

1. Halla las siguientes derivadas **usando la definición del límite**:

a) Calcula $f'(1)$ si $f(x) = -x^2 + 3x + 5$	b) Calcula $f'(-1)$ si $f(x) = \frac{3x-2}{6}$
--	--

2. Halla la función derivada **usando la definición del límite**:

a) $f(x) = \frac{x-1}{x}$	b) $f(x) = x^2 + 7x - 1$
---------------------------	--------------------------

3. Halla la función derivada usando las reglas de derivación y simplifica si es posible:

01) $f(x) = -x^2 + 3x + 5$	02) $f(x) = 5x^3 + 7x$	03) $f(x) = x - 3x^4$
04) $f(x) = \frac{1}{3x}$	05) $f(x) = -\frac{1}{x^2}$	06) $f(x) = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x$
07) $f(x) = (5-x)^2$	08) $f(x) = 1 - (x-2)^2$	09) $f(x) = (x+1)^3 - 2x^2$
10) $f(x) = \frac{\sqrt{x+3}}{x}$	11) $f(x) = \frac{3x-5}{\sqrt{x^2+1}}$	12) $f(x) = \frac{100x}{\sqrt[3]{x^2}}$
13) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-4} + x}{2x+3}$	14) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-4} - x}{2x+3}$	15) $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x^3}}{5x}$
16) $f(x) = \log(x-3)$	17) $f(x) = 2^{x+3}$	18) $f(x) = 1,5^x - 1$
19) $f(x) = e^x - x$	20) $f(x) = 2^x - x^2$	21) $f(x) = x^3 - \log_3 x^2$
22) $f(x) = \frac{3^x}{\ln x}$	23) $f(x) = \frac{x^3}{3^x}$	24) $f(x) = \frac{\sqrt{x^3-1}}{e^x}$
25) $f(x) = \sqrt[3]{x^2-2x+1}$	26) $f(x) = \left(\cos \frac{x}{3} - 3 \operatorname{tg} x\right)$	27) $f(x) = \log_2 \left(\frac{3x-5}{4-x}\right)$
28) $f(x) = e^{2x-1}$	29) $f(x) = \frac{\sqrt{x-1} + x}{x}$	30) $f(x) = (x^2-1) \cdot e^{\cos(\pi x)}$
31) $f(x) = \sqrt{3} \operatorname{arcsen}(2x)$	32) $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{2}$	33) $f(x) = \operatorname{tg}^3 x^2$
34) $f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x^2-4}}$	35) $f(x) = \cos\left(\frac{3x+\pi}{2}\right) + \operatorname{tg}^2 x$	36) $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$
37) $f(x) = \ln(xe^{-x})$	38) $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$	39) $f(x) = e^{\operatorname{sen} x} + e^{\cos x}$

4. Halla las ecuaciones de las rectas tangente y normal en cada uno de los siguientes casos:

a) $f(x) = \sqrt{x+1}$ para $x = 0$	b) $f(x) = \ln x$ para $x = e$
c) $f(x) = \frac{2x^2}{x^2+1}$ para $x = -1$	d) $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$ para $x = 1$

5. Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos de las siguientes funciones:

01) $f(x) = x^2 - 8x + 3$	02) $f(x) = \frac{x^3}{3} - 3x^2$	03) $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$
04) $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$	05) $f(x) = -\frac{1}{x^2}$	06) $f(x) = (5-x)^2$
07) $f(x) = (x^2 - 3x + 1)e^x$	08) $f(x) = \frac{x^2}{e^x}$	09) $f(x) = x \ln x$

6. Determina la parábola $y = ax^2 + bx + c$ que es tangente a la recta $y = 2x - 3$ en el punto $A(2,1)$ y que pasa por el punto $B(5,-2)$.

7. Halla a , b y c en $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ de modo que la gráfica de f tenga tangente horizontal en $x = -4$ y en $x = 0$, y que pase por el punto $(1,1)$.

8. Calcula el valor de a para que $f(x) = \ln\left(\frac{x^2}{x+a}\right)$ verifique que $f'(2) = 0$.

9. Dada la función $f(x) = ax^3 + bx$, halla a y b para que f pase por el punto $(1,3)$ y en ese punto la tangente sea paralela a la recta $y = 4x + 1$.

10. Estudia y representa las siguientes funciones:

- Crecimiento y decrecimiento
- Máximos y mínimos
- Asíntotas horizontales, verticales y oblicuas

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$	b) $f(x) = x^4 + 4x^3$
c) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 16}$	d) $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x+2}$

11. La función $f(x) = \frac{60x}{x^2+9}$ indica los beneficios obtenidos por una empresa desde que comenzó a funcionar ($f(x)$ en miles de euros y x en años).
- Representátala gráficamente.
 - ¿Al cabo de cuánto tiempo obtiene la empresa el beneficio máximo? ¿Cuál es ese beneficio?
 - ¿Perderá dinero la empresa en algún momento?
12. Los costes de producción de un producto (en €) de una empresa vienen dados por $C = 40000 + 20q + q^2$, donde q es el número de unidades producidas. El precio de venta de cada unidad es de 520€.
- Expresa en función de q el beneficio de la empresa cuando se venden todas las unidades.
 - ¿Cuántas unidades hay que producir para que el beneficio sea máximo?
13. Halla dos números cuya suma sea 34 y su producto sea máximo.
14. Con una barra de hierro de 10 m queremos construir una portería. ¿Cuáles serán sus dimensiones para que su área sea máxima?
15. Halla dos números positivos cuyo producto sea 100 y su suma sea mínima.
16. El área de un rectángulo es 180 cm². ¿Qué dimensiones debe tener para que su perímetro sea mínimo?
17. De todos los rectángulos de 36 m de perímetro, halla las dimensiones del que tiene la mayor superficie.
18. Halla la base y la altura de un triángulo isósceles de perímetro 30 cm, cuya área sea la mayor posible.
19. Estudia la continuidad y derivabilidad de las siguientes funciones:

a)	$f(x) = \begin{cases} 2x - 5 & \text{si } x < 3 \\ \sqrt{x} - 2 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$	b)	$f(x) = \begin{cases} e^x + 2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 + x + 3 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$
----	--	----	--

20. Determina el valor de a y b para que la siguiente función sea derivable en el punto donde cambia la función:

a)	$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 1 & \text{si } x \leq 2 \\ 4x - b & \text{si } x > 2 \end{cases}$	b)	$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx - 3 & \text{si } x < 1 \\ 2bx - 4 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$
----	--	----	--

SOLUCIONARIO

1. Halla las siguientes derivadas **usando la definición del límite**:

a)	$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x^2 + 3x - 2}{x - 1} = 1$
b)	$f'(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x + 3}{6x + 6} = \frac{1}{2}$

2. Halla la función derivada **usando la definición del límite**:

a)	$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{hx(x+h)} = \frac{1}{x^2}$
b)	$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 2xh + 7h}{h} = 2x + 7$

