FÍSICA
de
2º de BACHILLERATO

MECÁNICA
E
INTERACCIÓN GRAVITATORIA

EJERCICIOS RESUELTOS

QUE HAN SIDO PROPUESTOS EN LOS EXÁMENES DE LAS PRUEBAS DE ACCESO A ESTUDIOS UNIVERSITARIOS EN LA COMUNIDAD DE MADRID
(1996 − 2014)

DOMINGO A. GARCÍA FERNÁNDEZ
DEPARTAMENTO DE FÍSICA Y QUÍMICA
I.E.S. EMILIO CASTELAR
MADRID

Este volumen comprende **100 ejercicios** -44 cuestiones, 19 preguntas y 37 problemas- resueltos de **MECÁNICA E INTERACCIÓN GRAVITATORIA** que han sido propuestos en **58 exámenes** de **FÍSICA** de las Pruebas de acceso a estudios universitarios en la Comunidad de Madrid entre los años 1996 y 2014, en las siguientes convocatorias:

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="3">AÑO</th><th colspan="6">E X A M E N</th></tr>
<tr><th colspan="2">Modelo</th><th colspan="2">JUNIO</th><th colspan="2">SEPTIEMBRE</th></tr>
<tr><th>Cuestiones</th><th>Problemas</th><th>Cuestiones</th><th>Problemas</th><th>Cuestiones</th><th>Problemas</th></tr>
<tr><td colspan="2">1996</td><td></td><td></td><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td></tr>
<tr><td colspan="2">1997</td><td></td><td></td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">1998</td><td></td><td></td><td></td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td colspan="2">1999</td><td></td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td colspan="2">2000</td><td></td><td></td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td colspan="2">2001</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">2002</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td>1</td></tr>
<tr><td colspan="2">2003</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td>1</td></tr>
<tr><td colspan="2">2004</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td colspan="2">2005</td><td>1</td><td></td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td colspan="2">2006</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">2007</td><td>1</td><td></td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td colspan="2">2008</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td colspan="2">2009</td><td>1</td><td></td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">2010</td><td>Fase General</td><td rowspan="3">1</td><td rowspan="3">1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Fase Específica</td><td>1</td><td>1</td><td>2</td><td></td></tr>
<tr><td>Coincidencia</td><td>1</td><td>1</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">2011</td><td>Fase General</td><td rowspan="3">1</td><td rowspan="3">1</td><td rowspan="3">1</td><td rowspan="3">1</td><td rowspan="2">1</td><td rowspan="2">1</td></tr>
<tr><td>Fase Específica</td></tr>
<tr><td>Coincidencia</td><td></td><td>1</td></tr>
</table>

Continúa en la página siguiente.

<table>
<tr><th colspan="2" rowspan="3">AÑO</th><th colspan="3">E X A M E N</th></tr>
<tr><th>Modelo</th><th>JUNIO</th><th>SEPTIEMBRE</th></tr>
<tr><th>Preguntas</th><th>Preguntas</th><th>Preguntas</th></tr>
<tr><td colspan="2">2012</td><td>2</td><td>2</td><td>2</td></tr>
<tr><td rowspan="3">2013</td><td>Fase General</td><td rowspan="3">2</td><td rowspan="2">2</td><td rowspan="2">2</td></tr>
<tr><td>Fase Específica</td></tr>
<tr><td>Coincidencia</td><td>1</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">2014</td><td>Fase General</td><td rowspan="3">2</td><td rowspan="2">2</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>Fase Específica</td></tr>
<tr><td>Coincidencia</td><td>2</td><td></td></tr>
</table>

Para poder acceder directamente a la resolución de un ejercicio hay que colocarse en la fecha que aparece después de su enunciado y, una vez allí, hacer: “CLIC” con el ratón.

ENUNCIADOS

Cuestiones

1 − Una partícula de masa *m* está describiendo una trayectoria circular de radio *R* con velocidad lineal constante *v*.

a) ¿Cuál es la expresión de la fuerza que actúa sobre la partícula en este movimiento?. ¿Cuál es la expresión del momento angular de la partícula respecto al centro de la trayectoria?.

b) ¿Qué consecuencias sacas de aplicar el teorema del momento angular en este movimiento?. ¿Por qué?.

Septiembre 1996

2 − a) ¿Qué condición debe cumplir un campo de fuerzas para ser conservativo?.

b) Ponga un ejemplo de campo de fuerzas conservativo y demuestre que se cumple la citada condición.

Septiembre 1999

3 − Cuando una partícula se mueve en un campo de fuerzas conservativo sometida a la acción de la fuerza del campo, existe una relación entre las energías potencial y cinética. Explica qué relación es ésta y efectúa su demostración.

Junio 1996

4 − Defina los conceptos de: intensidad de campo, potencial, línea de fuerza y superficie equipotencial en un campo de fuerzas gravitatorio. ¿Bajo qué ángulo cortan las líneas de fuerza a las superficies equipotenciales?. ¿Por qué?.

Septiembre 1996

5 − a) Enuncie la Primera y la Segunda Ley de Kepler sobre el movimiento planetario.

b) Compruebe que la Segunda Ley de Kepler es un caso particular del Teorema de conservación del momento angular.

Junio 2000

6 − a) Enuncie la Tercera Ley de Kepler y demuéstrela para el caso de órbitas circulares.

b) Aplique dicha Ley para calcular la masa del Sol suponiendo que la órbita de la Tierra alrededor del Sol es circular con un radio medio de 1,49 x 10^8 km.

Dato: Constante de Gravitación Universal: G = 6,67 $\times 10^{-11}$ N·m^2·kg^{-2}.

Modelo 2009

7 − a) Enuncie la Segunda Ley de Kepler. Explique en qué posiciones de la órbita elíptica la velocidad del planeta es máxima y dónde es mínima.

b) Enuncie la Tercera Ley de Kepler. Deduzca la expresión de la constante de esta Ley en el caso de órbitas circulares.

Junio 2010 (Fase General)

8 − a) Enuncie las tres Leyes de Kepler sobre el movimiento planetario.

b) Si el radio de la órbita de la Tierra es $1,50 \times 10^{11}$ m y el de la de Urano $2,87 \times 10^{12}$ m, calcule el período orbital de Urano.

Modelo 2006

9 − La luz solar tarda 8,31 minutos en llegar a la Tierra y 6,01 minutos en llegar a Venus. Suponiendo que las órbitas descritas por ambos planetas son circulares, determine:

a) el período orbital de Venus en torno al Sol, sabiendo que el de la Tierra es de 365,25 días;

b) la velocidad con que se desplaza Venus en su órbita.

Dato: Velocidad de la luz en el vacío: $c = 3 \times 10^{8}$ m·s^{-1} .

Septiembre 2004

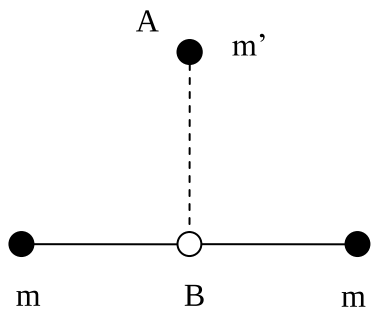
10 − a) ¿Cuál es el período de un satélite artificial que gira alrededor de la Tierra en una órbita circular cuyo radio es un cuarto del radio de la órbita lunar?.

b) ¿Cuál es la relación entre la velocidad del satélite y la velocidad de la Luna en sus respectivas órbitas?.

Dato: Período de la órbita lunar: $T_L = 27,32$ días.

Modelo 2010

11 − Dos masas iguales: m = 20 kg, ocupan posiciones fijas separadas una distancia de 2 m, según indica la figura. Una tercera masa, m’ = 0,2 kg, se suelta desde el reposo en un punto A equidistante de las dos masas anteriores y a una distancia de 1 m de la línea que las une (AB = 1 m). Si no actúan más que las acciones gravitatorias entre estas masas, determine:



a) la fuerza ejercida (módulo, dirección y sentido) sobre la masa m’ en la posición A;

b) las aceleraciones de la masa m’ en las posiciones A y B.

Dato: Constante de Gravitación Universal: $G = 6,67 \times 10^{-11}$ N·m^{2}·kg^{-2} .

Septiembre 2005

12 − Cuatro masas puntuales idénticas de 6 kg cada una están situadas en los vértices de un cuadrado de lado igual a 2 m. Calcule:

a) el campo gravitatorio que crean las cuatro masas en el centro de cada lado del cuadrado;

b) el potencial gravitatorio creado por las cuatro masas en el centro del cuadrado, tomando el infinito como origen de potenciales.

Dato: Constante de Gravitación Universal: $G = 6,67 \times 10^{-11}$ N·m^{2}·kg^{-2} .

Modelo 2008

13 − a) ¿Cómo se define la gravedad en un punto de la superficie terrestre?. ¿Dónde será mayor la gravedad: en los Polos o en un punto del Ecuador?.

b) ¿Cómo varía la gravedad con la altura?. ¿Qué relación existe entre la gravedad a una altura *h* y la gravedad en la superficie terrestre?.

Razona las respuestas.

Septiembre 1997

14 − a) Exprese la aceleración de la gravedad en la superficie de un planeta en función de la masa del planeta, de su radio y de la constante de gravitación universal G.

b) Si la aceleración de la gravedad sobre la superficie terrestre vale 9,8 $m \cdot s^{-2}$, calcule la aceleración de la gravedad a una altura sobre la superficie terrestre igual al radio de la Tierra.

Septiembre 2011

15 − Llamando g_0 y V_0 a la intensidad del campo gravitatorio y al potencial gravitatorio en la superficie terrestre respectivamente, determine en función del radio de la Tierra:

a) la altura sobre la superficie terrestre a la cual la intensidad del campo gravitatorio es $g_0/2$;

b) la altura sobre la superficie terrestre a la cual el potencial gravitatorio es $V_0/2$.

Junio 2006

16 − a) ¿A qué altitud tendrá una persona la mitad del peso que tiene sobre la superficie terrestre?. Exprese el resultado en función del radio terrestre.

b) Si la fuerza de la gravedad actúa sobre todos los cuerpos en proporción a sus masas, ¿por qué no cae un cuerpo pesado con mayor aceleración que un cuerpo ligero?.

Modelo 2002

17 − a) ¿Cuál es la aceleración de la gravedad en la superficie de un planeta esférico cuyo radio es la mitad del de la Tierra y posee la misma densidad media?.

b) ¿Cuál sería el período de la órbita circular de un satélite situado a una altura de 400 km respecto a la superficie del planeta?.

Datos: Radio de la Tierra: R_T = 6.371 km
Aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra: g = 9,8 $m \cdot s^{-2}$.

Septiembre 2007

18 − a) ¿Cuál es la velocidad de escape de un objeto situado en la superficie de la Tierra?.

b) ¿Cómo influye la dirección con que se lanza un objeto desde la superficie de la Tierra en su velocidad de escape?.

Septiembre 1998

19 − a) A partir de su significado físico, deduzca la expresión de la velocidad de escape de un cuerpo desde la superficie terrestre en función de la masa y el radio del planeta.

b) Sabiendo que la intensidad del campo gravitatorio en la Luna es 1/6 de la de la Tierra, obtenga la relación entre las velocidades de escape de ambos astros.

Datos: $R_T = 4\,R_L$ (R_T = radio de la Tierra ; R_L = radio de la Luna).

Junio 2010 (Materias coincidentes)

20 − Razone si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

a) El valor de la velocidad de escape de un objeto lanzado desde la superficie de la Tierra depende de la masa del objeto.

b) En el movimiento elíptico de un planeta en torno al Sol la velocidad del planeta en el perihelio (posición más próxima al Sol) es mayor que la velocidad en el afelio (posición más alejada del Sol).

Septiembre 2009

21 − Un planeta esférico tiene un radio de 3.000 km y la aceleración de la gravedad en su superficie es 6 m/s^2.

a) ¿Cuál es su densidad media?.

b) ¿Cuál es la velocidad de escape para un objeto situado en la superficie de este planeta?.

Dato: Constante de Gravitación Universal: $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ N\cdot m^2\cdot kg^{-2}$

Junio 2002

22 − Sabiendo que la aceleración de la gravedad en un movimiento de caída libre en la superficie de la Luna es un sexto de la aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra y que el radio de la Luna es aproximadamente 0,27 R_T (siendo R_T el radio terrestre), calcule:

a) la relación entre las densidades medias $\rho_{Luna} / \rho_{Tierra}$;

b) la relación entre las velocidades de escape de un objeto desde sus respectivas superficies $(v_e)_{Luna} / (v_e)_{Tierra}$.

Junio 2007

23 − Suponiendo un planeta esférico que tiene un radio la mitad del radio terrestre e igual densidad que la Tierra, calcule:

a) la aceleración de la gravedad en la superficie de dicho planeta;

b) la velocidad de escape de un objeto desde la superficie del planeta, si la velocidad de escape desde la superficie terrestre es 11,2 km/s.

Dato: Aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra: $g = 9{,}81\ m\cdot s^{-2}$.

Junio 2003

24 − Un planeta esférico tiene una masa igual a 27 veces la masa de la Tierra, y la velocidad de escape para objetos situados cerca de su superficie es tres veces la velocidad de escape terrestre. Determine:

a) la relación entre los radios del planeta y de la Tierra;

b) la relación entre las intensidades de la gravedad en los puntos de la superficie del planeta y de la Tierra.

Modelo 2003

25 − a) Compara las fuerzas de atracción gravitatoria que ejercen la Luna y la Tierra sobre un cuerpo de masa *m* que se halla situado en la superficie de la Tierra. ¿A qué conclusión llegas?.

b) Si el peso de un cuerpo en la superficie de la Tierra es de 100 kp, ¿cuál sería el peso de ese mismo cuerpo en la superficie de la Luna?.

Datos: La masa de la Tierra es 81 veces la masa de la Luna.
La distancia entre los centros de la Tierra y de la Luna es de 60 radios terrestres.
El radio de la Luna es 0,27 veces el radio de la Tierra.

Junio 1997

26 − a) ¿Con qué frecuencia angular debe girar un satélite de comunicaciones, situado en una órbita ecuatorial, para que se encuentre siempre sobre el mismo punto de la Tierra?.

b) ¿A qué altura sobre la superficie terrestre se encontrará el satélite citado en el apartado anterior?.

Datos: Gravedad en la superficie de la Tierra: $g = 9{,}8\ m \cdot s^{-2}$

Radio medio de la Tierra: $R_T = 6{,}37 \times 10^6$ m .

Septiembre 2000

27 − Un satélite que gira con la misma velocidad angular que la Tierra (geoestacionario) de masa: $m = 5 \times 10^3$ kg, describe una órbita circular de radio: $r = 3{,}6 \times 10^7$ m. Determine:

a) La velocidad areolar del satélite.

b) Suponiendo que el satélite describe su órbita en el plano ecuatorial de la Tierra, determine el módulo, la dirección y el sentido del momento angular respecto de los polos de la Tierra.

Dato: Período de rotación terrestre = 24 h.

NOTA.− La información que aporta el enunciado es *errónea*, ya que $3{,}6 \times 10^7$ m no es el radio de la órbita del satélite geoestacionario, sino su altura sobre la superficie terrestre.

Junio 2011

28 − Un satélite artificial de 500 kg que describe una órbita circular alrededor de la Tierra se mueve con una velocidad de 6,5 km/s. Calcule:

a) la energía mecánica del satélite;

b) la altura sobre la superficie de la Tierra a la que se encuentra.

Datos: Constante de Gravitación Universal: $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$

Masa de la Tierra: $m_T = 5{,}98 \times 10^{24}$ kg

Radio de la Tierra: $R_T = 6{,}37 \times 10^6$ m.

Junio 2009

29 − Un cometa se mueve en una órbita elíptica alrededor del Sol. Explique en qué punto de su órbita: afelio (punto más alejado del Sol) o perihelio (punto más cercano al Sol) tiene mayor valor:

a) la velocidad;

b) la energía mecánica.

Septiembre 2010 (Fase Específica)

30 − El cometa Halley se mueve en una órbita elíptica alrededor del Sol. En el perihelio (posición más próxima) el cometa está a $8{,}75 \times 10^7$ km del Sol y en el afelio (posición más alejada) está a $5{,}26 \times 10^9$ km del Sol.

a) ¿En cuál de los dos puntos tiene el cometa mayor velocidad?. ¿Y mayor aceleración?.

b) ¿En qué punto tiene mayor energía potencial?. ¿Y mayor energía mecánica?.

