

1. (2 ptos.)

a) Halla el dominio de la función $f(x) = \sqrt{\frac{x^2-9}{x^2-4x+3}}$

$$D(f) = \{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{x^2-9}{x^2-4x+3} \geq 0 \text{ y } x^2-4x+3 \neq 0 \}$$

Resolviendo la ecuación $x^2 - 4x + 3 = 0$ se deduce que las soluciones son $x = 1$ y $x = 3$ (también se podría deducir teniendo en cuenta que $1+3=4$, $1 \cdot 3 = 3$), por tanto, podemos escribir $x^2 - 4x + 3 = (x-1) \cdot (x-3)$

Por tanto, $\frac{x^2-9}{x^2-4x+3} = \frac{(x+3) \cdot \cancel{(x-3)}}{(x-1) \cdot \cancel{(x-3)}} = \frac{(x+3)}{(x-1)}$

Hay que tener en cuenta que la simplificación se puede hacer siempre *que* $x - 3 \neq 0$, es decir, $x \neq 3$.

Estudiamos el signo de $\frac{(x+3)}{(x-1)}$

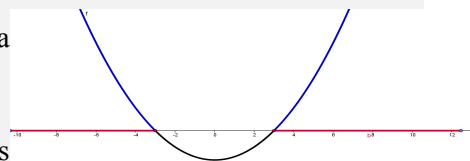
	$(-\infty, -3)$	-3	$(-3, 1)$	1	$(1, \infty)$
$x + 3$	-	0	+	+	+
$x - 1$	-	-	-	0	+
$\frac{(x+3)}{(x-1)}$	+	0	-	$\nexists$	+

En consecuencia $D(f) = (-\infty, -3] \cup (1, 3) \cup (3, \infty)$

a) Halla el dominio de la función $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^2-4x+3}$

$$D(f) = \{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 9 \geq 0 \text{ y } x^2 - 4x + 3 \neq 0 \}$$

Es fácil deducir en el gráfico adjunto que la parábola $y = x^2 - 9$ es positiva en $(-\infty, -3] \cup [3, \infty)$



Por otra parte, resolviendo la ecuación $x^2 - 4x + 3 = 0$ se deduce que las soluciones son 1 y 3 (también se podría deducir teniendo en cuenta que $1+3=4$, $1 \cdot 3 = 3$). Por tanto, esos dos valores no pertenecen al dominio, así que habrá que eliminarlos de los intervalos anteriores.

En consecuencia $D(f) = (-\infty, -3] \cup (3, \infty)$

b) Estudia la continuidad de la función $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+2}{x+2} & \text{si } x \leq 0 \\ e^{\frac{x}{x^2-1}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Caso I. $(-\infty, 0)$

La función es continua por ser elemental excepto $x = -2$ donde no está definida.

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2+2}{x+2} = \left(\frac{6}{0} \right) = \infty \text{ Por tanto, hay una discontinuidad de salto infinito en } x = -2$$

Caso II. $(0, \infty)$

La función es continua por ser elemental excepto $x = 1$ donde no está definida. Téngase en cuenta que el valor $-1 \notin (0, \infty)$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} e^{\frac{x}{x^2-1}} = e^{+\infty} = \infty \quad \text{Por tanto, hay una discontinuidad de salto infinito en } x = 1$$

Caso III. $x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + 2}{x + 2} = \left(\frac{2}{2}\right) = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{x}{x^2-1}} = e^0 = 1 \quad f(0) = \frac{0+2}{0+2} = 1$$

Por tanto, como $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 = f(0)$ f es continua en $x = 0$

En consecuencia, **f es continua en** $(-\infty, -2) \cup (-2, 1) \cup (1, \infty)$

2. (1'5 ptos.) Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3 \cdot \operatorname{sen} x)^{\cot x}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3 \cdot \operatorname{sen} x)^{\cot x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{3}{\frac{1}{\operatorname{sen} x}}\right)^{\cot x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{3}{\frac{1}{\operatorname{sen} x}}\right)^{\frac{1}{\operatorname{sen} x} \cdot \operatorname{sen} x \cdot \cot x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(1 + \frac{3}{\frac{1}{\operatorname{sen} x}}\right)^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}}\right]^{\operatorname{sen} x \cdot \cot x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(1 + \frac{3}{\frac{1}{\operatorname{sen} x}}\right)^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}}\right]^{\cancel{\operatorname{sen} x} \cdot \frac{\cos x}{\cancel{\operatorname{sen} x}}} = (e^3)^{\lim_{x \rightarrow 0} \cos x} = (e^3)^1 = e^3 \end{aligned}$$

b) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{\sqrt{x+3}-1}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{\sqrt{x+3}-1} &= \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2) \cdot (\sqrt{x+3}+1)}{(\sqrt{x+3}-1) \cdot (\sqrt{x+3}+1)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2) \cdot (\sqrt{x+3}+1)}{(\sqrt{x+3})^2 - 1^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\cancel{(x+2)} \cdot (\sqrt{x+3}+1)}{(\cancel{x+2})} = \lim_{x \rightarrow -2} (\sqrt{x+3}+1) = (\sqrt{-2+3}+1) = 1+1 = 2 \end{aligned}$$

3. (1'5 ptos.) Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - 2$ en el punto de abscisa $x = -2$.

