

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente a una pregunta en cada uno de los **cuatro** bloques, tres de ellos con optatividad y uno sin optatividad. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**

CALIFICACIÓN: Cada bloque se calificará sobre 2.5 puntos.

TIEMPO: 90 minutos.

Bloque 1. (Calificación máxima: 2.5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

Pregunta 1.1. (2.5 puntos) En el baloncesto existen canastas que valen un punto, otras que valen dos y otras que valen tres puntos. Calcule el número de lanzamientos de uno, de dos y de tres puntos que realizó un equipo en un partido sabiendo que:

- El equipo anotó 80 puntos con un acierto del 80% en tiros de uno, del 50% en tiros de dos y del 40% en tiros de tres.
- La tercera parte del número de lanzamientos de dos fue igual a la quinta parte del resto de lanzamientos.
- El doble del número de lanzamientos de tres es menor en cinco unidades al resto de lanzamientos.

Pregunta 1.2. Sean la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ e I la matriz identidad de orden 3. Se pide:

a) (1.25 puntos) Calcular el polinomio $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ y hallar las raíces reales del polinomio.

b) (1.25 puntos) Para $\lambda = 5$, calcular un vector no nulo $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ que satisfaga que $(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$.

Bloque 2. (Calificación: 2.5 puntos) Responda a la pregunta siguiente:

Pregunta 2. Un muro rectangular de la biblioteca pública del barrio se va a pintar con la ayuda de unos grafiteros. La dimensión del muro es de 3 metros de alto y 12 metros de largo. Colocando la esquina inferior izquierda del muro en el origen de coordenadas, se va a utilizar la curva $f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{9}\right) + 2$ para diferenciar dos regiones del muro que serán pintadas con dos colores distintos. Se sabe que con un bote de spray se pueden pintar 3 metros cuadrados de superficie.

- (0.75 puntos) Halle el valor máximo y el valor mínimo de la función $f(x)$ en el intervalo $[0, 12]$. ¿Está la curva en este intervalo $[0, 12]$ contenida completamente en el muro?
- (1.25 puntos) Halle el área que tienen que pintar de cada color.
- (0.5 puntos) ¿Cuántos botes de spray se tienen que comprar como mínimo para pintar toda el área bajo la curva $f(x)$?

Bloque 3. (Calificación máxima: 2.5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

Pregunta 3.1. Dados la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{0} = \frac{z-2}{1}$ y el plano $\pi: x + 2y - 3z = 1$, se pide:

- a) (0.75 puntos) Hallar una ecuación del plano que contiene a r y es perpendicular a π .
- b) (0.75 puntos) Hallar una ecuación de la recta contenida en π que corta perpendicularmente a r .
- c) (1 punto) Calcular los puntos de la recta r cuya distancia al plano π es $\sqrt{14}$.

Pregunta 3.2. Sean el punto $P(0, 1, 1)$ y el plano $\pi: x + y = 2$. Se pide:

- a) (0.5 puntos) Hallar la distancia del punto P al plano π .
- b) (1 punto) Determinar el punto Q del plano π cuya distancia a P es igual que la distancia de P a π .
- c) (1 punto) Hallar el área del triángulo formado por P y los puntos de corte del plano π con los ejes coordenados.

Bloque 4. (Calificación máxima: 2.5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:

Pregunta 4.1. Sea $E = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$ un espacio muestral y P una medida de probabilidad en E definida por: $P(7) = P(3) = \frac{1}{4}$ y con el resto de sucesos elementales equiprobables.

Se consideran los sucesos $A = \{7, 11, 13, 19\}$, $B = \{2, 5, 7, 13, 17\}$ y $C = \{3, 5, 7, 11, 13\}$. Se pide calcular:

- a) (1.25 puntos) $P\left(\overline{(A - C)} \cap B\right)$.
- b) (1.25 puntos) $P\left((A \cap B) \mid \overline{C}\right)$.

Pregunta 4.2. Entre los ciudadanos de 14 años o más de cierto país, el 20% de la población tiene entre 14 y 24 años, el 50% entre 25 y 64 y el resto más de 64 años. Según datos recogidos por el ministerio de cultura de ese país, el 74% de sus ciudadanos de entre 14 y 24 es lector habitual, mientras que el porcentaje decrece hasta el 65.8% entre los de 25 a 64 y al 53.7% entre los mayores de 64. Elegido un ciudadano al azar del país en cuestión de 14 años o más, se pide:

- a) (1.25 puntos) Calcular la probabilidad de que sea lector habitual.
- b) (1.25 puntos) Si no es lector habitual, calcular la probabilidad de que tenga entre 25 y 64 años.