Junio 1999

31 − Plutón describe una órbita elíptica alrededor del Sol. Indique para cada una de las siguientes magnitudes si su valor es mayor, menor o igual en el afelio (punto más alejado del Sol) comparado con el perihelio (punto más próximo al Sol):

a) momento angular respecto a la posición del Sol;
b) momento lineal;
c) energía potencial;
d) energía mecánica.

Junio 2004

32 − La velocidad de un asteroide es de 20 km/s en el perihelio y de 14 km/s en el afelio. Determine en estas posiciones cuál es la relación entre:

a) las distancias al Sol en torno al cual orbita;
b) las energías potenciales del asteroide.

Modelo 2004

33 − a) Deduzca la expresión de la energía cinética de un satélite en órbita circular alrededor de un planeta en función del radio de la órbita y de las masas del satélite y del planeta.
b) Demuestre que la energía mecánica del satélite es la mitad de su energía potencial.

Junio 2005 y Junio 2010 (Fase Específica)

34 − Determine la relación que existe entre la energía mecánica de un satélite que describe una órbita circular en torno a un planeta y su energía potencial.

Modelo 2001

35 − En el movimiento circular de un satélite en torno a la Tierra, determine:

a) la expresión de la energía cinética en función de las masas del satélite y de la Tierra y del radio de la órbita;
b) la relación que existe entre su energía mecánica y su energía potencial.

Junio 2001

36 − Dos satélites de masas: m_A y m_B describen sendas órbitas circulares alrededor de la Tierra, siendo sus radios orbitales: r_A y r_B respectivamente. Conteste razonadamente a las siguientes preguntas:

a) Si $m_A = m_B$ y $r_A > r_B$, ¿cuál de los dos satélites tiene mayor energía cinética?.
b) Si los dos satélites estuvieran en la misma órbita ($r_A = r_B$) y tuviesen distinta masa ($m_A < m_B$), ¿cuál de los dos tendría mayor energía cinética?.

Modelo 2011

37 − Considerando que la órbita de la Luna alrededor de la Tierra es una órbita circular, deduzca:

a) la relación entre la energía potencial gravitatoria y la energía cinética de la Luna en su órbita;
b) la relación entre el período orbital y el radio de la órbita descrita por la Luna.

Septiembre 2010 (Fase General)

38 − Un asteroide está situado en una órbita circular alrededor de una estrella y tiene una energía total de -10^{10} J. Determine:

a) La relación que existe entre las energías potencial y cinética del asteroide.

b) Los valores de ambas energías potencial y cinética.

Septiembre 2010 (Fase Específica)

39 − Calcule el módulo del momento angular de un objeto de 1.000 kg respecto al centro de la Tierra en los siguientes casos:

a) Se lanza desde el polo Norte perpendicularmente a la superficie de la Tierra con una velocidad de 10 km/s.

b) Realiza una órbita circular alrededor de la Tierra en el plano ecuatorial a una distancia de 600 km de su superficie.

Datos: Constante de Gravitación Universal: $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$
Masa de la Tierra: $m_T = 5{,}98 \times 10^{24}$ kg
Radio de la Tierra: $R_T = 6{,}37 \times 10^{6}$ m.

Septiembre 2008

40 − Una sonda de masa 5.000 kg se encuentra en órbita circular a una altura sobre la superficie terrestre de $1{,}5\ R_T$. Determine:

a) el momento angular de la sonda en esa órbita respecto al centro de la Tierra;

b) la energía que hay que comunicar a la sonda para que escape del campo gravitatorio terrestre desde esa órbita.

Datos: Constante de Gravitación Universal: $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$
Masa de la Tierra: $M_T = 5{,}98 \times 10^{24}$ kg
Radio de la Tierra: $R_T = 6{,}37 \times 10^{6}$ m.

Junio 2008

41 − Un objeto de 5 kg de masa posee una energía potencial gravitatoria: $E_p = -2 \times 10^{8}$ J cuando se encuentra a cierta distancia de la Tierra.

a) Si el objeto a esa distancia estuviera describiendo una órbita circular, ¿cuál sería su velocidad?.

b) Si la velocidad del objeto a esa distancia fuese de 9 km/s, ¿cuál sería su energía mecánica?. ¿Podría el objeto estar describiendo una órbita elíptica en este caso?.

Modelo 2007

42 − Un proyectil de masa 10 kg se dispara verticalmente desde la superficie de la Tierra con una velocidad de 3.200 m/s.

a) ¿Cuál es la máxima energía potencial que adquiere?.

b) ¿En qué posición se alcanza?.

Datos: Gravedad en la superficie de la Tierra: $g = 9{,}8\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$
Radio medio de la Tierra: $R_T = 6{,}37 \times 10^{6}$ m .

Septiembre 2001

43 − a) Desde la superficie de la Tierra se lanza verticalmente hacia arriba un objeto con una velocidad *v*. Si se desprecia el rozamiento, calcule el valor de *v* necesario para que el objeto alcance una altura igual al radio de la Tierra.

b) Si se lanza el objeto desde la superficie de la Tierra con una velocidad doble a la calculada en el apartado anterior, ¿escapará o no del campo gravitatorio terrestre?.

Datos: Masa de la Tierra: m_T $= 5{,}98 \times 10^{24}$ kg

Radio de la Tierra: R_T = 6.370 km

Constante de Gravitación: G $= 6{,}67 \times 10^{-11}$ $N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$.

Septiembre 2006

44 − Razone si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

a) Un objeto de masa m_1 necesita una velocidad de escape de la Tierra el doble que la que necesita otro objeto de masa $m_2 = m_1/2$.

b) Se precisa realizar más trabajo para colocar en una misma órbita un satélite de masa m_1 que otro satélite de masa $m_2 = m_1/2$, lanzados desde la superficie de la Tierra.

Modelo 2005

Preguntas

45 − Urano es un planeta que describe una órbita elíptica alrededor del Sol. Razone la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

a) El módulo del momento angular, respecto a la posición del Sol, en el afelio es mayor que en el perihelio y lo mismo ocurre con el módulo del momento lineal.

b) La energía mecánica es menor en el afelio que en el perihelio y lo mismo ocurre con la energía potencial.

Junio 2013

46 − Se ha descubierto un planeta esférico de 4.100 km de radio y con una aceleración de la gravedad en su superficie de $7{,}2\ m \cdot s^{-2}$.

a) Calcule la masa del planeta.

b) Calcule la energía mínima necesaria que hay que comunicar a un objeto de 3 kg de masa para lanzarlo desde la superficie del planeta y situarlo a 1.000 km de altura de la superficie, en una órbita circular en torno al mismo.

Dato: Constante de Gravitación: G $= 6{,}67 \times 10^{-11}$ $N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$.

Modelo 2012

47 − Calcule:

a) La densidad media del planeta Mercurio, sabiendo que posee un radio de 2.440 km y una intensidad de campo gravitatorio en su superficie de $3{,}7\ N \cdot kg^{-1}$.

b) La energía necesaria para enviar una nave espacial de 5.000 kg de masa desde la superficie del planeta a una órbita en la que el valor de la intensidad de campo gravitatorio sea la cuarta parte de su valor en la superficie.

Dato: Constante de la Gravitación Universal: G $= 6{,}67 \times 10^{-11}$ $N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$.

Junio 2013

48 − El planeta *A* tiene tres veces más masa que el planeta *B*, y cuatro veces su radio. Obtenga:

a) La relación entre las velocidades de escape desde las superficies de ambos planetas.

b) La relación entre las aceleraciones gravitatorias en las superficies de ambos planetas.

Junio 2014

49 − Dos planetas, *A* y *B*, tienen la misma densidad. El planeta *A* tiene un radio de 3.500 km, y el planeta B un radio de 3.000 km. Calcule:

a) La relación que existe entre las aceleraciones de la gravedad en la superficie de cada planeta.

b) La relación entre las velocidades de escape en cada planeta.

Septiembre 2013

50 − La Tierra tiene un diámetro 2,48 veces mayor que el de Titán, y su masa es 44,3 veces mayor. Considerando que ambos astros son esféricos, calcule:

a) El valor de la aceleración de la gravedad en la superficie de Titán.

b) La relación entre las velocidades de escape en Titán y en la Tierra.

Dato:

Aceleración de la gravedad en la superficie terrestre: g $= 9{,}81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

Junio 2014 (Materias coincidentes)

51 − Un cierto planeta esférico tiene una masa: $m = 1{,}25 \times 10^{23}$ kg y un radio. $R = 1{,}5 \times 10^{6}$ m. Desde su superficie se lanza verticalmente hacia arriba un objeto, el cual alcanza una altura máxima de $R/2$. Despreciando rozamientos, determine:

a) La velocidad con que fue lanzado el objeto.

b) La aceleración de la gravedad en el punto más alto alcanzado por el objeto.

Dato: Constante de la Gravitación Universal: G $= 6{,}67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$.

Modelo 2013

52 − Un cohete de masa: 2 kg se lanza verticalmente desde la superficie terrestre, de tal manera que alcanza una altura máxima, con respecto a la superficie terrestre, de 500 km. Despreciando el rozamiento con el aire, calcule:

a) La velocidad del cuerpo en el momento del lanzamiento. Compárela con la velocidad de escape desde la superficie terrestre.

b) La distancia a la que se encuentra el cohete, con respecto al centro de la Tierra, cuando su velocidad se ha reducido en un 10 % con respecto a su velocidad de lanzamiento.

Datos: Radio terrestre: $R_T = 6{,}37 \times 10^{6}$ m

Masa de la Tierra: $m_T = 5{,}97 \times 10^{24}$ kg

Constante de Gravitación Universal: G $= 6{,}67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$.

Junio 2014

53 − La aceleración de la gravedad en la Luna es 0,166 veces la aceleración de la gravedad en la Tierra y el radio de la Luna es 0,273 veces el radio de la Tierra. Despreciando la influencia de la Tierra y utilizando exclusivamente los datos aportados, determine:

a) La velocidad de escape de un cohete que abandona la Luna desde su superficie.

b) El radio de la órbita circular que describe un satélite en torno a la Luna si su velocidad es de 1,5 $km \cdot s^{-1}$.

Datos:	Constante de Gravitación Universal:	G	$= 6{,}67 \times 10^{-11}\ N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$
	Masa de la Tierra:	m_T	$= 5{,}98 \times 10^{24}\ kg$
	Radio de la Tierra:	R_T	$= 6{,}37 \times 10^{6}\ m$.

Septiembre 2012

54 − Una nave espacial de 3.000 kg de masa describe, en ausencia de rozamiento, una órbita circular en torno a la Tierra a una distancia de $2{,}5 \times 10^4$ km de su superficie. Calcule:

a) El período de revolución de la nave espacial alrededor de la Tierra.

b) Las energías cinética y potencial de la nave en dicha órbita.

Datos:	Constante de Gravitación Universal:	G	$= 6{,}67 \times 10^{-11}\ N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$
	Masa de la Tierra:	m_T	$= 5{,}98 \times 10^{24}\ kg$
	Radio de la Tierra:	R_T	$= 6{,}37 \times 10^{6}\ m$.

Junio 2012

55 − Un satélite artificial está situado en una órbita circular en torno a la Tierra a una altura de su superficie de 2.500 km. Si el satélite tiene una masa de 1.100 kg:

a) Calcule la energía cinética del satélite y su energía mecánica total.

b) Calcule el módulo del momento angular del satélite respecto al centro de la Tierra.

Datos:	Constante de Gravitación:	G	$= 6{,}67 \times 10^{-11}\ N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$
	Radio de la Tierra:	R_T	= 6.370 km
	Masa de la Tierra:	m_T	$= 5{,}98 \times 10^{24}\ kg$.

Modelo 2012

56 − Los satélites Meteosat son satélites geoestacionarios, situados sobre el ecuador terrestre y con un período orbital de un día.

a) Suponiendo que la órbita que describen es circular y poseen una masa de 500 kg, determine el módulo del momento angular de los satélites respecto del centro de la Tierra y la altura a la que se encuentran estos satélites respecto de la superficie terrestre.

b) Determine la energía mecánica de los satélites.

Datos:	Radio terrestre:	R_T	$= 6{,}37 \times 10^{6}\ m$
	Masa de la Tierra:	m_T	$= 5{,}97 \times 10^{24}\ kg$
	Constante de Gravitación Universal:	G	$= 6{,}67 \times 10^{-11}\ N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$.

Modelo 2014

57 − Un satélite, de masa: 800 kg, orbita alrededor de la Luna con una velocidad angular de $4{,}33 \times 10^{-4}$ rad·s^{-1} . Despreciando rozamientos, determine:

a) La altura, medida desde la superficie de la Luna, a la que se encuentra el satélite orbitando, así como su período de revolución alrededor de la misma.

b) La energía mecánica del satélite a dicha altura.

Datos: Constante de Gravitación Universal: $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ N·m^2·kg^{-2}

Radio de la Luna: $R_L = 1.740$ km

Masa de la Luna: $m_L = 7{,}35 \times 10^{22}$ kg .

Junio 2013 (Materias coincidentes)

58 − Una nave espacial de 800 kg de masa realiza una órbita circular de 6.000 km de radio alrededor de un planeta. Sabiendo que la energía mecánica de la nave es: $E_m = -3{,}27 \times 10^8$ J, determine:

a) La masa del planeta.

b) La velocidad angular de la nave en su órbita.

Dato: Constante de la Gravitación Universal: $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ N·m^2·kg^{-2} .

Modelo 2013

59 − Un satélite artificial de masa: 100 kg describe una órbita circular alrededor de cierto planeta. La energía mecánica del satélite en dicha órbita es de -5×10^7 J y su período de revolución es de 24 horas. Calcule:

a) El radio de la órbita.

b) La masa del planeta.

Dato: Constante de la Gravitación Universal: $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ N·m^2·kg^{-2} .

Junio 2014 (Materias coincidentes)

60 − Un satélite de masa *m* gira alrededor de la Tierra describiendo una órbita circular a una altura de 2×10^4 km sobre su superficie.

a) Calcule la velocidad orbital del satélite alrededor de la Tierra.

b) Suponga que la velocidad del satélite se anula repentina e instantáneamente y éste empieza a caer sobre la Tierra. Calcule la velocidad con la que llegaría el satélite a la superficie de la misma. Considere despreciable el rozamiento con el aire.

Datos: Constante de Gravitación Universal: $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ N·m^2·kg^{-2}

Masa de la Tierra: $m_T = 5{,}98 \times 10^{24}$ kg

Radio de la Tierra: $R_T = 6{,}37 \times 10^6$ m .

Junio 2012

61 − Un satélite artificial de 400 kg describe una órbita circular de radio: $\frac{5}{2} R_T$ alrededor de la Tierra. Determine:

a) El trabajo que hay que realizar para llevar al satélite desde la órbita circular de radio: $\frac{5}{2} R_T$ a otra órbita circular de radio: $5R_T$ y mantenerlo en dicha órbita.

b) El período de rotación del satélite en la órbita de radio: $5R_T$.

Datos: Constante de Gravitación Universal: $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ N·m^2·kg^{-2}

Masa de la Tierra: $m_T = 5{,}98 \times 10^{24}$ kg

Radio de la Tierra: $R_T = 6{,}37 \times 10^6$ m .

Septiembre 2012

62 − Dos satélites describen órbitas circulares alrededor de un planeta cuyo radio es de 3.000 km. El primero de ellos orbita a 1.000 km de la superficie del planeta y su período orbital es de 2 h. La órbita del segundo tiene un radio 500 km mayor que la del primero. Calcule:

a) El módulo de la aceleración de la gravedad en la superficie del planeta.

b) El período orbital del segundo satélite.

Septiembre 2013

63 − La masa del Sol es 333.183 veces mayor que la de la Tierra y la distancia que separa sus centros es de $1{,}5 \times 10^{8}$ km. Determine si existe algún punto a lo largo de la línea que los une en el que se anule:

a) El potencial gravitatorio. En caso afirmativo, calcule su distancia a la Tierra.

b) El campo gravitatorio. En caso afirmativo, calcule su distancia a la Tierra.