La ecuación de la recta que buscamos es, en forma punto pendiente $y = m \cdot x + b$

Por ser tangente a la curva, su pendiente es la derivada en el punto. Es decir, $m = f'(-2)$

$$f'(x) = 6x^2 + 10x \rightarrow f'(-2) = 24 - 20 = 4$$

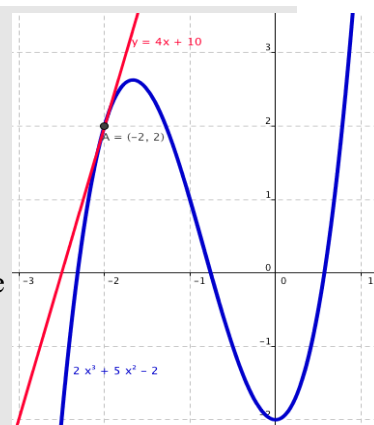
Como la recta tangente y la curva pasan por el punto de abscisa $x = -2$ y

$$f(-2) = 2 \cdot (-8) + 5 \cdot 4 - 2 = 2, \text{ entonces la recta pasa por el punto } (-2, 2)$$

Es decir, sabemos que $y = 4 \cdot x + b$ y además que la recta pasa por $(-2, 2)$, de donde se deduce que $2 = 4 \cdot (-2) + b \rightarrow b = 10$

Por tanto, la recta buscada es **$y = 4 \cdot x + 10$**

(Un gráfico aclarará la situación)



4. (1'5 ptos.) Calcula la derivada de las siguientes funciones:

a) $y = \operatorname{sen}^2(2x^3 + 2x)$

$$y' = 2 \cdot \operatorname{sen}(2x^3 + 2x) \cdot \cos(2x^3 + 2x) \cdot (6x^2 + 2)$$

b) $y = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \cdot \frac{(-1) \cdot (1+x) - (1-x) \cdot 1}{(1+x)^2} = \frac{\sqrt{1+x} \cdot (-1-x-1+x)}{2 \cdot \sqrt{1-x} \cdot (1+x)^2} = \frac{\sqrt{1+x} \cdot (-2)}{2 \cdot \sqrt{1-x} \cdot (1+x)^2} =$$

$$= \frac{(-1)}{\sqrt{1-x} \cdot \sqrt{(1+x)^3}} = \frac{(-1)}{\sqrt{1-x} \cdot \sqrt{1+x} \cdot (1+x)} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2} \cdot (1+x)}$$

c) $y = e^{x^2} \cdot \operatorname{tg} x$

$$y' = e^{x^2} \cdot 2x \cdot \operatorname{tg} x + e^{x^2} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$$

5. (3'5 ptos.) Dada la función $f(x) = \frac{x^2 + 3x}{x+1}$

a) (1 pto.) Estudia el dominio, continuidad y puntos de corte con los ejes

$D(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$ ya que $x+1=0 \rightarrow x=-1$

f es continua en $\mathbb{R} - \{-1\}$ por ser una función elemental

Corte con el eje OX: $y=0$

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x}{x+1} = 0 \rightarrow x^2 + 3x = 0 \rightarrow x \cdot (x+3) = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} x=0 \\ x+3=0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x=0 \\ x=-3 \end{pmatrix} \rightarrow (0, 0) \quad (-3, 0)$$

Corte con el eje OY: $x=0$

$f(0) = 0 \rightarrow (0, 0)$

b) (1 pto.) Estudia la monotonía y calcula los extremos relativos de $f(x)$

$$f'(x) = \frac{(2x+3) \cdot (x+1) - (x^2+3x) \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{2x^2 + 2x + 3x + 3 - x^2 - 3x}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x + 3}{(x+1)^2} \rightarrow$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow x^2 + 2x + 3 = 0 \rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 12}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-8}}{2} \quad \text{Por tanto, la}$$

función derivada no se anula nunca. Además, el numerador es una parábola convexa (coeficiente principal positivo) sin cortes con el eje OX, siempre es positiva y el denominador es un cuadrado, por tanto siempre positivo. En consecuencia, f' es siempre positiva.

monotonía			
signo f'	+	-1	+

Por tanto, f es creciente en $(-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$

Como la función es derivable en todo el dominio y no hay puntos con derivada nula, **no hay extremos relativos**. (También se podría justificar diciendo que la función es siempre creciente)

c)(1 pto.) Halla las asíntotas de la función

Asíntotas horizontales

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 3x}{x+1} = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x}{x+1} = \infty \quad (\text{por ser un cociente de polinomios con mayor grado en el$$

numerador) Por tanto, **no hay asíntotas horizontales**

Asíntotas oblicuas

Buscamos una ecuación del tipo $y = m \cdot x + b$

$$\text{Por la izquierda: } m = \lim_{x \rightarrow -\infty} f\left(\frac{x}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 3x}{x \cdot (x+1)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 3x}{x^2 + x} = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - m \cdot x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 + 3x}{x+1} - 1 \cdot x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x^2 + 3x) - (x^2 + x)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x+1} = 2$$

Por tanto, **$y = x + 2$ es asíntota oblicua por la izquierda (cuando $x \rightarrow -\infty$)**

De la misma forma se prueba que **$y = x + 2$ es asíntota oblicua por la derecha (cuando $x \rightarrow \infty$)**

Asíntotas verticales

Solo puede haberlas en los puntos en los que la función no es continua, en este caso, $x = -1$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 + 3x}{x+1} = \frac{-2}{0^-} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 + 3x}{x+1} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$$

Por tanto, **$x = -1$ es asíntota vertical por la izquierda y por la derecha**

d) (0'5 ptos.) Con los datos anteriores, dibuja la gráfica de la función

En primer lugar se dibujan los puntos de corte y las asíntotas. Luego los extremos relativos, si los hay. Teniendo en cuenta la monotonía, se deduce que la gráfica sería:

