PAU 2025

Examen Matemáticas II

Soluciones

EJERCICIO 1. La concentración de virus activos en una muestra de sangre (en un tiempo t desde que se tomó la muestra) se puede modelizar como una función $f(t) = 5(t+1)e^{-t}$, con $t \geq 0$.

a) **[1,25 puntos]** La pendiente de la recta tangente a la gráfica de $f(t)$ mide cómo cambia la concentración de virus activos. Calcula el tiempo en el que este cambio toma el valor más pequeño posible, es decir, el tiempo t en el que el valor de la derivada de $f(t)$ es mínimo.

b) **[1,25 puntos]** ¿Cuál sería el valor de la concentración de virus a largo plazo? Es decir, el valor cuando el tiempo tiende a infinito: $\lim_{t\to+\infty} f(t)$.

a) El tiempo en el que es mínima la derivada de $f(t)$ es equivalente a la condición $f''(t) = 0$. Teniendo esto en cuenta

$$f(t) = 5(t+1)e^{-t}$$

$$f'(t) = 5e^{-t} - 5(t+1)e^{-t} = -5te^{-t}$$

$$f''(t) = -5e^{-t} + 5te^{-t} = 5(t-1)e^{-t} = 0$$

$$t - 1 = 0 \quad ; \quad e^{-t} = 0$$

La segunda condición no se cumple, ya que la exponencial es positiva siempre, y la primera tiene como solución $t = 1$. Podemos comprobar que es un mínimo si $f''(t)$ es negativa para valores menores de $t = 1$ y positiva para valores mayores.

$$f''(0) = -5e^0 = -5 < 0 \ ; \ f''(2) = 5e^{-2} > 0$$

b)

$$\lim_{x\to+\infty} 5(t+1)e^{-t} = [\infty \cdot 0]^{IND} = \lim_{x\to+\infty} \frac{5(t+1)}{e^t} = \left[\frac{0}{0}\right]^{IND}$$

Para resolver la indeterminación utilizamos la Regla de L'Hôpital*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{5(t+1)}{e^t} = \lim_{x\to+\infty} \frac{5}{e^t} = 0$$

EJERCICIO 2. Elige y resuelve **solo uno** de los dos apartados siguientes:

Apartado a) Sean las rectas $r_1 \equiv \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{1}$ y $r_2 \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-1}$.

a.1) **[1,25 puntos]** Determina la ecuación de la recta, r_3, cuyo vector director es perpendicular a los vectores directores de las rectas r_1 y r_2 y que pasa por el punto $A(0,0,0)$.

a.2) **[1,25 puntos]** Calcula la distancia de la recta r_2 al punto $B(-1,-1,2)$.

a.1) Si la recta que buscamos es perpendicular a los vectores de las rectas directoras, se puede obtener como producto vectorial de estos. Y sabiendo que pasa por el punto A ya podemos escribir las ecuaciones de r_3 :

$$v_{r1} = (1,-1,1) \ ; \quad v_{r2} = (2,1,-1) \ ; \quad P_r = A(0,0,0)$$

$$v_{r3} = v_{r1} \times v_{r2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (0,3,3) \rightarrow \ v_{r3} = (0,1,1)$$

$$r_3 \equiv \begin{cases} x = 0^* \\ \frac{y}{1} = \frac{z}{1} \end{cases} \rightarrow \quad \begin{matrix} x = 0 \\ y - z = 0 \end{matrix}$$

* Recordemos que cuando una de las componentes de un vector es nula, no podemos escribir la ecuación continua de esa componente, en su lugar se escribe $x = x_0$

a.2) Para calcular la distancia de un punto a una recta hacemos uso de la relación siguiente:

$$d(B, r_2) = \frac{|BP_r \times v_{r2}|}{|v_{r2}|}$$

Donde BP_r denota un vector desde el punto B hasta un punto de la recta r_2 , P_{r2}.

$$P_{r2}(1,1,1) \ ; \quad B(-1,-1,2) \ ; \ v_{r2} = (2,1,-1)$$

$$BP_r = P_r - B = (2,2,-1)$$

$$BP_r \times v_{r2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1,0,-2) \ ; \ |BP_r \times v_{r2}| = \sqrt{5}$$

$$|v_{r2}| = \sqrt{6}$$

$$(B, r_2) = \frac{|BP_r \times v_{r2}|}{|v_{r2}|} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{30}}{6} \ u$$

Apartado b) Sea la recta $r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{2}$ y el plano $\pi \equiv x - y + 3z = 0$.

b.1) **[1,25 puntos]** Determina la ecuación del plano que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π.

b.2) **[1,25 puntos]** Calcula el ángulo entre la recta r y el plano π teniendo en cuenta que se cortan en el punto $A(0,0,0)$.