Modelo 2014

Problemas

64 − Se considera el movimiento elíptico de la Tierra en torno al Sol. Cuando la Tierra está en el afelio (la posición más alejada del Sol) su distancia al Sol es de $1{,}52 \times 10^{11}$ m y su velocidad orbital es de $2{,}92 \times 10^{4}$ m/s. Hallar:

a) el momento angular de la Tierra respecto al Sol;

b) la velocidad orbital en el perihelio (la posición más cercana al Sol), siendo en este punto su distancia al Sol de $1{,}47 \times 10^{11}$ m.

Dato complementario: masa de la Tierra: $m_T = 5{,}98 \times 10^{24}$ kg .

Junio 1997

65 − Mercurio describe una órbita elíptica alrededor del Sol. En el afelio su distancia al Sol es de $6{,}99 \times 10^{10}$ m y su velocidad orbital es de $3{,}88 \times 10^{4}$ m/s, siendo su distancia al Sol en el perihelio de $4{,}60 \times 10^{10}$ m.

a) Calcule la velocidad orbital de Mercurio en el perihelio.

b) Calcule las energías cinética, potencial y mecánica de Mercurio en el perihelio.

c) Calcule el módulo de su momento lineal y de su momento angular en el perihelio.

d) De las magnitudes calculadas en los apartados anteriores, decir cuáles son iguales en el afelio.

Datos: Masa de Mercurio: $m_M = 3{,}18 \times 10^{23}$ kg
Masa del Sol: $m_S = 1{,}99 \times 10^{30}$ kg
Constante de Gravitación Universal: $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ N·m^2·kg^{-2} .

Junio 2003

66 − Suponiendo que los planetas Venus y la Tierra describen órbitas circulares alrededor del Sol, calcule:

a) el período de revolución de Venus;

b) las velocidades orbitales de Venus y de la Tierra.

Datos: Distancia de la Tierra al Sol $= 1{,}49 \times 10^{11}$ m
Distancia de Venus al Sol $= 1{,}08 \times 10^{11}$ m
Período de revolución de la Tierra = 365 días.

Junio 2009

67 − Un satélite artificial de masa 200 kg se mueve alrededor de la Tierra en una órbita elíptica definida por una distancia al perigeo (posición más próxima al centro de la Tierra) de $7{,}02 \times 10^6$ m y una distancia al apogeo (posición más alejada del centro de la Tierra) de $10{,}30 \times 10^6$ m. Si en el perigeo el módulo de la velocidad es $8{,}22 \times 10^3$ m/s:

a) ¿Cuál es el módulo de la velocidad en el apogeo?.
b) Determine el módulo y dirección del momento angular del satélite.
c) Determine la velocidad areolar del satélite.
d) Determine la energía mecánica del satélite.

Datos: Constante de Gravitación Universal: $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ N{\cdot}m^2{\cdot}kg^{-2}$
Masa de la Tierra: $m_T = 5{,}98 \times 10^{24}$ kg .

Septiembre 2011 (Materias coincidentes)

68 − Io, un satélite de Júpiter, tiene una masa de $8{,}9 \times 10^{22}$ kg, un período orbital de 1,77 días y un radio medio orbital de $4{,}22 \times 10^8$ m. Considerando que la órbita es circular con este radio, determine:

a) la masa de Júpiter;
b) la intensidad del campo gravitatorio, debida a Júpiter, en los puntos de la órbita de Io;
c) la energía cinética de Io en su órbita;
d) el módulo del momento angular de Io respecto al centro de su órbita.

Dato: Constante de Gravitación Universal: $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ N{\cdot}m^2{\cdot}kg^{-2}$.

Junio 2010 (Fase General)

69 − Fobos es un satélite de Marte que gira en una órbita circular de 9.380 km de radio, respecto al centro del planeta, con un período de revolución de 7,65 horas. Otro satélite de Marte, Deimos, gira en una órbita de 23.460 km de radio. Determine:

a) la masa de Marte;
b) el período de revolución del satélite Deimos;
c) la energía mecánica del satélite Deimos, y
d) el módulo del momento angular de Deimos respecto al centro de Marte.

Datos: Constante de Gravitación Universal: $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ N{\cdot}m^2{\cdot}kg^{-2}$
Masa de Fobos $= 1{,}1 \times 10^{16}$ kg
Masa de Deimos $= 2{,}4 \times 10^{15}$ kg .

Junio 2007

70 − Un planeta tiene dos satélites, A y B, que describen órbitas circulares de radios: 8.400 km y 23.500 km, respectivamente. El satélite A, en su desplazamiento en torno al planeta, barre un área de 8.210 km^2 en un segundo. Sabiendo que la fuerza que ejerce el planeta sobre el satélite A es 37 veces mayor que sobre el satélite B:

a) Determine el período del satélite A.
b) Halle la masa del planeta.
c) Obtenga la relación entre las energías mecánicas de ambos satélites.
d) Calcule el vector momento angular del satélite A, si tiene una masa de: $1{,}08 \times 10^{16}$ kg.

Dato: Constante de Gravitación Universal: $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ N{\cdot}m^2{\cdot}kg^{-2}$.

Junio 2010 (Materias coincidentes)

71 − Dos planetas de masas iguales orbitan alrededor de una estrella de masa mucho mayor. El planeta 1 se mueve en una órbita circular de radio 10^{11} m y período 2 años. El planeta 2 se mueve en una órbita elíptica, siendo su distancia en la posición más próxima a la estrella 10^{11} m y en la más alejada $1,8 \times 10^{11}$ m.

a) ¿Cuál es la masa de la estrella?.

b) Halle el período de la órbita del planeta 2.

c) Utilizando los principios de conservación del momento angular y de la energía mecánica, hallar la velocidad del planeta 2 cuando se encuentra en la posición más cercana a la estrella.

Dato: Constante de Gravitación Universal: G $= 6,67 \times 10^{-11}$ N·m²·kg⁻² .

<u>*Modelo 2002*</u>

72 − Un planeta orbita alrededor de una estrella de masa M. La masa del planeta es: m = 10^{24} kg y su órbita es circular de radio: $r = 10^{8}$ km y período: T = 3 años terrestres. Determine:

a) La masa M de la estrella.

b) La energía mecánica del planeta.

c) El módulo del momento angular del planeta respecto al centro de la estrella.

d) La velocidad angular de un segundo planeta que describiese una órbita circular de radio igual a $2r$ alrededor de la estrella.

Datos: Constante de Gravitación Universal: G $= 6,67 \times 10^{-11}$ $N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$

Considere un año terrestre = 365 días.

<u>*Modelo 2011*</u>

73 − Un satélite artificial de 200 kg gira en una órbita circular a una altura h sobre la superficie de la Tierra. Sabiendo que a esa altura el valor de la aceleración de la gravedad es la mitad del valor que tiene en la superficie terrestre, averiguar:

a) la velocidad del satélite, y

b) su energía mecánica.

Datos: Gravedad en la superficie terrestre: g $= 9,8$ $m \cdot s^{-2}$

Radio medio de la Tierra: R_T $= 6,37 \times 10^{6}$ m .

<u>*Septiembre 2000*</u>

74 − Un satélite de 2.000 kg de masa describe una órbita ecuatorial alrededor de la Tierra, de 8.000 km de radio. Determinar:

a) su momento angular respecto al centro de la órbita;

b) sus energías cinética, potencial y total.

Datos: Constante de Gravitación Universal: G $= 6,67 \times 10^{-11}$ $N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$

Masa de la Tierra: m_T $= 5,98 \times 10^{24}$ kg .

<u>*Junio 1996*</u>

75 − Un satélite artificial de la Tierra de 100 kg de masa describe una órbita circular a una altura de 655 km. Calcule:

a) el período de la órbita;
b) la energía mecánica del satélite;
c) el módulo del momento angular del satélite respecto al centro de la Tierra;
d) el cociente entre los valores de la intensidad del campo gravitatorio terrestre en el satélite y en la superficie de la Tierra.

Datos: Masa de la Tierra: $m_T = 5{,}98 \times 10^{24}$ kg .
Radio de la Tierra: $R_T = 6{,}37 \times 10^{6}$ m
Constante de Gravitación Universal: $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ N·m²·kg⁻² .

Junio 2005

76 − Desde la superficie terrestre se lanza un satélite de 400 kg de masa hasta situarlo en una órbita circular a una distancia del centro de la Tierra igual a las 7/6 partes del radio terrestre. Calcule:

a) la intensidad del campo gravitatorio terrestre en los puntos de la órbita del satélite;
b) la velocidad y el período que tendrá el satélite en la órbita;
c) la energía mecánica del satélite en la órbita;
d) la variación de la energía potencial que ha experimentado el satélite al elevarlo desde la superficie de la Tierra hasta situarlo en su órbita.

Datos: Constante de Gravitación Universal: $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ $N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$
Masa de la Tierra: $m_T = 5{,}98 \times 10^{24}$ kg
Radio de la Tierra: $R_T = 6{,}37 \times 10^{6}$ m .

Septiembre 2005

77 − Un satélite de 1.000 kg de masa describe una órbita circular de 12×10^{3} km de radio alrededor de la Tierra. Calcule:

a) El módulo del momento lineal y el módulo del momento angular del satélite respecto al centro de la Tierra. ¿Cambian las direcciones de estos vectores al cambiar la posición del satélite en su órbita?.
b) El período y la energía mecánica del satélite en la órbita.

Datos: Masa de la Tierra: $m_T = 5{,}98 \times 10^{24}$ kg
Constante de Gravitación Universal: $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ $N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$.

Junio 2010 (Fase Específica)

78 − Un satélite artificial de 100 kg de masa se encuentra girando alrededor de la Tierra en una órbita circular de 7.100 km de radio. Determine:

a) el período de revolución del satélite;
b) el momento lineal y el momento angular del satélite respecto al centro de la Tierra;
c) la variación de energía potencial que ha experimentado el satélite al elevarlo desde la superficie de la Tierra hasta esa posición;
d) las energías cinética y total del satélite.

Datos: Masa de la Tierra: $m_T = 5{,}98 \times 10^{24}$ kg .
Radio de la Tierra: $R_T = 6{,}37 \times 10^{6}$ m
Constante de Gravitación Universal: $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ $N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$.

Septiembre 2003

79 − Un satélite artificial describe una órbita circular alrededor de la Tierra. En esta órbita la energía mecánica del satélite es $-4{,}5 \times 10^{9}$ J y su velocidad es 7.610 $m \cdot s^{-1}$. Calcule:

a) el módulo del momento lineal del satélite y el módulo del momento angular del satélite respecto al centro de la Tierra;

b) el período de la órbita y la altura a la que se encuentra el satélite.

Datos: Constante de Gravitación Universal: $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$
Masa de la Tierra: $m_T = 5{,}98 \times 10^{24}$ kg
Radio de la Tierra: $R_T = 6{,}37 \times 10^{6}$ m .

Junio 2006

80 − La velocidad angular con la que un satélite describe una órbita circular en torno al planeta Venus es $\omega_1 = 1{,}45 \times 10^{-4}$ rad/s y su momento angular respecto al centro de la órbita es $L_1 = 2{,}2 \times 10^{12}\ kg \cdot m^2 \cdot s^{-1}$.

a) Determine el radio r_1 de la órbita del satélite y su masa.

b) ¿Qué energía será preciso invertir para cambiar a otra órbita circular con velocidad angular $\omega_2 = 10^{-4}$ rad/s?.

Datos: Constante de Gravitación Universal: $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$
Masa de Venus: $m_V = 4{,}87 \times 10^{24}$ kg .

Junio 2002

81 − Desde un punto de la superficie terrestre se lanza verticalmente hacia arriba un objeto de 100 kg que llega hasta una altura de 300 km. Determine:

a) la velocidad del lanzamiento;

b) la energía potencial del objeto a esa altura.

Si estando situado a la altura de 300 km queremos convertir el objeto en satélite de forma que se ponga en órbita circular alrededor de la Tierra,

c) ¿qué energía adicional habrá que comunicarle?;

d) ¿cuál será la velocidad y el período del satélite en esa órbita?.

Datos: Constante de Gravitación: $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$
Masa de la Tierra: $m_T = 5{,}98 \times 10^{24}$ kg
Radio de la Tierra: R_T = 6.370 km.

Modelo 2010

82 − Se coloca un satélite meteorológico de 1.000 kg en órbita circular, a 300 km sobre la superficie terrestre. Determine:

a) la velocidad lineal, la aceleración radial y el período en la órbita;

b) el trabajo que se requiere para poner en órbita el satélite.

Datos: Gravedad en la superficie terrestre: $g = 9{,}8\ m \cdot s^{-2}$
Radio medio terrestre: R_T = 6.370 km .

Junio 1999

83 − Un satélite artificial de 100 kg se mueve en una órbita circular alrededor de la Tierra con una velocidad de 7,5 km/s. Calcule:

a) El radio de la órbita.
b) La energía potencial del satélite.
c) La energía mecánica del satélite.
d) La energía que habría que suministrar al satélite para que describa una órbita circular con radio doble que el de la órbita anterior.

Datos: Constante de Gravitación Universal: $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ N{\cdot}m^2{\cdot}kg^{-2}$
Masa de la Tierra: $m_T = 5{,}98 \times 10^{24}$ kg
Radio de la Tierra: $R_T = 6{,}37 \times 10^6$ m .

Septiembre 2008 y Septiembre 2010 (Fase General)

84 − Una sonda espacial de masa m = 1.000 kg se encuentra situada en una órbita circular alrededor de la Tierra de radio: $r = 2{,}26 \times R_T$, siendo R_T el radio de la Tierra.

a) Calcule la velocidad de la sonda en esa órbita.
b) ¿Cuánto vale su energía potencial?.
c) ¿Cuánto vale su energía mecánica?.
d) ¿Qué energía hay que comunicar a la sonda para alejarla desde dicha órbita hasta el infinito?.

Datos: Masa de la Tierra: $m_T = 5{,}98 \times 10^{24}$ kg
Radio de la Tierra: $R_T = 6{,}37 \times 10^6$ m
Constante de Gravitación Universal: $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ N{\cdot}m^2{\cdot}kg^{-2}$

Septiembre 2011

85 − Un satélite de masa 20 kg se coloca en órbita circular sobre el ecuador terrestre de modo que su radio se ajusta para que dé una vuelta a la Tierra cada 24 horas. Así se consigue que siempre se encuentre sobre el mismo punto respecto a la Tierra (satélite geoestacionario).

a) ¿Cuál debe ser el radio de su órbita?.
b) ¿Cuánta energía es necesaria para situarlo en dicha órbita?.

Datos: Constante de Gravitación Universal: $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ N{\cdot}m^2{\cdot}kg^{-2}$
Masa de la Tierra: $m_T = 5{,}96 \times 10^{24}$ kg
Radio de la Tierra: R_T = 6.371 km.

Septiembre 2007

86 − Se pretende colocar un satélite artificial de forma que gire en una órbita circular en el plano del ecuador terrestre y en el sentido de rotación de la Tierra. Si se quiere que el satélite pase periódicamente sobre un punto del ecuador cada dos días, calcule:

a) la altura sobre la superficie terrestre a la que hay que colocar el satélite;
b) la relación entre la energía que hay que comunicar a dicho satélite desde el momento de su lanzamiento en la superficie terrestre para colocarlo en esa órbita y la energía mínima de escape.

Datos: Constante de Gravitación Universal: $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ N{\cdot}m^2{\cdot}kg^{-2}$
Radio de la Tierra: R_T = 6.370 km
Masa de la Tierra: $m_T = 5{,}98 \times 10^{24}$ kg .

Septiembre 2002

87 − Un planeta esférico tiene 3.200 km de radio y la aceleración de la gravedad en su superficie es 6,2 $m \cdot s^{-2}$. Calcule:

a) la densidad media del planeta y la velocidad de escape desde su superficie;

b) la energía que hay que comunicar a un objeto de 50 kg de masa para lanzarlo desde la superficie del planeta y ponerlo en órbita circular alrededor del mismo, de forma que su período sea de 2 horas.

Dato: Constante de Gravitación Universal: $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$.