3. Halla la función derivada usando las reglas de derivación y simplifica si es posible:

01)	$f'(x) = -2x + 3$	02)	$f'(x) = 15x^2 + 7$	03)	$f'(x) = 1 - 12x^3$
04)	$f'(x) = \frac{-1}{3x^2}$	05)	$f'(x) = \frac{2}{x^3}$	06)	$f'(x) = 0$
07)	$f'(x) = 2x - 10$	08)	$f'(x) = -2x - 4$	09)	$f'(x) = 3x^2 + 2x + 3$
10)	$f'(x) = \frac{-x - 6}{2x^2\sqrt{x+3}}$	11)	$f'(x) = \frac{5x+3}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$	12)	$f'(x) = \frac{100}{3^3\sqrt{x^2}}$
13)	$f'(x) = \frac{3x + 3\sqrt{x^2-4} + 8}{(2x+3)^2\sqrt{x^2-4}}$	14)	$f'(x) = \frac{3x - 3\sqrt{x^2-4} + 8}{(2x+3)^2\sqrt{x^2-4}}$	15)	$f'(x) = \frac{2x-3}{15x^2\sqrt{x}} + \frac{x-3}{15x^2\sqrt{x^2}}$
16)	$f'(x) = \frac{\log e}{x-3}$	17)	$f'(x) = 2^{x+3} \cdot \ln 2$	18)	$f'(x) = 1,5^x \cdot \ln 1,5$
19)	$f'(x) = e^x - 1$	20)	$f'(x) = 2^x \cdot \ln 2 - 2x$	21)	$f'(x) = 3x^2 - \frac{2}{x^3} \log_3 e$
22)	$f'(x) = \frac{3^x \cdot \ln 3 \cdot \ln x - \frac{3^x}{x}}{\ln^2 x}$	23)	$f'(x) = \frac{3x^2 - x^3 \cdot \ln 3}{3^x}$	24)	$f'(x) = \frac{-2x^3 + 3x^2 + 2}{2\sqrt{x^3-1}e^x}$
25)	$f'(x) = \frac{2x-2}{3^3\sqrt{(x^2-2x+1)^2}}$	26)	$f'(x) = \frac{-1}{3} \operatorname{sen} \frac{x}{3} - \frac{3}{\cos^2 x}$	27)	$f'(x) = \frac{7 \log_2 e}{(3x-5)(4-x)}$
28)	$f'(x) = 2e^{2x-1}$	29)	$f'(x) = \frac{2-x}{2x^2\sqrt{x-1}}$	30)	$f'(x) = (2x - \pi(x^2-1)\operatorname{sen}(\pi x)) \cdot e^{\cos(\pi x)}$
31)	$f'(x) = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{1-4x^2}}$	32)	$f'(x) = \frac{1}{2\cos^2 x}$	33)	$f'(x) = \frac{6x \cdot \operatorname{tg}^2 x^2}{\cos^2 x^2}$
34)	$f'(x) = \frac{\frac{x^4 - 12x^2}{(x^2-4)^2}}{2\sqrt{\frac{x^3}{x^2-4}}}$	35)	$f'(x) = -\frac{3}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{3x+\pi}{2}\right) + \frac{2\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}$	36)	$f'(x) = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}$

37)	$f'(x) = \frac{1-x}{x}$	38)	$f'(x) = \frac{1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x} + \sqrt{x}}$	39)	$f'(x) = \cos x \cdot e^{\sin x} - \sin x \cdot e^{\cos x}$
-----	-------------------------	-----	--	-----	---

4. Halla las ecuaciones de las rectas tangente y normal en cada uno de los siguientes casos:

a)	$Tangente: y = \frac{x}{2} + 1$ $Normal: y = -2x + 1$	b)	$Tangente: y = \frac{x}{e}$ $Normal: y = -\frac{x}{e} + 2$
c)	$Tangente: y = -x$ $Normal: y = x + 2$	d)	$Tangente: y = 4x + 2$ $Normal: y = \frac{-x + 25}{4}$

5. Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos de las siguientes funciones:

Función	Creciente	Decreciente	Máx. relativos	Máx. absoluto	Mín. relativos	Mín. absoluto
01)	$(4, +\infty)$	$(-\infty, 4)$	$\nexists$	$\nexists$	$(4, -13)$	$(4, -13)$
02)	$(-\infty, 0) \cup (6, +\infty)$	$(0, 6)$	$(0, 0)$	$\nexists$	$(6, -36)$	$\nexists$
03)	$\mathbb{R} - \{-2\}$	-	$\nexists$	$\nexists$	$\nexists$	$\nexists$
04)	$(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$	$(0, 2)$	$(0, 0)$	$\nexists$	$(2, 4)$	$\nexists$
05)	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$	$\nexists$	$\nexists$	$\nexists$	$\nexists$
06)	$(5, +\infty)$	$(-\infty, 5)$	$\nexists$	$\nexists$	$(5, 0)$	$(5, 0)$
07)	$(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$	$(-1, 2)$	$\left(-1, \frac{5}{e}\right)$	$\nexists$	$(2, -e^2)$	$(2, -e^2)$
08)	$(0, 2)$	$(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$	$\left(2, \frac{4}{e^2}\right)$	$\nexists$	$(0, 0)$	$(0, 0)$
09)	$(e^{-1}, +\infty)$	$(-\infty, e^{-1})$	$\nexists$	$\nexists$	(e^{-1}, e^{-1})	(e^{-1}, e^{-1})