b.1) Si contiene a la recta y es perpendicular al plano es equivalente a afirmar que tanto el vector director de la recta como el normal del primer plano, forman parte del nuestro plano. Por ello el vector normal de nuestro plano se puede obtener como producto vectorial de los mencionados. Como además contiene a cualquier punto de la recta, ya tenemos lo necesario para obtener las ecuaciones del plano.

$$v_r = (1,-1,2) \;;\quad n_\pi = (1,-1,3) \;;\quad P_{\pi 2} = P_r(0,0,0)$$

$$n_{\pi 2} = v_r \times n_\pi = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = (-1,-1,0)$$

$$-x - y = 0$$

b.2) El ángulo que forman una recta y un plano es complementario (entre los dos suman 90º) con el ángulo que forma con su vector normal. Teniendo esto en cuenta, podemos sustituir el seno por el coseno en la formula de calculo de ángulos que solemos usar y calcular con normalidad.

$$v_r = (1,-1,2); \;\; |v_r| = \sqrt{6} \;\;;\;\; n_\pi = (1,-1,3) \;;\;\; |n_\pi| = \sqrt{11}$$

$$\sin\alpha = \frac{v_r \cdot n_\pi}{|v_r||n_\pi|} = \frac{1+1+6}{\sqrt{6}\sqrt{11}} \approx 0{,}985$$

$$\alpha = \sin^{-1} 0{,}985 \approx 79{,}98º$$

EJERCICIO 3.	Elige y resuelve **solo uno** de los dos apartados siguientes.	
Apartado a)	Considera el siguiente sistema de ecuaciones, donde $a \in \mathbb{R}$: $\begin{cases} x + y + a \cdot z = 1 \\ x \quad\quad - 2z = a. \\ 2x + y + \quad z = 3 \end{cases}$	

a.1) **[1'5 puntos]** Discute el sistema de ecuaciones según los valores de a, e identifica el número de soluciones en cada caso.

a.2) **[1 punto]** Resuelve, razonadamente, el sistema de ecuaciones para $a = 0$.

a.1) Pasando el sistema a su forma matricial hacemos hacemos uso del Teorema de Rouché-Fröbenius (R-F) y del determinante de la matriz para clasificar el sistema.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 0 & -2 & a \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Comenzamos por realizar el determinante de la matriz principal, comprobando para que valores su determinante es nulo.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a - 3 = 0 \rightarrow \quad a = 3$$

Para cualquier tal que $a \neq 3$ el determinante de la matriz principal es distinto de cero, lo que indica que su rango es máximo e igual al de la ampliada y al número de incógnitas → SCD : 1 solución. (R-F).

Para el caso $a = 3$ la matriz principal tiene rango dos (se observa que hay muchos menores de orden dos distintos de cero) y debemos calcular el de la ampliada, por ejemplo, sustituyendo la tercera columna por la cuarta.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Lo que nos indica que el rango de la ampliada es tres, distinto que el de la principal → SI: 0 soluciones (R-F).

a.2) Para $a = 0$ el sistema es CD, con solución única, y podemos realizarlo por distintos métodos. En este caso lo realizaremos por sustitución. De la primera y segunda ecuación, sustituyendo en la tercera.

$$y = 1 - x \ ; \quad z = x/2$$

$$2x + (1 - x) + \frac{x}{2} = 3 \rightarrow x = 4/3$$

$$y = -1/3 \quad ; \quad z = 2/3$$

Apartado b) Sea el sistema de ecuaciones $A \cdot X - B = X$, con $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & m \end{pmatrix}$, tal que $m \in \mathbb{R}$, y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Además, la matriz X es de dimensión 2×2.

b.1) **[1,5 puntos]** ¿Para qué valores del parámetro m el sistema anterior tiene solución única?

b.2) **[1 punto]** Para $m = 1$, resuelve el sistema y obtén el valor de X.

b.1) Comenzamos por despejar la X de la ecuación.

$$AX - B = X$$

$$AX - X = B\ ; \quad (A - I)X = B$$

$$X = (A - I)^{-1}B$$

Para que la solución sea única es condición necesaria y suficiente que la inversa de esta relación exista, lo que se garantiza si su determinante es distinto de cero.

$$A - I = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & m \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & m-1 \end{pmatrix}$$

$$|A - I| = m - 2 = 0$$

Luego, para cualquier valor tal que $m \neq 2$, el sistema posee solución única, para el cual también posee inversa esta matriz.

b.2) Para el caso $m = 1$, calcularemos la inversa de la matriz mediante los adjuntos, con la siguiente relación:

$$(A - I)^{-1} = \frac{adj(A - I)^T}{|A - I|}$$

$$adj(A - I)^T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\ ;\ |A - I| = -1$$

$$(A - I)^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Ahora basta con multiplicar por B esta matriz y obtener el resultado.

$$X = (A - I)^{-1}B$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Que en este caso coincide con la matriz identidad.