Septiembre 2004

88 − El período de revolución del planeta Júpiter en su órbita alrededor del Sol es aproximadamente doce veces mayor que el de la Tierra en su correspondiente órbita. Considerando circulares las órbitas de los dos planetas, determine:

a) la razón entre los radios de las respectivas órbitas;

b) la razón entre las aceleraciones de los dos planetas en sus respectivas órbitas.

Modelo 2001

89 − Las distancias de la Tierra y de Marte al Sol son, respectivamente, $149{,}6 \times 10^6$ km y $228{,}0 \times 10^6$ km. Suponiendo que las órbitas son circulares y que el período de revolución de la Tierra en torno al Sol es de 365 días:

a) ¿Cuál será el período de revolución de Marte?.

b) Si la masa de la Tierra es 9,6 veces la de Marte y sus radios respectivos son 6.370 km y 3.390 km, ¿cuál será el peso en Marte de una persona de 70 kg?.

Dato: Gravedad en la superficie terrestre: $g = 9{,}8\ m \cdot s^{-2}$.

Modelo 1999

90 − La sonda espacial Mars Odissey describe una órbita circular en torno a Marte a una altura sobre su superficie de 400 km. Sabiendo que un satélite de Marte describe órbitas circulares de 9.390 km de radio y tarda en cada una de ellas 7,7 h, calcule:

a) el tiempo que tarda la sonda espacial en dar una vuelta completa;

b) la masa de Marte y la aceleración de la gravedad en su superficie.

Datos: Constante de Gravitación Universal: $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$

Radio de Marte: $R_M = 3.390$ km .

Modelo 2004

91 − Júpiter tiene aproximadamente una masa 320 veces mayor que la de la Tierra y un volumen 1.320 veces superior al de la Tierra. Determine:

a) a qué altura *h* sobre la superficie de Júpiter debería encontrarse un satélite, en órbita circular en torno a este planeta, para que tuviera un período de 9 horas 50 minutos;

b) la velocidad del satélite en dicha órbita.

Datos: Gravedad en la superficie terrestre: $g = 9{,}8\ m \cdot s^{-2}$

Radio medio de la Tierra: $R_T = 6{,}37 \times 10^6$ m .

Modelo 2003

92 − La nave espacial Discovery, lanzada en octubre de 1998, describía en torno a la Tierra una órbita circular con una velocidad de 7,62 km·s^{-1}.

a) ¿A qué altitud se encontraba?.

b) ¿Cuál era su período?. ¿Cuántos amaneceres contemplaban cada 24 horas los astronautas que viajaban en el interior de la nave?.

Datos: Constante de Gravitación Universal: $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ N·m^2·kg^{-2}
Masa de la Tierra: $m_T = 5{,}98 \times 10^{24}$ kg
Radio medio de la Tierra: $R_T = 6.370$ km .

Septiembre 1999

93 − Dos satélites artificiales de la Tierra S_1 y S_2 describen en un sistema de referencia geocéntrico dos órbitas circulares, contenidas en un mismo plano, de radios $r_1 = 8.000$ km y $r_2 = 9.034$ km, respectivamente. En un instante inicial dado, los satélites están alineados con el centro de la Tierra y situados del mismo lado.

a) ¿Qué relación existe entre las velocidades orbitales de ambos satélites?.

b) ¿Qué relación existe entre los períodos orbitales de los satélites?. ¿Qué posición ocupará el satélite S_2 cuando el satélite S_1 haya completado seis vueltas, desde el instante inicial?.

Junio 2001

94 − El vehículo espacial Apolo VIII estuvo en órbita circular alrededor de la Luna, 113 km por encima de su superficie. Calcular:

a) el período del movimiento;

b) las velocidades lineal y angular del vehículo;

c) la velocidad de escape a la atracción lunar desde esa posición.

Datos: Constante de Gravitación Universal: $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ N·m^2·kg^{-2}
Masa de la Luna: $m_L = 7{,}36 \times 10^{22}$ kg
Radio medio lunar: $R_L = 1.740$ km .

Septiembre 1996

95 − La nave espacial Lunar Prospector permanece en órbita circular alrededor de la Luna a una altura de 100 km sobre su superficie. Determine:

a) la velocidad lineal de la nave y el período del movimiento;

b) la velocidad de escape a la atracción lunar desde esa órbita.

Datos: Constante de Gravitación Universal: $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ N·m^2·kg^{-2}
Masa de la Luna: $m_L = 7{,}36 \times 10^{22}$ kg
Radio medio lunar: $R_L = 1.740$ km .

Junio 1998

96 − Se pone en órbita un satélite artificial de 600 kg a una altura de 1.200 km sobre la superficie de la Tierra. Si el lanzamiento se ha realizado desde el nivel del mar, calcule:

a) cuánto ha aumentado la energía potencial gravitatoria del satélite;

b) qué energía adicional hay que suministrar al satélite para que escape a la acción del campo gravitatorio terrestre desde esa órbita.

Datos: Constante de Gravitación Universal: $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ N·m^2·kg^{-2}
Masa de la Tierra: $m_T = 5{,}98 \times 10^{24}$ kg
Radio medio de la Tierra: $R_T = 6{,}37 \times 10^{6}$ m .

Junio 2000

97 − Un satélite artificial de 200 kg describe u1na órbita circular alrededor de la Tierra. La velocidad de escape a la atracción terrestre desde esa órbita es la mitad que la velocidad de escape desde la superficie terrestre.

a) Calcule la fuerza de atracción entre la Tierra y el satélite.

b) Calcule el potencial gravitatorio en la órbita del satélite.

c) Calcule la energía mecánica del satélite en la órbita.

d) ¿Se trata de un satélite geoestacionario?. Justifique la respuesta.

Datos: Constante de Gravitación Universal: $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ N·m^2·kg^{-2}

Masa de la Tierra: $m_T = 5{,}98 \times 10^{24}$ kg

Radio de la Tierra: $R_T = 6{,}37 \times 10^6$ m .

Modelo 2008

98 − Si se considera que la Tierra tiene forma esférica, con un radio aproximado de 6.400 km, determine:

a) la relación existente entre las intensidades del campo gravitatorio sobre la superficie terrestre y a una altura de 144 km por encima de la misma;

b) la variación de energía cinética de un cuerpo de 100 kg de masa al caer libremente desde la altura de 144 km hasta 72 km por encima de la superficie terrestre.

Datos: Constante de Gravitación Universal: $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ N·m^2·kg^{-2}

Masa de la Tierra: $m_T = 5{,}98 \times 10^{24}$ kg .

Septiembre 1998

99 − Se lanza una nave de masa $m = 5 \times 10^3$ kg desde la superficie de un planeta de radio $R_1 = 6 \times 10^3$ km y masa $m_1 = 4 \times 10^{24}$ kg, con una velocidad inicial $v_0 = 2 \times 10^4$ m/s, en dirección hacia otro planeta del mismo radio $R_2 = R_1$ y masa $m_2 = 2\ m_1$, siguiendo la línea recta que une los centros de ambos planetas. Si la distancia entre dichos centros es $D = 4{,}83 \times 10^{10}$ m, determine:

a) la posición del punto P en el que la fuerza neta sobre la nave es cero;

b) la energía cinética con la que llegará la nave a la superficie del segundo planeta.

Dato: Constante de Gravitación Universal: $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ N·m^2·kg^{-2} .

Modelo 2006

100 − Sabiendo que el período de revolución lunar es de 27,32 días y que el radio de la órbita es: $R_L = 3{,}84 \times 10^8$ m, calcule:

a) La constante de gravitación universal: *G* (obtener su valor a partir de los datos del problema).

b) La fuerza que la Luna ejerce sobre la Tierra y la de la Tierra sobre la Luna.

c) El trabajo necesario para llevar un objeto de 5.000 kg desde la Tierra hasta la Luna. (Despreciar los radios de la Tierra y de la Luna, en comparación con su distancia).

d) Si un satélite se sitúa entre la Tierra y la Luna, a una distancia de la Tierra de $R_L/4$, ¿cuál es la relación de fuerzas debidas a la Tierra y a la Luna?.

Datos: Masa de la Tierra: $m_T = 5{,}98 \times 10^{24}$ kg

Masa de la Luna: $m_L = 7{,}35 \times 10^{22}$ kg

Radio de la Tierra: $= 6{,}37 \times 10^6$ m

Radio de la Luna: $= 1{,}74 \times 10^6$ m .

Junio 2011

EJERCICIOS RESUELTOS

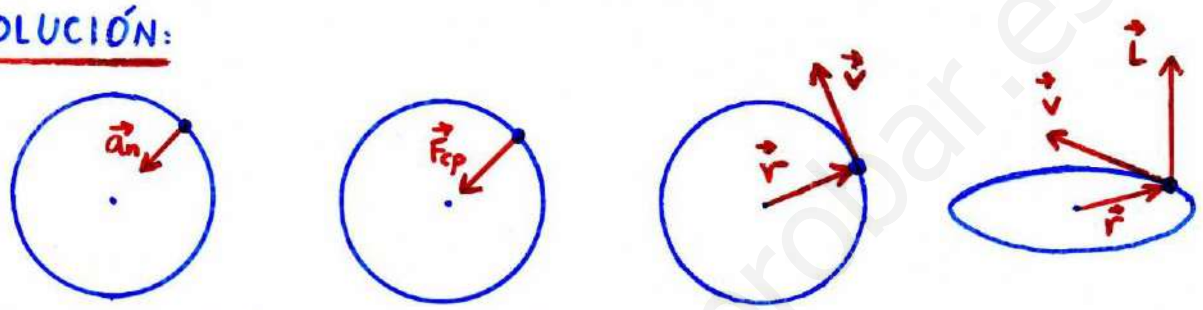
Una partícula de masa m está describiendo una trayectoria circular de radio R con velocidad lineal constante v.

a) ¿Cuál es la expresión de la fuerza que actúa sobre la partícula en este movimiento?. ¿Cuál es la expresión del momento angular de la partícula respecto al centro de la trayectoria?.

b) ¿Qué consecuencias sacas de aplicar el teorema del momento angular en este movimiento?. ¿Por qué?.

(*Pruebas de acceso a la Universidad − Madrid, septiembre 1996*)

SOLUCIÓN:



Una partícula con movimiento circular uniforme sólo posee como aceleración la normal ó centrípeta, que vale: $a_n = \frac{v^2}{r}$ ($r = R = $ radio), por lo que está sometida a una fuerza centrípeta:

$$\boxed{F_{cp} = m\frac{v^2}{r} \ ; \ \vec{F}_{cp} = -m\frac{v^2}{r^2}\vec{r} \ : \text{RESULTADO}}$$ (2ª ley de Newton)

El momento angular de la partícula respecto al centro de la circunferencia viene dado por:

$$\boxed{\vec{L} = \vec{r} \times (m\vec{v}) \ ; \ L = rmv \quad (\vec{r} \perp \vec{v}) \ : \text{RESULTADO}}$$

Al coincidir las direcciones de $\vec{F}_{cp}$ y $\vec{r}$ el momento: $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}_{cp}$, de la fuerza centrípeta respecto al centro de la circunferencia es 0, por lo que el momento angular: $\vec{L}$ es constante. Las consecuencias de esta conservación de $\vec{L}$ son:

* Trayectoria circular plana (conservación de la dirección de $\vec{L}$).
* La partícula se mueve siempre en el mismo sentido (conservación del sentido de $\vec{L}$).
* El radio que acompaña a la partícula barre sectores circulares iguales en tiempos iguales (ley de las áreas) (conservación del módulo de $\vec{L}$).

RESULTADO

a) ¿Qué condición debe cumplir un campo de fuerzas para ser conservativo?.

b) Ponga un ejemplo de campo de fuerzas conservativo y demuestre que se cumple la citada condición.

(Pruebas de acceso a la Universidad − Madrid, septiembre 1999)

SOLUCIÓN:

Un campo de fuerzas es conservativo si el trabajo implicado en el desplazamiento de una partícula desde un punto inicial a otro final de dicho campo es independiente de la trayectoria seguida, dependiendo únicamente de cuáles son esos puntos inicial y final.

Si un campo de fuerzas es central, también es conservativo. Ejemplo: el campo gravitatorio es central, ya que:

* la dirección de la fuerza gravitatoria siempre pasa por un punto determinado: el centro de fuerza, y
* el módulo de dicha fuerza depende de la distancia entre su punto de aplicación y el centro de fuerza.

Por tanto, el campo gravitatorio también es conservativo.

Cuando una partícula se mueve en un campo de fuerzas conservativo sometida a la acción de la fuerza del campo, existe una relación entre las energías potencial y cinética. Explica qué relación es ésta y efectúa su demostración.

(Pruebas de acceso a la Universidad − Madrid, junio 1996)

SOLUCIÓN:

La energía mecánica total de una partícula sometida a una fuerza conservativa se mantiene constante (Principio de conservación de la energía mecánica). Dado que esa energía mecánica es la suma de las energías cinética y potencial, queda:

$$E_{c_i} + E_{p_i} = E_{c_f} + E_{p_f}$$

Las variaciones de energía cinética y potencial valen, respectivamente:

$$\Delta E_c = E_{c_f} - E_{c_i}$$

$$\Delta E_p = E_{p_f} - E_{p_i}$$

Por consiguiente:

$$\boxed{\Delta E_c = -\Delta E_p}$$

Un aumento (disminución) de energía cinética va asociado a una disminución (aumento) en la energía potencial, por el mismo valor.

RESULTADO

FÍSICA DE 2º DE BACHILLERATO — **MECÁNICA E INTERACCIÓN GRAVITATORIA**

Define los conceptos de: intensidad de campo, potencial, línea de fuerza y superficie equipotencial en un campo de fuerzas gravitatorio. ¿Bajo qué ángulo cortan las líneas de fuerza a las superficies equipotenciales?. ¿Por qué?.

(*Pruebas de acceso a la Universidad – Madrid, septiembre 1996*)

SOLUCIÓN:

Intensidad de campo gravitatorio en un punto del mismo es la fuerza gravitatoria a que está sometida una masa unidad (1 kg) situada en dicho punto.

La ley de gravitación de Newton da:

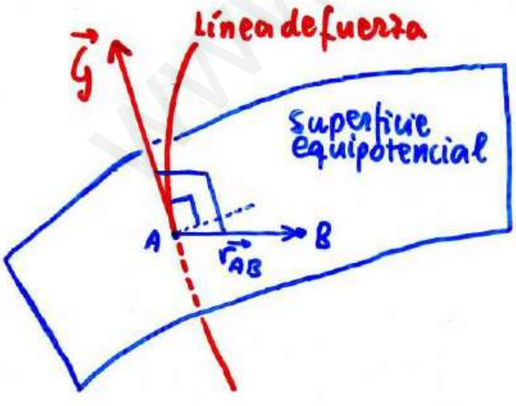
$$\vec{g} = -G\frac{m}{r^3}\vec{r} \quad ; \quad g = G\frac{m}{r^2} \quad (N\,kg^{-1}).$$

Potencial gravitatorio en un punto es la energía potencial gravitatoria que posee una masa unidad (1 kg) situada en dicho punto. Su expresión es:

$$V = -G\frac{m}{r} \quad (J\,kg^{-1}).$$

Línea de fuerza es aquélla que en cada uno de sus puntos es tangente al vector intensidad de campo gravitatorio: $\vec{g}$.

Superficie equipotencial es la integrada por todos los puntos en los que el potencial gravitatorio vale lo mismo.



Las líneas de fuerza y las superficies equipotenciales son perpendiculares entre sí, a fin de que el trabajo implicado en desplazar una masa desde un punto a otro de la misma superficie equipotencial sea 0.

$$W_{A\to B} = m(V_A - V_B) = 0 \qquad (V_A = V_B)$$

$$W_{A\to B} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0 \qquad (\vec{F} \perp d\vec{r})$$

($\vec F$: línea de fuerza; $d\vec r$: superficie equipotencial)

a) Enuncie la primera y la segunda ley de Kepler sobre el movimiento planetario.

b) Compruebe que la segunda ley de Kepler es un caso particular del teorema de conservación del momento angular.

(Pruebas de acceso a la Universidad − Madrid, junio 2000)

SOLUCIÓN:

Primera ley de Kepler:

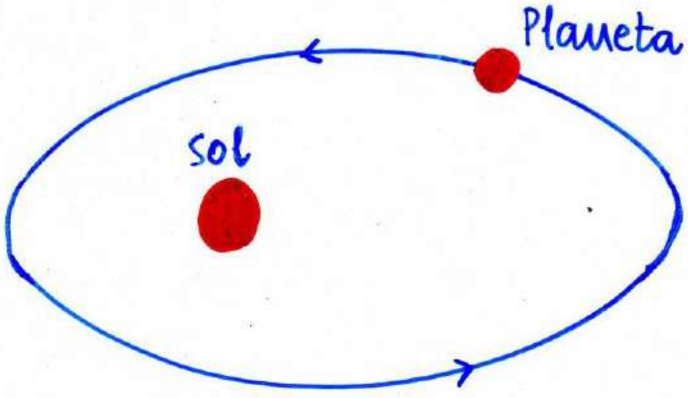
Los planetas describen órbitas elípticas y planas alrededor del Sol, encontrándose éste en uno de los focos de dicha elipse.

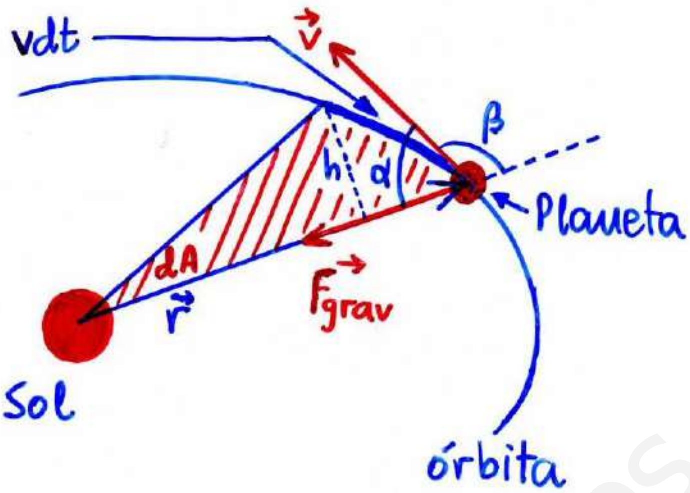
Segunda ley de Kepler (ley de las áreas):

La velocidad areolar del planeta alrededor del Sol es constante, o de otro modo:

el radio vector que une el Sol con el planeta barre áreas iguales en intervalos de tiempo iguales.

RESULTADO





La responsable del movimiento orbital del planeta alrededor del Sol es la fuerza gravitatoria con que el Sol atrae al planeta. Al ser una fuerza central, tenemos:

$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = 0$ ($\vec{r}$ y $\vec{F}$ tienen la misma dirección).

Recordando la relación entre el momento de la fuerza: $\vec{M}$ y el momento angular: $\vec{L}$, tenemos:

$$\vec{M} = 0 = \frac{d\vec{L}}{dt} \Rightarrow \boxed{\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} = \text{constante (conservación)}}$$

La velocidad areolar del planeta se define:

$v_A \equiv \dfrac{dA}{dt}$ (área barrida en la unidad de tiempo).

En el triángulo de la figura tenemos:

$$dA = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} = \frac{rh}{2} = \frac{r(vdt\,\text{sen}\,\alpha)}{2} = \frac{r(vdt\,\text{sen}\,\beta)}{2} =$$

$$= \frac{rmv\,\text{sen}\,\beta\,dt}{2m} = \frac{rmv\,\text{sen}(\widehat{\vec{r}, m\vec{v}})\,dt}{2m} \quad (\alpha + \beta = 180^\circ;\ \text{sen}\,\alpha = \text{sen}\,\beta)$$

entonces: $v_A = \dfrac{dA}{dt} = \dfrac{rmv\,\text{sen}(\widehat{\vec{r}, m\vec{v}})}{2m} = \dfrac{|\vec{r} \times m\vec{v}|}{2m} = \dfrac{L}{2m} = \text{constante.}$

$v_A = \text{constante}$ −segunda ley de Kepler−

FÍSICA de 2º de BACHILLERATO **MECÁNICA E INTERACCIÓN GRAVITATORIA**

a) Enuncie la tercera ley de Kepler y demuéstrela para el caso de órbitas circulares.
b) Aplique dicha ley para calcular la masa del Sol suponiendo que la órbita de la Tierra alrededor del Sol es circular con un radio medio de $1{,}49 \times 10^8$ km.

Dato: Constante de Gravitación Universal: $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2kg^{-2}}$.

(Pruebas de acceso a la Universidad − Madrid, modelo 2009)

SOLUCIÓN.-

La Tercera Ley de Kepler (1571-1630) establece que:

> La proporción entre el cuadrado del período orbital del planeta alrededor del Sol y el cubo del radio medio de su órbita es constante.

Al tratarse de órbitas elípticas, rigurosamente hablando es constante la proporción entre el cuadrado del período orbital y el cubo del semieje mayor de la elipse descrita.

Si el planeta girase alrededor del Sol con movimiento circular éste tendría que ser uniforme, para satisfacer la segunda Ley de Kepler: "el radio-vector que une el Sol con el planeta barre áreas iguales en intervalos de tiempos iguales". En este caso serían iguales las fuerzas gravitatoria y centrípeta, por lo que, igualando sus módulos:

$$F_{grav} = F_{cp} \; ; \quad G\frac{m_S m_P}{r^2} = m_P \frac{v^2}{r} = m_P \frac{\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2}{r} = \frac{4\pi^2 m_P r}{T^2} \, .$$

Despejando: $\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{Gm_S}$ = constante.

Con los datos relativos a la Tierra:

$T = 1$ año $= 365{,}25 \times 24 \times 60 \times 60$ s $= 3{,}16 \times 10^7$ s

$r = 1{,}49 \times 10^8$ km $= 1{,}49 \times 10^{11}$ m (1 U.A.)

obtenemos al despejar la masa del Sol:

$$\boxed{m_S = \frac{4\pi^2 r^3}{G\,T^2} = \frac{4\pi^2 (1{,}49\times10^{11})^3}{6{,}67\times10^{-11}(3{,}16\times10^7)^2} = 1{,}97\times10^{30}\ \text{kg}}$$

RESULTADO

a) Enuncie la Segunda Ley de Kepler. Explique en qué posiciones de la órbita elíptica la velocidad del planeta es máxima y dónde es mínima.

b) Enuncie la Tercera Ley de Kepler. Deduzca la expresión de la constante de esta Ley en el caso de órbitas circulares.

(Pruebas de acceso a la Universidad − Madrid, junio 2010 -Fase General-)

SOLUCIÓN.-

Segunda Ley de Kepler (Ley de las áreas):

"El radio vector que une el Sol con el planeta barre áreas iguales para intervalos de tiempo iguales."

Es una consecuencia de la conservación del módulo del momento angular del planeta respecto al centro del Sol, lo que se deriva, a su vez, del hecho de que la fuerza gravitatoria con que el Sol atrae al planeta es central.

La rapidez del planeta es máxima en el perihelio (donde el planeta está más cerca del Sol -a menor distancia), y es mínima en el afelio (donde el planeta está más lejos del Sol - a mayor distancia); de este modo:

$$L_{perihelio} = L_{afelio}$$

$$r_{perihelio} \cdot m_p \cdot v_{perihelio} = r_{afelio} \cdot m_p \cdot v_{afelio}$$

$$r_{perihelio} = r_{mín} \quad ; \quad r_{afelio} = r_{máx}$$

$$v_{perihelio} = v_{máx} \quad ; \quad v_{afelio} = v_{mín}$$

Tercera ley de Kepler (Ley de la armonía):

"los cuadrados de los períodos de traslación de los distintos planetas alrededor del Sol son directamente proporcionales a los cubos de los semiejes mayores de las órbitas elípticas descritas por los respectivos planetas".

Para el caso particular de órbita circular tenemos:

- El "semieje mayor" de la órbita es su radio: r.
- Como consecuencia de la segunda Ley de Kepler el movimiento del planeta alrededor del Sol es circular uniforme.
- Lo anterior se debe a que la fuerza gravitatoria con que el Sol atrae al planeta es una fuerza centrípeta.

Resumiendo:

$$T^2 = k\, r^3 \qquad \text{(Tercera ley de Kepler)}$$

$$F_{grav} = F_{cpta}\ ; \quad G\frac{m_S \cdot m_P}{r^2} = m_P \frac{v_P^2}{r} = m_P \frac{\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2}{r}$$

De lo anterior, despejando:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{G m_S}\ ; \quad \text{y:} \quad k = \frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G m_S}$$

siendo m_S la masa del Sol.

a) Enuncie las tres leyes de Kepler sobre el movimiento planetario.
b) Si el radio de la órbita de la Tierra es $1{,}50 \times 10^{11}$ m y el de la de Urano $2{,}87 \times 10^{12}$ m, calcule el período orbital de Urano.

(Pruebas de acceso a la Universidad − Madrid, modelo 2006)

SOLUCIÓN.−

Primera ley de Kepler:

Los planetas describen órbitas elípticas y planas alrededor del Sol, hallándose éste en uno de los focos de dicha elipse.

Segunda ley de Kepler:

El radio vector que une el Sol con el planeta barre áreas iguales para intervalos de tiempo iguales.

Tercera ley de Kepler:

Los cuadrados de los períodos de traslación de los distintos planetas alrededor del Sol son directamente proporcionales a los cubos de los semiejes mayores de las órbitas elípticas descritas por los respectivos planetas.

RESULTADO

En relación a la Tierra, tenemos:

- Período orbital: $T_T = 1$ año $= 3{,}16 \times 10^7$ s
- Radio medio orbital: $r_T = 1{,}50 \times 10^{11}$ m

Para Urano:

- Radio medio orbital: $r_U = 2{,}87 \times 10^{12}$ m.

Aplicando la Tercera ley de Kepler sacamos:

$$\frac{T_U^2}{r_U^3} = \frac{T_T^2}{r_T^3} = \text{constante} \quad ; \text{ despejando } T_U:$$

$$T_U = T_T \sqrt{\left(\frac{r_U}{r_T}\right)^3} = 3{,}16 \times 10^7 \sqrt{\left(\frac{2{,}87 \times 10^{12}}{1{,}50 \times 10^{11}}\right)^3}$$

$$\boxed{T_U = 2{,}64 \times 10^9 \text{ s} \quad : \text{RESULTADO}}$$

(período orbital de Urano)

FÍSICA DE 2º DE BACHILLERATO **MECÁNICA E INTERACCIÓN GRAVITATORIA**

La luz solar tarda 8,31 minutos en llegar a la Tierra y 6,01 minutos en llegar a Venus. Suponiendo que las órbitas descritas por ambos planetas son circulares, determine:

a) el período orbital de Venus en torno al Sol, sabiendo que el de la Tierra es de 365,25 días;

b) la velocidad con que se desplaza Venus en su órbita.

Dato: Velocidad de la luz en el vacío: $c = 3 \times 10^8\ ms^{-1}$.

(Pruebas de acceso a la Universidad − Madrid, septiembre 2004)

SOLUCIÓN.-

Recordando los tiempos que emplea la luz solar en llegar a Venus y la Tierra calculamos las respectivas distancias de estos planetas al Sol:

Venus: $r_V = ct_V = 3\times10^8 \times 6{,}01\times60 = 1{,}08\times10^{11}\ m$

Tierra: $r_T = ct_T = 3\times10^8 \times 8{,}31\times60 = 1{,}50\times10^{11}\ m$.

El período orbital de la Tierra es:

$T_T = 1$ año $= 365{,}25$ días $= 365{,}25\times24\times60\times60 = 3{,}16\times10^7\ s.$

Utilizando la Tercera ley de Kepler podemos despejar el período orbital de Venus:

$$\frac{T_V^2}{T_T^2} = \frac{r_V^3}{r_T^3};\quad T_V = \sqrt{T_T^2\frac{r_V^3}{r_T^3}} = \sqrt{(3{,}16\times10^7)^2\frac{(1{,}08\times10^{11})^3}{(1{,}50\times10^{11})^3}}$$

$\boxed{T_V = 1{,}94\times10^7 s : \text{RESULTADO}}$

Por último, el valor numérico de la velocidad lineal de Venus alrededor del Sol vale:

$$\boxed{v_V = \frac{2\pi r_V}{T_V} = \frac{2\pi\times1{,}08\times10^{11}}{1{,}94\times10^7} = 3{,}50\times10^4\ ms^{-1} : \text{RESULTADO}}$$

a) ¿Cuál es el período de un satélite artificial que gira alrededor de la Tierra en una órbita circular cuyo radio es un cuarto del radio de la órbita lunar?.

b) ¿Cuál es la relación entre la velocidad del satélite y la velocidad de la Luna en sus respectivas órbitas?.

Dato: Período de la órbita lunar: T_L = 27,32 días.

(Pruebas de acceso a la Universidad − Madrid, modelo 2010)

SOLUCIÓN.-

Tanto la Luna -satélite natural- como el satélite artificial giran alrededor de la Tierra porque la fuerza gravitatoria con que ésta los atrae es también una fuerza centrípeta en cada caso. Igualando los módulos de ambas y recordando la expresión del valor numérico de la velocidad lineal en el movimiento circular uniforme, tenemos:

$$F_{grav} = F_{cpta} \; ; \quad G\frac{m_T m_{sat}}{r^2} = m_{sat}\frac{v^2}{r} = m_{sat}\frac{\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2}{r} \; ;$$

despejando encontramos:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{G m_T} r^3 \; ;$$

comparando entre el satélite artificial (sat) y la Luna:

$$\frac{T^2_{sat}}{T^2_L} = \frac{r_{sat}^3}{r_L^3} = \frac{(r_L/4)^3}{r_L^3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64} = \frac{1}{8^2} \; ;$$

por último, despejando T_{sat} obtenemos:

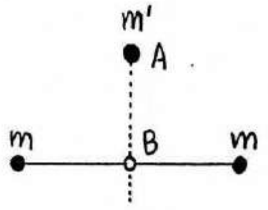
$$\boxed{T_{sat} = \sqrt{\frac{T_L^2}{8^2}} = \frac{T_L}{8} = \frac{27{,}32}{8}\text{ días} = 3{,}42\text{ días} = 2{,}95 \times 10^5\text{ s}}$$

RESULTADO

Si ahora comparamos los valores numéricos de las velocidades lineales del satélite artificial y de la Luna encontramos:

$$\frac{v_{sat}}{v_L} = \frac{\frac{2\pi r_{sat}}{T_{sat}}}{\frac{2\pi r_L}{T_L}} = \frac{r_{sat}}{r_L} \cdot \frac{T_L}{T_{sat}} = \frac{\frac{r_L}{4}}{r_L} \cdot \frac{T_L}{\frac{T_L}{8}} = \frac{8}{4} = 2$$

RESULTADO



Dos masas iguales, m = 20 kg, ocupan posiciones fijas separadas una distancia de 2 m, según indica la figura. Una tercera masa, m' = 0,2 kg, se suelta desde el reposo en un punto A equidistante de las dos masas anteriores y a una distancia de 1 m de la línea que las une (AB = 1 m). Si no actúan más que las acciones gravitatorias entre estas masas, determine:

a) la fuerza ejercida (módulo, dirección y sentido) sobre la masa m' en la posición A;

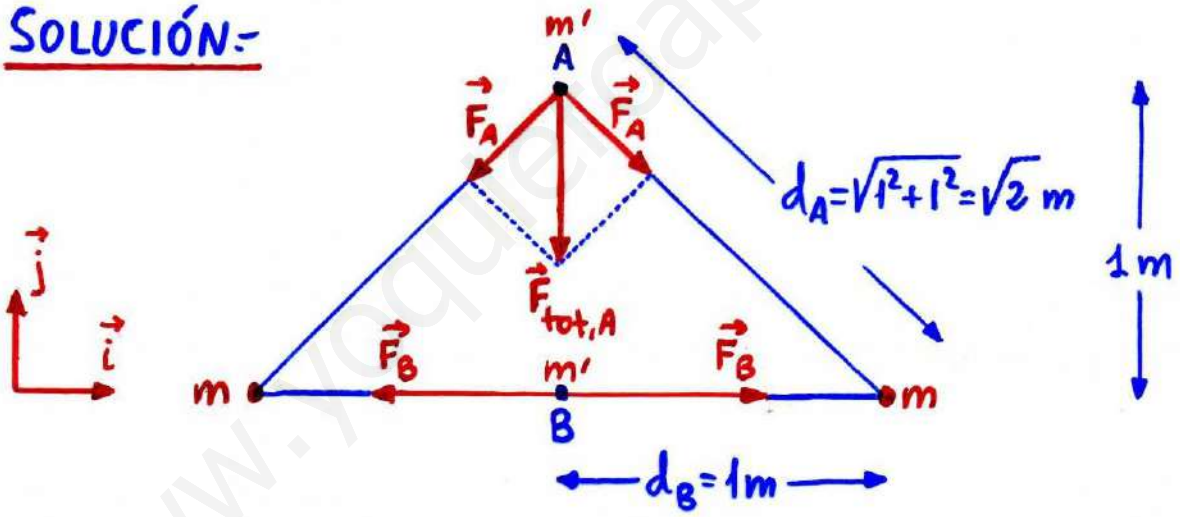
b) las aceleraciones de la masa m' en las posiciones A y B.