6. La función es $y = -x^2 + 6x - 7$.

7. La función es $f(x) = x^3 + 6x^2 - 6$.

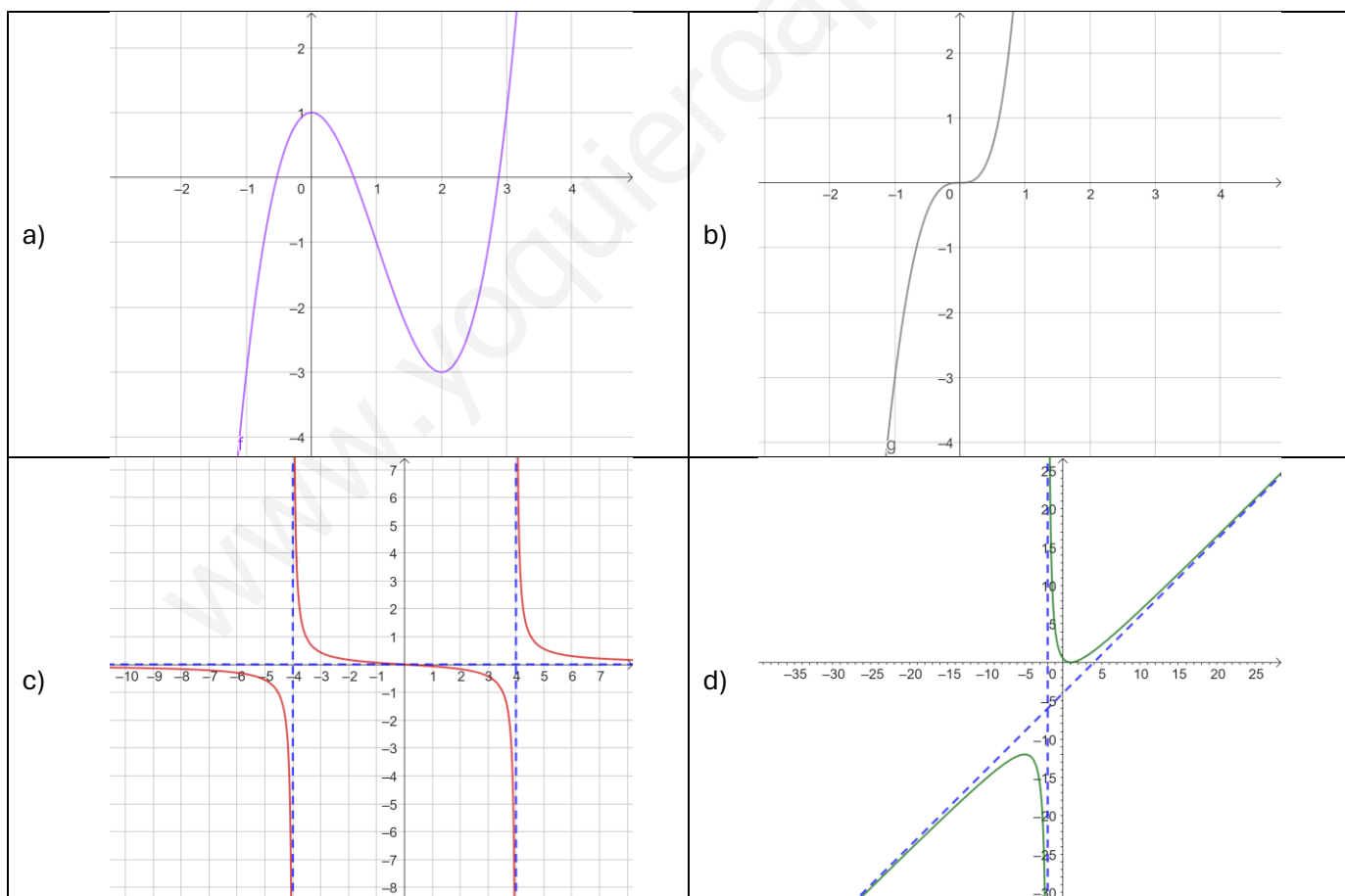
8. Será $a = -1$.

9. Será $a = \frac{1}{2}$ y $b = \frac{5}{2}$.

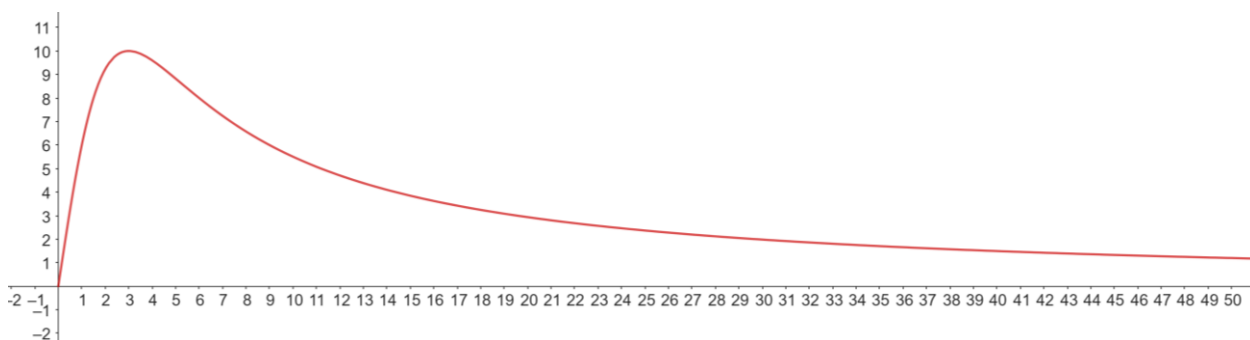
10. Estudia y representa las siguientes funciones:

- a) Crecimiento y decrecimiento
- b) Máximos y mínimos
- c) Asíntotas horizontales, verticales y oblicuas

	Creciente	Decreciente	Máx. relativos	Máx. absoluto	Mín. relativos	Mín. absoluto	AH	AV	AO
a)	$(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$	$(0, 2)$	$(0, 1)$	$\nexists$	$(2, -3)$	$\nexists$	$\nexists$	$\nexists$	$\nexists$
b)	$\mathbb{R}$	-	$\nexists$	$\nexists$	$\nexists$	$\nexists$	$\nexists$	$\nexists$	$\nexists$
c)	-	$\mathbb{R} - \{-4, 4\}$	$\nexists$	$\nexists$	$\nexists$	$\nexists$	$y = 0$	$x = -4$ $x = 4$	$\nexists$
d)	$(-\infty, -5) \cup (1, +\infty)$	$(-5, 1) - \{-2\}$	$(-5, -12)$	$\nexists$	$(1, 0)$	$\nexists$	$\nexists$	$x = -2$	$y = x - 4$



11. a) La función no se puede representar para valores menores que 0, porque son AÑOS.