EJERCICIO 4. Elige y resuelve **solo uno** de los dos apartados siguientes:

Apartado a) Una baraja española está compuesta de 40 cartas, entre las que hay 4 ases. En un juego de azar dos jugadores compiten entre sí. El primer jugador baraja las cartas y las va sacando una a una hasta que encuentra un as. A continuación, el otro jugador vuelve a juntar todas las cartas y repite estos pasos (es decir, vuelve a barajar y va sacando cartas hasta encontrar un as). Gana el jugador que más cartas haya sacado (contando el as). Si ambos sacan el mismo número de cartas, entonces se produce un empate.

a.1) [**1,5 puntos**] Calcula las probabilidades de que el as salga al sacar 1, 2 y 3 cartas, respectivamente.

a.2) [**1 punto**] Si el primer jugador ha sacado dos cartas (contando el as), ¿cuál es la probabilidad de que el segundo jugador le gane?

a.1) La probabilidad de que el as salga en el primer intento es inmediato, mediante la regla de Laplace para 4 ases en una baraja de 40 cartas:

$$P(As\ 1º) = \frac{4}{10} = 0{,}1$$

Si el as sale en el segundo intento es porque no ha salido en el primero, por lo que se puede escribir como:

$$P(\overline{As}\ 1º \cap As\ 2º) = \frac{36}{40} \cdot \frac{4}{39} \approx 0{,}092$$

El segundo término se corresponde a sacar una carta de la baraja “condicionada”, que ya no tiene 40 cartas sino 39, pero todavía posee 4 ases.

Si sale el as en el tercer intento, solo tenemos que repetir el proceso, teniendo en cuenta el número de cartas que quedan después de cada intento.

$$P(\overline{As}\ 1º \cap \overline{As}\ 2º \cap As\ 3º) = \frac{36}{40} \cdot \frac{35}{39} \cdot \frac{4}{38} \approx 0{,}085$$

a.2) Para que el segundo jugador gane, es necesario que saque el as en más de dos intentos, que modificamos para poder calcular con los datos del apartado anterior.

$$P(Ganar) = P(sacar\ as > 2º) = 1 - P(sacar\ el\ as \leq 2) =$$

$$= 1 - (\ P(As\ 1º) +\ P(\overline{As}\ 1º \cap As\ 2º)) =\ 1 - 0{,}1\ - 0{,}092$$

$$P(Ganar) \approx 0{,}808$$

Apartado b) Una empresa produce aparatos para medir distancias. Durante el proceso de calibración realiza una serie de experimentos para medir la distancia entre dos puntos, que están separados 1.5 metros entre sí. Debido al error de los aparatos, se sabe que los valores medidos siguen una distribución normal de media 1.5 m y varianza 0.64 m^2.

b.1) **[0,75 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que la medición del aparato sea de más de 2.1 m?

b.2) **[0,75 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de la que medición del aparato sea superior a 0.9 m?

b.3) **[1 punto]** ¿Cuál es el valor de la distancia tal que el 80.51% de las mediciones estarían por encima de él?

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.50	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.60	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.70	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.80	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.90	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.00	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.10	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.20	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.30	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177

b.1) La distancia se puede expresar como una distribución normal, que cumple: $X \sim N\left(\mu = 1{,}5\,, \sigma = \sqrt{0{,}64} = 0{,}8\right)$. En este apartado nos piden:

$$P(X \geq 2{,}1) = P(Z \geq 0{,}75) = 1 - P(Z < 0{,}75)$$

Donde hemos realizado la tipificación de la variable dada por la fórmula:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

A continuación, buscamos en la tabla el valor de z, lo que nos deja:

$$P(X \geq 2{,}1) = P(Z \geq 0{,}75) = 1 - P(Z < 0{,}75) = 1 - 0{,}7734 = 0{,}2266$$

b.2) En este caso, repetimos el proceso anterior:

$$P(X \geq 2{,}1) = P(Z \geq -0{,}75) = P(Z < 0{,}75) = 0{,}7734$$

b.3) Este es un problema de inverso, en el que debemos hallar un x* que cumpla lo siguiente.

$$P(X \geq x^{*}) = P(Z \geq x^{*}) = 1 - P(Z < z^{*}) = 0{,}8051$$

$$P(Z < z^{*}) = 0{,}1949$$

Como este valor es menor que 0,5 debemos buscar el valor inicial y cambiarle el signo al z* encontrado en la tabla. Finalmente, destipificamos la variable y obtenemos:

$$z^{*} = -0{,}86 \rightarrow \;\; x^{*} = -0{,}86 \cdot 0{,}8 + 1{,}50 = 0{,}812$$