Dato:

Constante de Gravitación Universal: $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2kg^{-2}}$.

(Pruebas de acceso a la Universidad – Madrid, septiembre 2005)

SOLUCIÓN:-



Aplicando las leyes de gravitación universal y fundamental de la Dinámica, obtenemos las siguientes fuerzas y aceleraciones:

$$F_A = G\frac{mm'}{d_A^2} = 6{,}67\times10^{-11}\,\frac{20\times0{,}2}{(\sqrt{2})^2} = 1{,}33\times10^{-10}\,N\,.$$

El teorema de Pitágoras da:

$$F_{tot,A} = \sqrt{2F_A^2} = \sqrt{2(1{,}33\times10^{-10})^2} = 1{,}89\times10^{-10}\,N\,.$$

Vectorialmente:

$$\boxed{\vec{F}_{tot,A} = -1{,}89\times10^{-10}\,\vec{j}\ (N)\quad :\ \text{RESULTADO}}$$

$$F_B = G\frac{mm'}{d_B^2} = 6{,}67\times10^{-11}\,\frac{20\times0{,}2}{1^2} = 2{,}67\times10^{-10}\,N$$

$$F_{tot,B} = F_B - F_B = 0\ ; \qquad \vec{F}_{tot,B} = 0$$

Cálculo de las aceleraciones:

$$\vec{a}_A = \frac{\vec{F}_{tot,A}}{m'} = \frac{-1{,}89\times10^{-10}\,\vec{j}}{0{,}2} = -9{,}43\times10^{-10}\,\vec{j}\ (ms^{-2})$$

$$\vec{a}_B = \frac{\vec{F}_{tot,B}}{m'} = \frac{0}{0{,}2} = 0$$

RESULTADO

Cuatro masas puntuales idénticas de 6 kg cada una están situadas en los vértices de un cuadrado de lado igual a 2 m. Calcule:

a) el campo gravitatorio que crean las cuatro masas en el centro de cada lado del cuadrado;

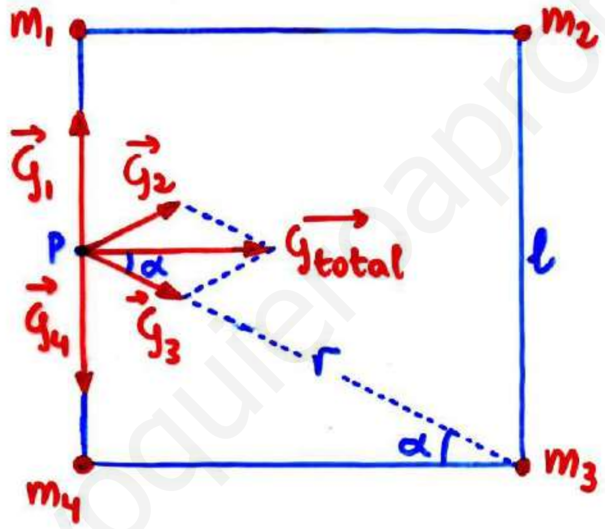
b) el potencial gravitatorio creado por las cuatro masas en el centro del cuadrado, tomando el infinito como origen de potenciales.

Dato: Constante de Gravitación Universal: $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ Nm^2kg^{-2}$.

(Pruebas de acceso a la Universidad – Madrid, modelo 2008)

SOLUCIÓN.-

a)



Las distancias de m_2 y m_3 al punto P valen, según el teorema de Pitágoras:

$$r^2 = \ell^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = 2^2 + 1^2 = 5\ m^2.$$

Aplicando la ley de gravitación universal, cada una de las intensidades del campo gravitatorio (fuerza ejercida sobre una masa unidad) en el punto P valen:

Masa m_1.- $g_1 = G\dfrac{m_1}{\left(\frac{l}{2}\right)^2} = 6,67\times10^{-11}\dfrac{6}{1^2} = 4\times10^{-10}\ N\,kg^{-1}$

Masa m_2.- $g_2 = G\dfrac{m_2}{r^2} = 6,67\times10^{-11}\dfrac{6}{5} = 8\times10^{-11}\ N\,kg^{-1}$

Masa m_3.- $g_3 = G\dfrac{m_3}{r^2} = 6,67\times10^{-11}\dfrac{6}{5} = 8\times10^{-11}\ N\,kg^{-1} = g_2$

Masa m_4.- $g_4 = G\dfrac{m_4}{\left(\frac{l}{2}\right)^2} = 6,67\times10^{-11}\dfrac{6}{1^2} = 4\times10^{-10}\ N\,kg^{-1} = g_1$

De la figura anterior vemos:

$\vec{g}_1 = -\vec{g}_4\ ; \quad \vec{g}_1 + \vec{g}_4 = 0$

$\vec{g}_{total} = \vec{g}_2 + \vec{g}_3$

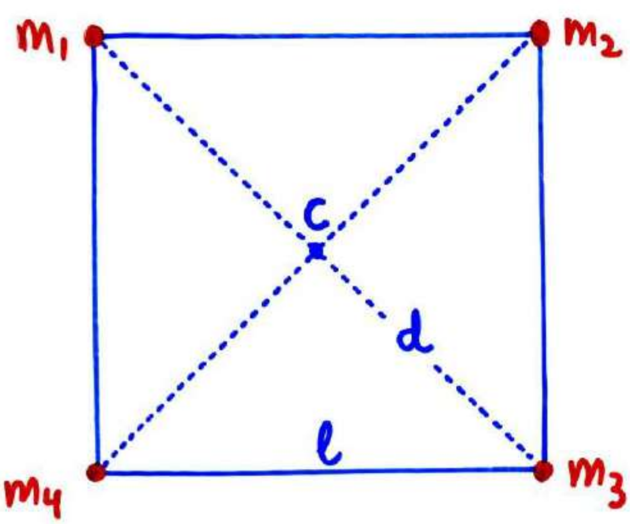
$g_{total} = 2g_2\cos\alpha = 2\times8\times10^{-11}\dfrac{l}{r} = 2\times8\times10^{-11}\dfrac{2}{\sqrt{5}} =$

$= 1,43\times10^{-10}\ N\,kg^{-1}$

La intensidad del campo gravitatorio resultante en el centro de cada lado del cuadrado es un vector perpendicular a dicho lado, apuntando al centro del cuadrado y cuyo módulo vale: $1,43\times10^{-10}\ N\,kg^{-1}$!

RESULTADO

b)



Aplicando de nuevo el teorema de Pitágoras vemos que:

$$d^2+d^2=2d^2=l^2; \quad d=\frac{l}{\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=1{,}41\ m.$$

Al ser las cuatro masas iguales y equidistar del centro del cuadrado el potencial debido a cada una de ellas en dicho punto central es el mismo:

$$V_1=V_2=V_3=V_4=-G\frac{m}{d}=-6{,}67\times10^{-11}\frac{6}{1{,}41}=-2{,}83\times10^{-10}\ J\,kg^{-1}$$

Y, finalmente:

$$\boxed{V_{total}=4V_i=4(-2{,}83\times10^{-10})=-1{,}13\times10^{-9}\ J\,kg^{-1}}$$

RESULTADO

a) ¿Cómo se define la gravedad en un punto de la superficie terrestre?. ¿Dónde será mayor la gravedad: en los Polos o en un punto del Ecuador?.

b) ¿Cómo varía la gravedad con la altura?. ¿Qué relación existe entre la gravedad a una altura *h* y la gravedad en la superficie terrestre?. Razona las respuestas.

(*Pruebas de acceso a la Universidad − Madrid, septiembre 1997*)

SOLUCIÓN:

De acuerdo a las leyes de Newton de gravitación universal y fundamental de la Dinámica, la aceleración de la gravedad en la superficie terrestre: "g", vale:

$$F = G\frac{m_T m}{R_T^2} = mg \Rightarrow \boxed{g = G\frac{m_T}{R_T^2} \approx 9{,}80\ ms^{-2} : \text{RESULTADO}}$$

Al no ser la Tierra una esfera perfecta, sino que está achatada en los polos y ensanchada en el ecuador, tenemos:

$$R_{T\,ecuador} > R_{T\,polo} \Rightarrow \boxed{g_{ecuador} < g_{polo} : \text{RESULTADO}}$$

La ley de gravitación universal da, para un punto situado a una altura "h" sobre la superficie terrestre:

$$F = G\frac{m_T\, m}{(h+R_T)^2} \Rightarrow \boxed{g_h = G\frac{m_T}{(h+R_T)^2} : \text{RESULTADO}}$$

Comparando con la aceleración de la gravedad en la superficie:

$$\boxed{\frac{g_{sup}}{g_h} = \frac{G\frac{m_T}{R_T^2}}{G\frac{m_T}{(h+R_T)^2}} = \left(\frac{h+R_T}{R_T}\right)^2 : \text{RESULTADO}}$$

En todo momento se ha considerado la Tierra gravitatoriamente equivalente a una partícula, de masa la total: m_T, situada en el centro del planeta (teorema de Gauss).

a) Exprese la aceleración de la gravedad en la superficie de un planeta en función de la masa del planeta, de su radio y de la constante de gravitación universal G.

b) Si la aceleración de la gravedad sobre la superficie terrestre vale 9,8 $m \cdot s^{-2}$, calcule la aceleración de la gravedad a una altura sobre la superficie terrestre igual al radio de la Tierra.

(Pruebas de acceso a la Universidad − Madrid, septiembre 2011)

SOLUCIÓN.-

De acuerdo con el Teorema de Gauss del campo gravitatorio, el planeta es gravitatoriamente equivalente a una partícula cuya masa es la de dicho planeta y que está situada en el centro del planeta, lo que nos permite utilizar la Ley de gravitación universal, tomando siempre distancias hacia el centro del planeta.

Así, para un cuerpo situado en la superficie del planeta, la fuerza gravitatoria con que éste lo atrae: su peso vale:

$$F = G\frac{m_{planeta} \cdot m}{R^2_{planeta}} = m g_{sup} \qquad ;$$

de donde la aceleración de la gravedad en la superficie del planeta vale:

$$\boxed{g_{sup} = G\frac{m_{planeta}}{R^2_{planeta}} \quad : \text{ RESULTADO}}$$

En la expresión anterior:

G: constante de gravitación universal.

$m_{planeta}$: masa del planeta.

$R_{planeta}$: radio del planeta.

Para la Tierra, tenemos:

- En la superficie (distancia al centro: R_T)

$$g_{sup} = G\frac{m_T}{R_T^2} = 9{,}8\ m\cdot s^{-2}$$

- A una altura: $h = R_T$ sobre la superficie:

Distancia al centro: $2R_T$

$$g(h=R_T) = G\frac{m_T}{(2R_T)^2} = G\frac{m_T}{4R_T^2} = \frac{G\frac{m_T}{R_T^2}}{4} = \frac{g_{sup}}{4}$$

$$\boxed{g(h=R_T) = \frac{9{,}8}{4} = 2{,}45\ m\cdot s^{-2}\ :\ \text{RESULTADO}}$$

Llamando g_0 y V_0 a la intensidad del campo gravitatorio y al potencial gravitatorio en la superficie terrestre respectivamente, determine en función del radio de la Tierra:

a) la altura sobre la superficie terrestre a la cual la intensidad del campo gravitatorio es $g_0/2$;

b) la altura sobre la superficie terrestre a la cual el potencial gravitatorio es $V_0/2$.

(Pruebas de acceso a la Universidad − Madrid, junio 2006)

SOLUCIÓN.-

Recordamos que la Tierra es gravitatoriamente equivalente a una masa puntual de valor el de la masa del planeta: m_T situada en su centro (teorema de Gauss). Con las expresiones del módulo de la intensidad del campo gravitatorio: g y del potencial gravitatorio: V para ésta, tenemos:

1) En la superficie terrestre:

$$g_0 = G\frac{m_T}{R_T^2} \; ; \quad V_0 = -G\frac{m_T}{R_T} \; .$$

2) A una altura h_1:

$$g_1 = G\frac{m_T}{r_1^2} = G\frac{m_T}{(h_1+R_T)^2} = \frac{g_0}{2} = G\frac{m_T}{2R_T^2} \; ;$$

de donde:

$$h_1 + R_T = \sqrt{2}\,R_T \; ; \quad \boxed{h_1 = R_T(\sqrt{2}-1) = 0{,}41\,R_T : \text{RESULTADO}}$$

3) A una altura h_2:

$$V_2 = -G\frac{m_T}{r_2} = -G\frac{m_T}{h_2+R_T} = \frac{V_0}{2} = -G\frac{m_T}{2R_T} \; ; \quad \boxed{h_2 = R_T : \text{RESULTADO}}$$

FÍSICA DE 2º DE BACHILLERATO   MECÁNICA E INTERACCIÓN GRAVITATORIA

a) ¿A qué altitud tendrá una persona la mitad del peso que tiene sobre la superficie terrestre?. Exprese el resultado en función del radio terrestre.

b) Si la fuerza de la gravedad actúa sobre todos los cuerpos en proporción a sus masas, ¿por qué no cae un cuerpo pesado con mayor aceleración que un cuerpo ligero?.

(Pruebas de acceso a la Universidad − Madrid, modelo 2002)

SOLUCIÓN:

Recordando que, según el Teorema de Gauss, la Tierra es gravitatoriamente equivalente (para puntos de su superficie ó exteriores) a una masa puntual de valor igual a la masa del planeta y situada en su centro, la ley de gravitación universal de Newton da el peso de un objeto de masa m situado a distancia r del centro terrestre:

• en la superficie: $P_{sup} = G\dfrac{m_T m}{R_T^2}$

• a distancia r del centro de la Tierra:

$$P_r = \frac{P_{sup}}{2} \;;\; G\frac{m_T m}{r^2} = G\frac{m_T m}{2R_T^2} \;;\text{ de donde:}$$

$$\boxed{r = R_T\sqrt{2} \;:\; \text{RESULTADO}}$$

Según la ley fundamental de la Dinámica, la aceleración - de la gravedad - con que caen los cuerpos vale:

$$G\frac{m_T m}{r^2} = mg \;;\; g(r) = G\frac{m_T}{r^2}$$

, por lo que dicha aceleración es independiente de la masa del objeto : RESULTADO

a) ¿Cuál es la aceleración de la gravedad en la superficie de un planeta esférico cuyo radio es la mitad del de la Tierra y posee la misma densidad media?.

b) ¿Cuál sería el período de la órbita circular de un satélite situado a una altura de 400 km respecto a la superficie del planeta?.

Datos:

Radio de la Tierra: $R_T = 6.371$ km

Aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra: $g = 9,8\ ms^{-2}$.