Bloque 1

1.1
$$\left. \begin{array}{l} X = \text{n}^\circ \text{ de lanzamientos de un punto} \\ Y = \text{" " " " dos puntos} \\ Z = \text{" " " " tres puntos} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \frac{80}{100}X + \frac{50}{100} \cdot 2Y + \frac{40}{100} \cdot 3Z = 80 \\ \frac{1}{3}Y = \frac{1}{5}(X+Z) \\ 2Z = X+Y-5 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 8X + 10Y + 12Z = 800 \\ -3X + 5Y - 3Z = 0 \\ X + Y - 2Z = 5 \end{cases}$$

Lo resolvemos por Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 5 \\ -3 & 5 & -3 & 0 \\ 8 & 10 & 12 & 800 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{3F_1 + F_2 \\ -8F_1 + F_3}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 8 & -9 & 15 \\ 0 & 2 & 28 & 760 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 - 4F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 8 & -9 & 15 \\ 0 & 0 & -121 & -3025 \end{array} \right) \begin{matrix} [1] \\ [2] \\ [3] \end{matrix}$$

De [3]: $Z = \frac{-3025}{-121} = 25$

Sustituimos en [2]: $Y = \frac{15 + 9 \cdot 25}{8} = 30$

Sustituimos en [1]: $X = 5 - 30 + 2 \cdot 25 = 25$

Solución: el equipo realizó 25 lanzamientos de 1 punto, 30 lanzamientos de 2 puntos y 25 lanzamientos de 3 puntos.

1.2 $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

3) $P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (4-\lambda)(3-\lambda)(2-\lambda) - 2(2-\lambda) = -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 24\lambda + 20$

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-\lambda & 1 & 0 \\ 2 & 3-\lambda & 0 \\ 3 & 2 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

Aplicamos Ruffini para obtener las raíces:

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 9 & -24 & 20 \\ 2 & & -2 & 14 & -20 \\ -1 & & 7 & -10 & 0 \\ 2 & & -2 & 10 & \\ -1 & & 5 & 0 & \end{array}$$

$$P(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 2)(-\lambda + 5)$$

Las raíces de $P(\lambda)$ son: 2 (doble) y 5

b) $\lambda = 5$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ tal que $(A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$

Calculamos $A - 5I$

$$A - 5I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Resolvemos el sistema $(A - 5I)\vec{v} = \vec{0}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x + y = 0 \\ 2x - 2y = 0 \\ 3x + 2y - 3z = 0 \end{cases} \text{Iguals}$$

Llamamos $z = \mu \in \mathbb{R}$ y resolvemos el sistema

$$\begin{cases} -x + y = 0 \longrightarrow x = y \\ 3x + 2y - 3\mu = 0 \end{cases}$$

$$3x + 2x = 3\mu$$

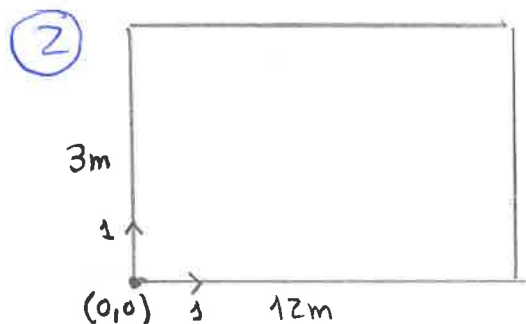
$$5x = 3\mu \Rightarrow x = \frac{5}{3}\mu = y$$

Todas las soluciones del sistema son:

$$(x, y, z) = \left(\frac{5}{3}\mu, \frac{5}{3}\mu, \mu\right) \text{ con } \mu \in \mathbb{R}$$

Como nos piden una, tomamos $\mu = 3$: $\Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

Bloque 2



a) $f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{9}\right) + 2$

Con 1 bote se pueden pintar 3 m^2

Optimizamos $f(x)$:

$$f'(x) = -\sin\left(\frac{\pi x}{9}\right) \cdot \frac{\pi}{9}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi x}{9}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\pi x}{9} = \begin{cases} 0 \Rightarrow x = 0 \\ \pi \Rightarrow x = 9 \\ 2\pi \Rightarrow x = 18 \end{cases} \text{ No vale, ya que } 18 \notin [0, 12]$$

$$f''(x) = -\cos\left(\frac{\pi x}{9}\right) \cdot \left(\frac{\pi}{9}\right)^2$$

$$f''(0) = -\frac{\pi^2}{81} < 0 \Rightarrow x = 0 \text{ es un m\u00e1x. relativo de } f(x) \text{ de}$$

