coche, ¿cuál es la probabilidad de que haya resultado no apto?

Solución:

Completamos la tabla proporcionada añadiendo los totales.

	Coches	Motos	TOTALES
Aptos	116.383	160.667	277050
No aptos	2.679	3.447	6126
TOTALES	119062	164114	283176

- a) Acudieron a la ITV 164114 motos y resultaron aptos 116383 coches, por lo que la probabilidad de que el vehículo elegido sea una moto o haya resultado apto vale

$$\frac{164114+116383}{283176} = \frac{4921}{4968} = 0.9905.$$

- b) De los 119062 coches que acudieron a la ITV resultaron no aptos 2679, por lo que la probabilidad de que al elegir un coche este haya resultado no apto vale $\frac{2679}{119062} = 0.0225$.

$$P(\text{moto o apto}) = 0,9905; P(\text{no apto/coche}) = 0,0225$$