(Pruebas de acceso a la Universidad − Madrid, septiembre 2007)

Solución.-

Igualando las expresiones que para el peso de un objeto en la superficie de un planeta esférico de radio R_P y masa M_P dan las leyes fundamental de la Dinámica y de gravitación universal, tenemos:

$$mg_P = G\frac{M_P m}{R_P^2} \ ; \text{ de donde: } \ g_P = G\frac{M_P}{R_P^2}.$$

Dado que: $R_P = \frac{R_T}{2}$, comparando las densidades medias:

$$\rho_P = \rho_T \ ; \ \frac{M_P}{\frac{4}{3}\pi R_P^3} = \frac{M_P}{\frac{4}{3}\pi\left(\frac{R_T}{2}\right)^3} = \frac{8M_P}{\frac{4}{3}\pi R_T^3} = \frac{M_T}{\frac{4}{3}\pi R_T^3} \ ;$$

de donde: $M_P = \frac{M_T}{8}$, con lo cual:

$$\boxed{g_P = G\frac{M_P}{R_P^2} = G\frac{\frac{M_T}{8}}{\left(\frac{R_T}{2}\right)^2} = G\frac{M_T}{2R_T^2} = \frac{g_T}{2} = \frac{9,8}{2} = 4,9\ ms^{-2}}$$

RESULTADO

Si un satélite orbita en torno al planeta a una altura: $h = 400\,km$ sobre su superficie es porque la fuerza gravitatoria con que lo atrae el planeta es una fuerza centrípeta. Igualando las expresiones de ambas, y recordando la de la velocidad lineal del satélite, tenemos:

$$F_{cp} = F_{grav}; \quad m\frac{v^2}{R_P+h} = G\frac{m_P m}{(R_P+h)^2}; \quad v = \frac{2\pi(R_P+h)}{T}$$

$$\frac{\left[\frac{2\pi(R_P+h)}{T}\right]^2}{R_P+h} = G\frac{m_P}{(R_P+h)^2}; \quad \frac{4\pi^2(R_P+h)}{T^2} = G\frac{\frac{m_T}{8}}{(R_P+h)^2}$$

despejando el período: T, queda:

$$T = \sqrt{\frac{32\pi^2(R_P+h)^3}{G m_T}} = \sqrt{\frac{32\pi^2\left(\frac{R_T}{2}+h\right)^3}{G\frac{m_T}{R_T^2}R_T^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{32\pi^2\left(\frac{R_T}{2}+h\right)^3}{g_T R_T^2}} = \sqrt{\frac{32\pi^2\left(\frac{6{,}371\times10^6}{2}+4\times10^5\right)^3}{9{,}8(6{,}371\times10^6)^2}}$$

$$\boxed{T = 6.049{,}63\,s \quad : \quad \text{RESULTADO}}$$

a) ¿Cuál es la velocidad de escape de un objeto situado en la superficie de la Tierra?.

b) ¿Cómo influye la dirección con que se lanza un objeto desde la superficie de la Tierra en su velocidad de escape?.

(Pruebas de acceso a la Universidad − Madrid, septiembre 1998)

SOLUCIÓN:

La velocidad de escape desde la superficie de la Tierra es la asociada a la energía cinética mínima que ha de tener inicialmente el objeto para al final alejarse infinitamente del planeta (y, en consecuencia, escapar de su campo gravitatorio) aunque sea llegando a este punto final con velocidad nula.

Aplicando el Principio de conservación de la energía mecánica, y recordando que la Tierra es gravitatoriamente equivalente a una partícula de masa la total: m_T, situada en el centro del planeta, queda:

$$Ec_{sup} + Ep_{sup} = Ec_{\infty} + Ep_{\infty} \ ; \ \frac{1}{2} m v_{esc}^2 - G\frac{m_T m}{R_T} = \frac{1}{2} m \cdot 0^2 - G\frac{m_T m}{\infty} = 0$$

Por tanto:

$$\boxed{v_{esc} = \sqrt{\frac{2Gm_T}{R_T}} = \sqrt{\frac{2 \times 6{,}67 \times 10^{-11} \times 5{,}98 \times 10^{24}}{6{,}37 \times 10^6}} = 11.190{,}74\ \mathrm{m\,s^{-1}}}$$

RESULTADO

Al ser la energía una magnitud escalar,

la dirección de la velocidad inicial -escape- no influye en el resultado antes obtenido.

a) A partir de su significado físico, deduzca la expresión de la velocidad de escape de un cuerpo desde la superficie terrestre en función de la masa y el radio del planeta.

b) Sabiendo que la intensidad del campo gravitatorio en la Luna es 1/6 de la de la Tierra, obtenga la relación entre las velocidades de escape de ambos astros.

Datos: $R_T = 4\ R_L$ (R_T = radio de la Tierra ; R_L = radio de la Luna).

(Pruebas de acceso a la Universidad − Madrid, junio 2010 -Materias coincidentes-)

SOLUCIÓN.-

La velocidad de escape de un cuerpo lanzado desde la superficie terrestre es la velocidad mínima que debe tener ese cuerpo a la salida para que llegue a distancia infinita de la Tierra y, en consecuencia, "escape" de su campo gravitatorio. En este caso, si la velocidad inicial es la velocidad de escape la velocidad final -en el infinito- será nula -la mínima-.

Recordando que el campo gravitatorio es conservativo, el Principio de conservación de la energía mecánica establece que:

$$E_{ci} + E_{pi} = E_{cf} + E_{pf} ; \quad \frac{1}{2} m v_{esc}^2 - G\frac{m_T m}{R_T} = \frac{1}{2} m \cdot 0^2 - G\frac{m_T m}{\infty}$$

Despejando, obtenemos el módulo de la velocidad de escape:

$$\boxed{v_{esc} = \sqrt{\frac{2Gm_T}{R_T}} \quad : \text{RESULTADO}}$$

El módulo de la intensidad del campo gravitatorio -que coincide con el de la aceleración de la gravedad- en la superficie de la Tierra vale:

$$\mathcal{G}_T = g_T = G\,\frac{m_T}{R_T^2} \quad .$$

Tomando las expresiones análogas para la superficie de la Luna, encontramos la relación entre los módulos de las velocidades de escape desde la superficie de ambos astros:

$$\frac{v_{esc}(T)}{v_{esc}(L)} = \frac{\sqrt{\dfrac{2Gm_T}{R_T}}}{\sqrt{\dfrac{2Gm_L}{R_L}}} = \frac{\sqrt{\dfrac{Gm_T}{R_T^2}R_T}}{\sqrt{\dfrac{Gm_L}{R_L^2}R_L}} = \sqrt{\frac{\mathcal{G}_T}{\mathcal{G}_L}\cdot\frac{R_T}{R_L}} =$$

$$= \sqrt{\frac{6\,\mathcal{G}_L}{\mathcal{G}_L}\cdot\frac{4R_L}{R_L}} = \sqrt{24} = 4{,}90 \quad .$$

RESULTADO

Razone si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

a) El valor de la velocidad de escape de un objeto lanzado desde la superficie de la Tierra depende de la masa del objeto.

b) En el movimiento elíptico de un planeta en torno al Sol la velocidad del planeta en el perihelio (posición más próxima al Sol) es mayor que la velocidad en el afelio (posición más alejada del Sol).

(Pruebas de acceso a la Universidad − Madrid, septiembre 2009)

SOLUCIÓN.-

La velocidad de escape es la velocidad mínima que debe tener el objeto al salir desde la superficie de la Tierra para que llegue a distancia infinita - escape del campo gravitatorio - con velocidad final nula. Dado que este campo gravitatorio es conservativo, si aplicamos el Principio de conservación de la energía mecánica en la superficie terrestre y en el infinito, tenemos:

$$Ec_{sup} + Ep_{grav\,sup} = Ec_{\infty} + Ep_{grav\,\infty}$$

$$\frac{1}{2} m v_{esc}^2 - G\frac{m_T m}{R_T} = 0 - G\frac{m_T m}{\infty} = 0 \text{ ; de donde:}$$

$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2Gm_T}{R_T}}$$

comprobando que:

La velocidad de escape no depende de la masa del objeto lanzado: RESULTADO

La fuerza gravitatoria con que el planeta es atraído por el Sol es central, lo que implica que el momento angular del planeta respecto al centro del Sol es constante. Comparando los módulos del momento angular en el perihelio y en el afelio, para el planeta de masa m tenemos:

$$L_a = L_p \;; \quad r_a m v_a = r_p m v_p \;;$$

y si $r_a > r_p$ ello implica que:

$\boxed{v_a < v_p}$: RESULTADO

En resumen:

La afirmación a) es falsa.
La afirmación b) es verdadera.
RESULTADO

Al ser mayor la rapidez cuanto menor es la distancia Sol-planeta la línea que une ambos barre áreas iguales en intervalos de tiempo iguales -segunda Ley de Kepler, Ley de las áreas-.

FÍSICA DE 2º DE BACHILLERATO MECÁNICA E INTERACCIÓN GRAVITATORIA

Un planeta esférico tiene un radio de 3.000 km, y la aceleración de la gravedad en su superficie es 6 m/s^2.

a) ¿Cuál es su densidad media?.

b) ¿Cuál es la velocidad de escape para un objeto situado en la superficie de este planeta?.

Dato:

Constante de Gravitación Universal: $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ Nm^{2}kg^{-2}

(Pruebas de acceso a la Universidad − Madrid, junio 2002)

SOLUCIÓN:

Igualando las expresiones de la fuerza gravitatoria -peso- según las leyes de gravitación universal y fundamental de la Dinámica, despejamos g:

$$F = G\frac{mm'}{R^2} = m'g_{sup} \; ; \; g_{sup} = G\frac{m}{R^2} \quad \left\{ \begin{array}{l} m: \text{masa del planeta} \\ R: \text{radio del planeta.} \end{array} \right.$$

Recordando la definición de densidad, el volumen de un cuerpo esférico y operando, resulta:

$$\rho_m = \frac{m}{V} = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{G\frac{m}{R^2}}{\frac{4}{3}\pi G R} = \frac{g_{sup}}{\frac{4}{3}\pi G R} = \frac{6}{\frac{4}{3}\pi \times 6{,}67\times 10^{-11} \times 3\times 10^6}$$

$$\boxed{\rho_m = 7.158{,}39 \text{ kgm}^{-3} : \text{RESULTADO}}$$

La velocidad de escape es la que inicialmente ha de poseer un objeto para que llegue a distancia infinita del planeta -con velocidad allí nula- y, así, logre escapar de su campo gravitatorio.

Dado que este campo es conservativo podemos encontrar la velocidad de escape pedida aplicando el principio de conservación de la energía mecánica.

Recordando las expresiones de las energías cinética y potencial gravitatoria, si comparamos las energías mecánicas en la superficie del planeta y en el infinito, resulta:

$$Ec_{sup} + Ep_{sup} = Ec_{\infty} + Ep_{\infty}$$

$$\frac{1}{2}m'v_{esc}^2 - G\frac{mm'}{R} = 0 + 0 = 0$$; finalmente:

$$\boxed{v_{esc} = \sqrt{\frac{2Gm}{R}} = \sqrt{2g_{sup}R} = \sqrt{2 \times 6 \times 3 \times 10^6} = 6.000\ ms^{-1}}$$

RESULTADO

Sabiendo que la aceleración de la gravedad en un movimiento de caída libre en la superficie de la Luna es un sexto de la aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra y que el radio de la Luna es aproximadamente 0,27 R_T (siendo R_T el radio terrestre), calcule:

a) la relación entre las densidades medias $\rho_{Luna} / \rho_{Tierra}$;

b) la relación entre las velocidades de escape de un objeto desde sus respectivas superficies $(v_e)_{Luna} / (v_e)_{Tierra}$.

(Pruebas de acceso a la Universidad − Madrid, junio 2007)

Solución.-

Si comparamos las expresiones que para la fuerza gravitatoria en la superficie de la Luna y de la Tierra dan las leyes de gravitación universal y fundamental de la Dinámica, obtenemos:

• Luna: $G\dfrac{m_L m}{R_L^2} = m g_L$; de donde: $\dfrac{m_L}{R_L^2} = \dfrac{g_L}{G}$

• Tierra: $G\dfrac{m_T m}{R_T^2} = m g_T$; de donde: $\dfrac{m_T}{R_T^2} = \dfrac{g_T}{G}$.

La relación entre las densidades medias lunar y terrestre es:

$$\frac{\rho_L}{\rho_T} = \frac{\dfrac{m_L}{\frac{4}{3}\pi R_L^3}}{\dfrac{m_T}{\frac{4}{3}\pi R_T^3}} = \frac{\dfrac{m_L/R_L^2}{R_L}}{\dfrac{m_T/R_T^2}{R_T}} = \frac{\dfrac{g_L}{G R_L}}{\dfrac{g_T}{G R_T}} = \frac{\dfrac{g_T}{6\times 0{,}27 R_T}}{\dfrac{g_T}{R_T}} = \frac{1}{6\times 0{,}27}$$

$$\boxed{\frac{\rho_L}{\rho_T} = 0{,}62 \text{ : RESULTADO}}$$

Para un objeto situado en la superficie de la Luna -o de la Tierra- la **velocidad de escape** es la que debería tener el objeto para, como mínimo, alejarse hasta el infinito aunque llegase allí con velocidad final nula, lo que supondría su salida del campo gravitatorio. Calculamos esta velocidad de escape aplicando el Principio de conservación de la energía mecánica en la superficie y en el infinito:

$$E_{C_S} + E_{P_S} = E_{C\infty} + E_{P\infty}; \quad \frac{1}{2} m v_e^2 - G\frac{m_P m}{R_P} = 0 + 0 = 0;$$

de donde: $$v_e = \sqrt{\frac{2Gm_P}{R_P}} \; .$$

La comparación pedida es:

$$\frac{v_{e_L}}{v_{e_T}} = \frac{\sqrt{\frac{2Gm_L}{R_L}}}{\sqrt{\frac{2Gm_T}{R_T}}} = \frac{\sqrt{2G\frac{m_L}{R_L^2}R_L}}{\sqrt{2G\frac{m_T}{R_T^2}R_T}} = \sqrt{\frac{g_L R_L}{g_T R_T}} = \sqrt{\frac{\frac{0{,}27}{6}g_T R_T}{g_T R_T}} =$$

$$= \sqrt{\frac{0{,}27}{6}} \; . \qquad \boxed{\frac{v_{e_L}}{v_{e_T}} = 0{,}21 \; : \text{RESULTADO}}$$

FÍSICA DE 2º DE BACHILLERATO **MECÁNICA E INTERACCIÓN GRAVITATORIA**

Suponiendo un planeta esférico que tiene un radio la mitad del radio terrestre e igual densidad que la Tierra, calcule:

a) la aceleración de la gravedad en la superficie de dicho planeta;

b) la velocidad de escape de un objeto desde la superficie del planeta, si la velocidad de escape desde la superficie terrestre es 11,2 km/s.

Dato:
Aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra: $g = 9{,}81\ \mathrm{ms^{-2}}$.

(Pruebas de acceso a la Universidad − Madrid, junio 2003)

SOLUCIÓN.-

Recordando la expresión del volumen de los planetas esféricos -suponiendo que la Tierra lo es también- e igualando sus densidades queda:

$$\rho_P = \rho_T\ ;\ \frac{m_P}{\frac{4}{3}\pi R_P^3} = \frac{m_T}{\frac{4}{3}\pi R_T^3}\ ,\ \text{de donde:}$$

$$\frac{m_P}{R_P^2} = \frac{m_T R_P}{R_T^3} = \frac{m_T R_T/2}{R_T^3} = \frac{m_T}{2R_T^2}\ ,\ \text{y también:}$$

$$\frac{m_P}{R_P} = \frac{m_T R_P^2}{R_T^3} = \frac{m_T (R_T/2)^2}{R_T^3} = \frac{m_T}{4R_T}\ .$$

Para calcular el valor numérico de la aceleración de la gravedad en la superficie del planeta igualamos las expresiones del peso de un objeto de masa m situado allí que dan la ley fundamental de la Dinámica y la ley de gravitación universal, despejando a continuación g_P:

$$P_p = mg_p = \frac{G m_p m}{R_p^2} \; ; \; g_p = G\frac{m_p}{R_p^2} .$$

Análogamente, en la superficie terrestre:

$$g_T = G\frac{m_T}{R_T^2} = 9{,}81\ ms^{-2} .$$

Relacionando ambas aceleraciones de la gravedad tenemos, finalmente:

$$\boxed{g_p = G\frac{m_p}{R_p^2} = G\frac{m_T}{2R_T^2} = \frac{g_T}{2} = 4{,}91\ ms^{-2} : \text{RESULTADO}}$$

La velocidad de escape para un objeto situado en la superficie del planeta es la que debe tener inicialmente para lograr llegar a distancia infinita del mismo -salir de su campo gravitatorio-, con velocidad final nula.