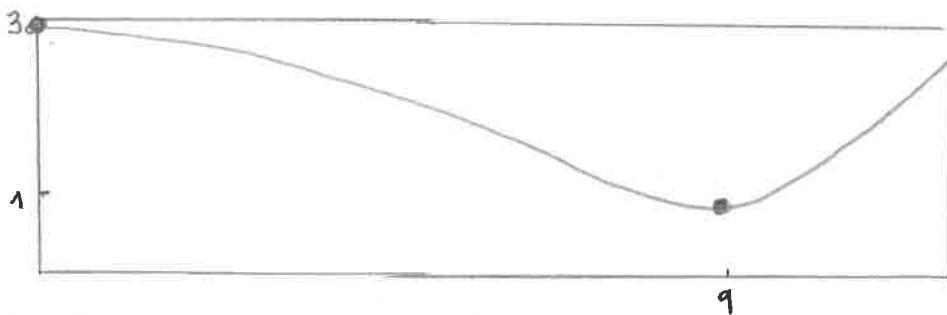
coordenadas $(0, f(0)) = (0, 3)$

$f''(9) = \frac{\pi^2}{81} > 0 \Rightarrow x=9$ es un mínimo relativo de $f(x)$ de coordenadas

$$(9, f(9)) = (9, 1)$$

Solución: $f(x)$ tiene un máximo relativo en $(0, 3)$ y un mínimo relativo en $(9, 1)$

¿La curva está completamente contenida en el muro?



Solución: Sí, la curva está completamente contenida en el muro

b) Área que hay que pintar de cada color:

$$\begin{aligned} \text{Área bajo la curva} &= A = \int_0^{12} f(x) dx = \int_0^{12} \left(\cos\left(\frac{\pi x}{9}\right) + 2 \right) dx = \\ &= \frac{9}{\pi} \sin\left(\frac{\pi x}{9}\right) + 2x \Big|_0^{12} = \frac{9}{\pi} \sin\left(\frac{12\pi}{9}\right) + 24 - 0 = 24 - \frac{9\sqrt{3}}{2\pi} \approx 21,52 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

Solución: parte inferior: $21,52 \text{ m}^2$
parte superior: $3 \cdot 12 - 21,52 = 14,48 \text{ m}^2$

c) N° de botes	1	x
Área (m^2)	3	21,52

D.P. $x = \frac{21,52}{3} \approx 7,17$

Solución: para pintar toda el área bajo la curva tienen que comprar 8 botes de pintura

Bloque 3

(3.1) $\Gamma \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{0} = \frac{z-2}{1}$, $\Pi \equiv x+2y-3z=1$

a) ¿ Π' (plano) tal que $\begin{cases} \Gamma \subset \Pi' \\ \Pi \perp \Pi' \end{cases}$?

$\pi' \equiv \{P_r, \vec{u}_r, \vec{n}_\pi\}$ donde $P_r(2,0,2)$, $\vec{u}_r=(2,0,1)$ y $\vec{n}_\pi=(1,2,-3)$

$$\pi' \equiv \det \begin{pmatrix} x-1 & 2 & 1 \\ y & 0 & 2 \\ z-2 & 1 & -3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{\pi' \equiv -2x + 7y + 4z - 6 = 0}$$

b) ¿s(recta) tal que $\begin{cases} s \subset \pi \\ s \perp r \end{cases}$?

$$\begin{aligned} \bullet s \subset \pi &\Rightarrow \vec{u}_s \perp \vec{n}_\pi \\ \bullet s \perp r &\Rightarrow \vec{u}_s \perp \vec{u}_r \end{aligned} \Rightarrow \vec{u}_s = \vec{n}_\pi \times \vec{u}_r = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (2, -7, -4)$$

La recta s está determinada por: $s \equiv \{Q, \vec{u}_s\}$ donde $Q = r \cap \pi$

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{0} = \frac{z-2}{1} \equiv \begin{cases} x = 1+2\lambda \\ y = 0 \\ z = 2+\lambda \end{cases} \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}$$

Sustituimos las ecuaciones de r en la ec. de π :

$$1+2\lambda+2\cdot 0-3(2+\lambda)=1 \Rightarrow \lambda = -6$$

Punto de intersección

$$\begin{cases} x = 1+2\cdot(-6) = -11 \\ y = 0 \\ z = 2+(-6) = -4 \end{cases} \Rightarrow Q(-11, 0, -4)$$

$$\boxed{\text{Solución: } s \equiv \begin{cases} x = -11+2\mu \\ y = -7\mu \\ z = -4-4\mu \end{cases} \text{ con } \mu \in \mathbb{R} \equiv \frac{x+11}{2} = \frac{y}{-7} = \frac{z+4}{-4}}$$

c) ¿ $P \in r$ tales que $d(P, \pi) = \sqrt{14}$?