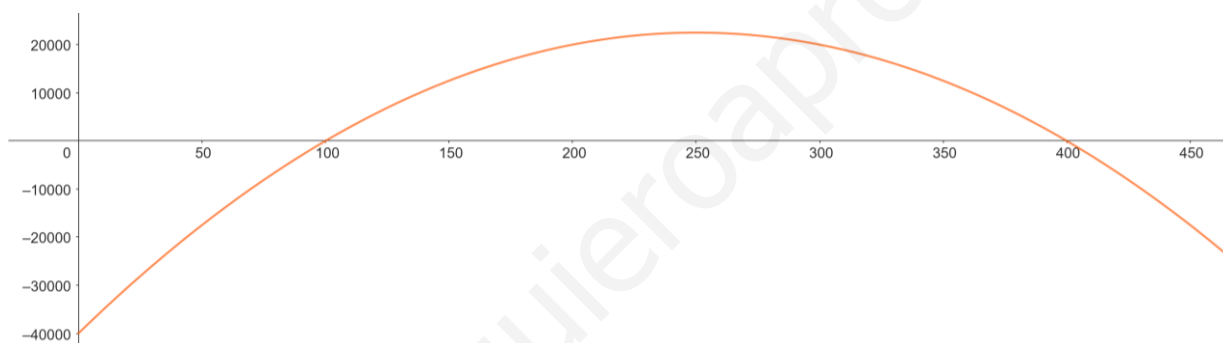


b) Al cabo de 3 años. El beneficio es de 10.000€.

c) No, porque aunque la función decrece, nunca es menor que 0.

12. a) El beneficio se obtiene al restar las ventas menos los costes. Por tanto la función beneficio es:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Coste: } C(x) = 40000 + 20x + x^2 \\ \text{Venta: } V(x) = 520x \end{array} \right\} \Rightarrow B(x) = 520x - (40000 + 20x + x^2) = -x^2 + 500x - 40000$$



b) 250 unidades.

EJERCICIOS DE OPTIMIZACIÓN

Ej.	Variables	Condición	Función	Derivada	Solución
13	x: primer nº z: segundo nº	$x + z = 34$	$f(x) = x \cdot z \Rightarrow$ $f(x) = 34x - x^2$	$f'(x) = 34 - 2x$	$x = 17$ $z = 17$
14	x: poste z: travesaño	$2x + z = 10$	$f(x) = x \cdot z \Rightarrow$ $f(x) = 10x - 2x^2$	$f'(x) = 10 - 4x$	$x = \frac{5}{2}m$ $z = 5m$
15	x: primer nº z: segundo nº	$x \cdot z = 100$	$f(x) = x + z \Rightarrow$ $f(x) = \frac{x^2 + 100}{x}$	$f'(x) = \frac{x^2 - 100}{x^2}$	$x = 10$ $z = 10$
16	x: base z: altura	$x \cdot z = 180$	$f(x) = 2x + 2z \Rightarrow$ $f(x) = \frac{2x^2 + 360}{x}$	$f'(x) = \frac{2x^2 - 360}{x^2}$	$x = \sqrt{180} = 13,42 \text{ cm}$ $z = \sqrt{180} = 13,42 \text{ cm}$
17	x: base z: altura	$2x + 2z = 36$	$f(x) = x \cdot z \Rightarrow$ $f(x) = 18x - x^2$	$f'(x) = 18 - 2x$	$x = 9m$ $z = 9m$
18	x: media base z: lado	$2x + 2z = 30$	$f(x) = \frac{2x \cdot \sqrt{z^2 - x^2}}{2} \Rightarrow$ $f(x) = x\sqrt{225 - 30x}$	$f'(x) = \frac{225 - 45x}{\sqrt{225 - 30x}}$	Base = 10m Altura = 8,66m

19. Estudia la continuidad y derivabilidad de las siguientes funciones:

a) Continua en $\mathbb{R}$ Derivable en $\mathbb{R} - \{3\}$	b) Continua en $\mathbb{R}$ Derivable en $\mathbb{R}$
--	--

20. Determina el valor de a y b para que la siguiente función sea derivable en el punto donde cambia la función:

a) $a = 1$ $b = 3$	b) $a = 1$ $b = 2$
-----------------------	-----------------------