Tomamos un punto genérico de la recta r: $P(1+2\lambda, 0, 2+\lambda)$

Sabemos que $d(P, \pi) = \frac{|AP_1 + AP_2 + AP_3 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ donde $P(P_1, P_2, P_3)$
 $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$

En nuestro caso:

$$\sqrt{14} = \frac{|1+2\lambda+2\cdot 0-3(2+\lambda)-1|}{\sqrt{1^2+2^2+(-3)^2}} = \frac{|-\lambda-6|}{\sqrt{14}} \Rightarrow |-\lambda-6| = 14 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\lambda-6 = 14 \Rightarrow \lambda = -20 \Rightarrow P_1(-39, 0, -18) \\ -\lambda-6 = -14 \Rightarrow \lambda = 8 \Rightarrow P_2(17, 0, 10) \end{cases} \text{ (Sustituyendo } \lambda \text{ en } P)$$

Solución: los puntos de r cuya distancia a π es $\sqrt{14}$ son $P_1(-39, 0, -18)$ y $P_2(17, 0, 10)$

3.2 $P(0, 1, 1)$, $\pi \equiv x + y = 2$

a) $d(P, \pi) = \frac{|0+1-2|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} u$

b) ¿ $Q \in \pi$ tal que $d(P, Q) = d(P, \pi)$?

Dicho punto es el punto de intersección de $t \equiv \{P, \vec{u}_t = \vec{n}_\pi\}$ y el plano π :

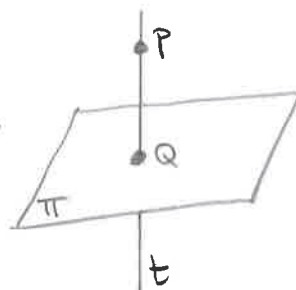
$$t \equiv \begin{cases} x = \alpha \\ y = 1 + \alpha \\ z = 1 \end{cases} \text{ con } \alpha \in \mathbb{R}$$

Sustituimos las ecs. de t en la ecuación de π :

$$\alpha + 1 + \alpha = 2 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}$$

El punto es:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow Q\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 1\right)$$



c) Área del triángulo formado por P y los puntos de corte de π con los ejes coordenados.

Corte con OX : $\begin{cases} y = z = 0 \\ x + y = 2 \end{cases} \Rightarrow A(2, 0, 0)$

Corte con OY : $\begin{cases} x = z = 0 \\ x + y = 2 \end{cases} \Rightarrow B(0, 2, 0)$

Corte con OZ : $\begin{cases} x = y = 0 \\ x + y = 2 \end{cases} \Rightarrow 0 = 2$ Imposible (Normal, porque si no, no tendríamos un triángulo)

$$\text{Área}_{\text{Triángulo } P, A, B} = \frac{1}{2} |\vec{PA} \times \vec{PB}| = \frac{1}{2} \sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{3} u^2$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{PA} &= (2, 0, 0) - (0, 1, 1) = (2, -1, -1) \\ \vec{PB} &= (0, 2, 0) - (0, 1, 1) = (0, 1, -1) \end{aligned} \right\} \vec{PA} \times \vec{PB} = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = (2, 2, 2)$$

Bloque 4

4.1 $E = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$ espacio muestral

P = medida de probabilidad en E

$$P(7) = P(3) = \frac{1}{4}, P(2) = P(5) = P(11) = P(13) = P(17) = P(19)$$

Antes de empezar con los apartados que nos piden, vamos a calcular las probabilidades de los sucesos que faltan:

- la suma de todas las probabilidades de E es 1, luego si $P(2) = x$

$$6x + 2 \cdot \frac{1}{4} = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{12}$$

- $A = \{7, 11, 13, 19\}$, $B = \{2, 5, 7, 13, 17\}$, $C = \{3, 5, 7, 11, 13\}$

$$a) \overline{A-C} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17\}$$

↑

$$A-C = A \cap \overline{C} = \{19\} \text{ ya que } \overline{C} = \{2, 17, 19\}$$

$$(\overline{A-C}) \cap B = \{2, 5, 7, 13, 17\}$$

$$P[(\overline{A-C}) \cap B] = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{7}{12}$$

$$b) A \cap B = \{7, 13\}$$

$$P(A \cap B / \overline{C}) = \frac{P(A \cap B \cap \overline{C})}{P(\overline{C})} = 0$$

$$A \cap B \cap \overline{C} = \emptyset$$

4.2 A = población entre 14 y 24 años, $P(A) = 0,2$

B = " entre 24 y 64 años, $P(B) = 0,5$

C = " de más de 64 años, $P(C) = 0,3$

L = ciudadanos que es lector habitual

$$a) P(L) = P(A)P(L/A) + P(B)P(L/B) + P(C)P(L/C) = 0,2 \cdot 0,74 + 0,5 \cdot 0,658 + 0,3 \cdot 0,537 = 0,6381$$

$$b) \boxed{P(B/\bar{L}) = \frac{P(B \cap \bar{L})}{P(\bar{L})} = \frac{0,5 \cdot 0,342}{1 - 0,6381} = \frac{1710}{3619} \approx 0,4725}$$