Aplicando el Principio de conservación de la energía en la superficie y a distancia infinita, resulta:

$$Ec_{i(sup)} + Ep_{i(sup)} = Ec_{f(\infty)} + Ep_{f(\infty)}$$

$$\frac{1}{2} m v_{esc_p}^2 - G\frac{m_p m}{R_p} = \frac{1}{2} m \times 0^2 - G\frac{m_p m}{\infty} = 0 \text{ ; de donde:}$$

$$v_{esc_p} = \sqrt{\frac{2Gm_p}{R_p}} .$$

Análogamente, en la superficie terrestre:

$$v_{esc,T} = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}} \quad .$$

Relacionando ambas velocidades de escape queda:

$$v_{esc,P} = \sqrt{\frac{2GM_P}{R_P}} = \sqrt{\frac{2GM_T}{4R_T}} = \sqrt{\frac{\frac{2GM_T}{R_T}}{4}} = \frac{v_{esc,T}}{2}$$

$$\boxed{v_{esc,P} = \frac{11{,}2\ km/s}{2} = 5{,}6\ km\,s^{-1} = 5{,}6 \times 10^3\ m\,s^{-1}}$$

RESULTADO

FÍSICA DE 2º DE BACHILLERATO MECÁNICA E INTERACCIÓN GRAVITATORIA

Un planeta esférico tiene una masa igual a 27 veces la masa de la Tierra, y la velocidad de escape para objetos situados cerca de su superficie es tres veces la velocidad de escape terrestre. Determine:

a) La relación entre los radios del planeta y de la Tierra.

b) La relación entre las intensidades de la gravedad en puntos de la superficie del planeta y de la Tierra.

(Pruebas de acceso a la Universidad − Madrid, modelo 2003)

SOLUCIÓN:

La velocidad de escape es la que debe tener un cuerpo para lograr escapar de la atracción gravitatoria del planeta: llegar a distancia infinita de él con velocidad nula.

Dado que la fuerza gravitatoria es conservativa, aplicando el Principio de conservación de la energía mecánica en la superficie del planeta y a distancia infinita de él tenemos:

$$E_{c_{sup}} + E_{p_{sup}} = E_{c_\infty} + E_{p_\infty}$$

$$\frac{1}{2} m v_{esc}^2 - G\frac{m_P m}{R_P} = \frac{1}{2} m v_\infty^2 - G\frac{m_P m}{\infty} = 0 - 0 = 0\ ;$$

de donde, despejando R_P queda: $R_P = \dfrac{2Gm_P}{v_{esc}^2}$.

Comparando los radios del planeta y la Tierra:

$$\boxed{\frac{R_P}{R_T} = \frac{\dfrac{2Gm_P}{v_{esc,P}^2}}{\dfrac{2Gm_T}{v_{esc,T}^2}} = \frac{m_P v_{esc,T}^2}{m_T v_{esc,P}^2} = \frac{27 m_T v_{esc,T}^2}{m_T (3v_{esc,T})^2} = \frac{27}{9} = 3}$$

RESULTADO

De acuerdo al teorema de Gauss, según el cual debemos considerar el planeta como gravitatoriamente equivalente a una partícula cuya masa coincide con la total del planeta y que se halla en el centro de éste, la intensidad del campo gravitatorio -que numéricamente coincide con la aceleración de la gravedad- en la superficie del planeta vale, en módulo:

$$g_{P,sup} = G\frac{m_P}{R_P^2} \quad .$$

Comparando los valores referidos a ese planeta y a la Tierra, tenemos:

$$\boxed{\frac{g_{P,sup}}{g_{T,sup}} = \frac{G\dfrac{m_P}{R_P^2}}{G\dfrac{m_T}{R_T^2}} = \frac{m_P R_T^2}{m_T R_P^2} = \frac{27 m_T R_T^2}{m_T (3R_T)^2} = \frac{27}{9} = 3}$$

RESULTADO

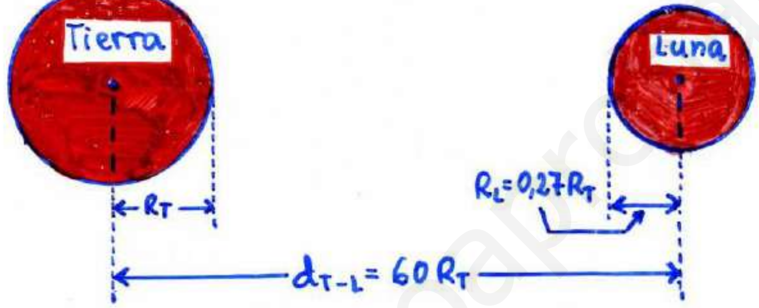
a) Compara las fuerzas de atracción gravitatoria que ejercen la Luna y la Tierra sobre un cuerpo de masa m que se halla situado en la superficie de la Tierra. ¿A qué conclusión llegas?.

b) Si el peso de un cuerpo en la superficie de la Tierra es de 100 kp, ¿cuál sería el peso de ese mismo cuerpo en la superficie de la Luna?.

Datos: La masa de la Tierra es 81 veces la masa de la Luna.
La distancia entre los centros de la Tierra y la Luna es de 60 radios terrestres.
El radio de la Luna es 0,27 veces el radio de la Tierra.

(*Pruebas de acceso a la Universidad − Madrid, junio 1997*)

SOLUCIÓN:



Según el teorema de Gauss, la Tierra y la Luna equivalen a sendas partículas, de masas las totales: m_T y m_L, situadas en sus respectivos centros. Con ésto, y aplicando la ley de gravitación universal:

$$\boxed{\frac{F_{gr,L}}{F_{gr,T}} = \frac{G\dfrac{m_L m}{(d_{T-L}-R_T)^2}}{G\dfrac{m_T m}{R_T^2}} = \frac{G\dfrac{m_L m}{(59 R_T)^2}}{G\dfrac{m_T m}{R_T^2}} = \frac{1}{59^2} = 2{,}87\times10^{-4} \approx 0 : \text{RESULTADO}}$$

Conclusión: a la hora de calcular el peso de un cuerpo en la superficie terrestre se puede despreciar el efecto debido a la atracción gravitatoria lunar.

La masa de un cuerpo de 100 kp de peso en la superficie terrestre es 100 kg. Su peso en la superficie lunar, con la ley de Newton, es:

$$P_L = G\frac{m_L m}{R_L^2} = G\frac{\frac{m_T}{81}m}{(0{,}27 R_T)^2} = \frac{1}{81\cdot 0{,}27^2}\left(G\frac{m_T}{R_T^2}\right)m = 0{,}17\cdot g_{sup,T}\cdot m \quad ; \text{por tanto:}$$

$$\boxed{P_L = 0{,}17\cdot 9{,}80\cdot 100 = 165{,}96\ \text{N} : \text{RESULTADO}}$$

FÍSICA DE 2º DE BACHILLERATO **MECÁNICA E INTERACCIÓN GRAVITATORIA**

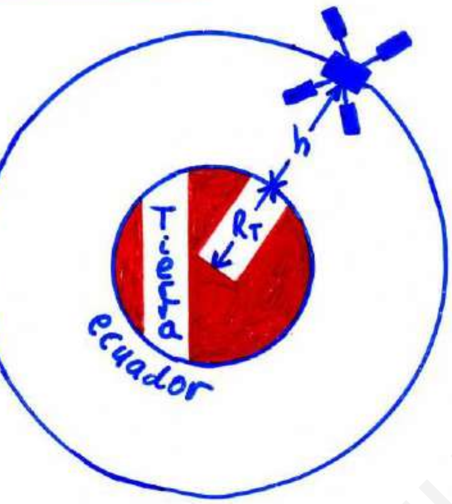
a) ¿Con qué frecuencia angular debe girar un satélite de comunicaciones, situado en una órbita ecuatorial, para que se encuentre siempre sobre el mismo punto de la Tierra?.

b) ¿A qué altura sobre la superficie terrestre se encontrará el satélite citado en el apartado anterior?.

Datos: Gravedad en la superficie de la Tierra = $9{,}8\ \text{ms}^{-2}$
Radio medio de la Tierra = $6{,}37 \times 10^6$ m.

(Pruebas de acceso a la Universidad − Madrid, septiembre 2000)

SOLUCIÓN:



La situación que plantea el enunciado corresponde a un satélite geoestacionario.

Para que el satélite permanezca siempre sobre el mismo punto de la superficie terrestre debe orbitar sincronizadamente con la rotación de la Tierra, por lo que su período orbital será un día y su frecuencia angular valdrá:

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{86.400} = 7{,}27 \times 10^{-5}\ \text{rad s}^{-1} : \text{RESULTADO}}$$

El movimiento orbital del satélite es circular uniforme dado que la fuerza con que la Tierra lo atrae gravitatoriamente es una fuerza centrípeta. Igualando las expresiones de ambas, según las leyes de gravitación universal y fundamental de la Dinámica, y recordando que la Tierra es gravitatoriamente equivalente a una partícula de masa la total del planeta, situada en el centro de éste (teorema de Gauss), obtenemos:

- gravedad en la superficie terrestre:

$$F_{sup} = G\frac{m_T m}{R_T^2} = m g_{sup} \;;\quad g_{sup} = 9{,}80\,ms^{-2} = G\frac{m_T}{R_T^2} \;;$$

de donde: $GM_T = R_T^2 g_{sup}$.

- Fuerza actuante sobre el satélite:

$$F_{grav} = F_{cp} \;;\qquad G\frac{m_T m_{sat}}{(R_T+h)^2} = m_{sat}\,\omega^2 (R_T+h) \;;$$

simplificando y despejando:

$$\frac{Gm_T}{\omega^2} = \frac{R_T^2 g_{sup}}{\omega^2} = (R_T+h)^3 \;;$$

$$\boxed{h = \sqrt[3]{\frac{R_T^2 g_{sup}}{\omega^2}} - R_T = \sqrt[3]{\frac{(6{,}37\times10^6)^2 \times 9{,}80}{(7{,}27\times10^{-5})^2}} - (6{,}37\times10^6) = 3{,}58\times10^7\,m}$$

RESULTADO

Un satélite que gira con la misma velocidad angular que la Tierra (geoestacionario) de masa: m = 5 $\times 10^3$ kg, describe una órbita circular de radio: r = 3,6 $\times 10^7$ m. Determine:

a) La velocidad areolar del satélite.

b) Suponiendo que el satélite describe su órbita en el plano ecuatorial de la Tierra, determine el módulo, la dirección y el sentido del momento angular respecto de los polos de la Tierra.

Dato: Período de rotación terrestre = 24 h.

(Pruebas de acceso a la Universidad − Madrid, junio 2011)

SOLUCIÓN.-

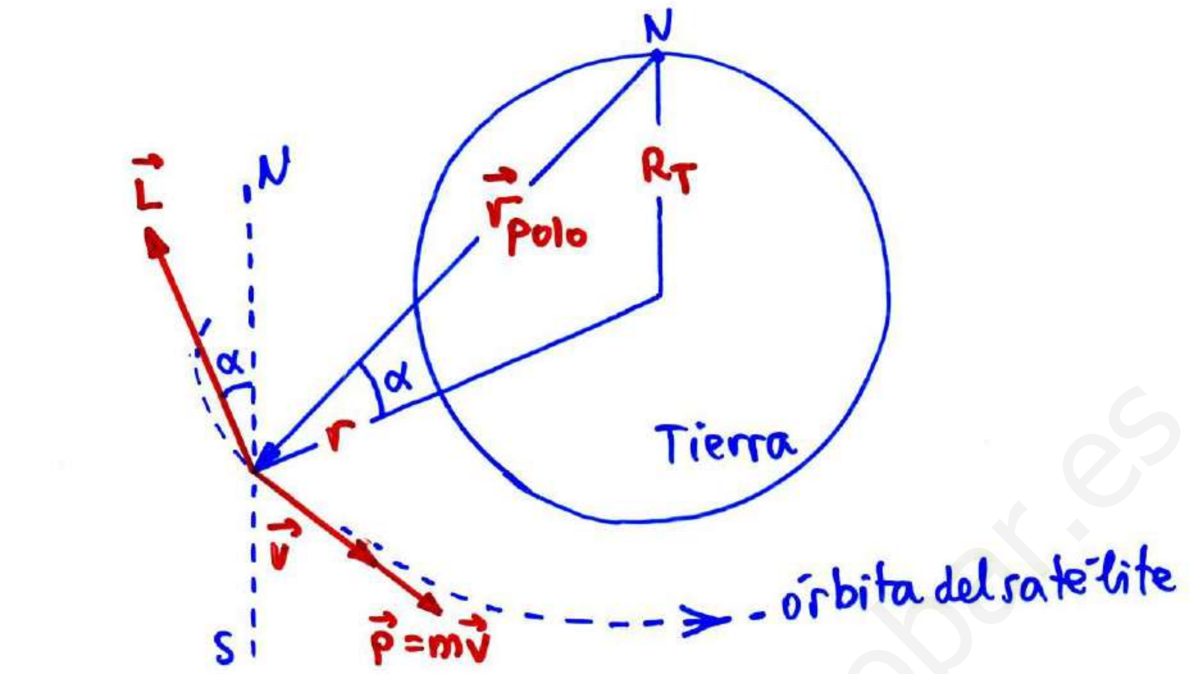
La **velocidad areolar** indica el ritmo al cual el radio vector que une el centro de la órbita con el satélite va barriendo el área de los sectores descritos. Si consideramos que el satélite describe un movimiento circular uniforme en una órbita ecuatorial esa velocidad areolar es **constante**, y vale:

$$\boxed{V_a = \frac{S}{T} = \frac{\pi r^2}{T} = \frac{\pi (3,6 \times 10^7)^2}{24 \times 60 \times 60} = 4,71 \times 10^{10}\ \frac{m^2}{s} : \text{RESULTADO}}$$

El módulo de la velocidad lineal del satélite geoestacionario vale:

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi \times 3,6 \times 10^7}{24 \times 60 \times 60} = 2,62 \times 10^3\ \frac{m}{s}$$

En la figura siguiente vemos el **vector momento angular** del satélite respecto al **polo Norte** de la Tierra:



Recordando que el radio de la Tierra vale:

$$R_T = 6{,}37 \times 10^6 \, m$$

(podemos tomar este dato del problema 1 de la opción B de este examen), en la figura vemos:

$$r_{polo} = \sqrt{r^2 + R_T^2} = \sqrt{(3{,}6\times10^7)^2 + (6{,}37\times10^6)^2} =$$
$$= 3{,}66 \times 10^7 \, m.$$

El **momento angular** es: $\vec{L} = \vec{r}_{polo} \times (m\vec{v})$.

Es un vector de módulo:

$$L = r_{polo} \cdot m \cdot v = 3{,}66\times10^7 \times 5\times10^3 \times 2{,}62\times10^3 = 4{,}79\times10^{14} \, \frac{kg\,m^2}{s}$$

y que forma un ángulo con la dirección Sur-Norte (hacia el norte):

$$\alpha = \text{arc tg}\,\frac{R_T}{r} = \text{arc tg}\,\frac{6{,}37\times10^6}{3{,}6\times10^7} \approx 10^\circ.$$

(Respecto al polo Sur, en la figura el vector iría orientado hacia el otro lado, con iguales características).

RESULTADO

Como es obvio, hemos respetado la información que ofrece el enunciado. Sin embargo, esa información es errónea, ya que el dato: $3{,}6\times10^7$ m para el satélite geoestacionario no es el radio de su órbita, sino su altura sobre la superficie terrestre.

También, como ya dijimos antes, se necesita el dato del radio de la Tierra: $R_T = 6{,}37\times10^6$ m.

En efecto, dado que para el satélite la fuerza gravitatoria con que la Tierra lo atrae es una fuerza centrípeta, y que, al ser geoestacionario su periodo orbital es un día, tenemos:

$$F_{grav} = F_{cpta}\ ;\ G\frac{m_T m}{r^2} = m\frac{v^2}{r} = m\frac{\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2}{r}\ ;\ \text{de donde:}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{G m_T T^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{6{,}67\times10^{-11}\times5{,}98\times10^{24}\times(24\times60\times60)^2}{4\pi^2}}$$

$$r = 4{,}23\times10^7 \text{ m} = h + R_T$$

$$h = 4{,}23\times10^7 - 6{,}37\times10^6 = 3{,}59\times10^7 \text{ m}\ .$$

Con el dato real del radio orbital, las soluciones pedidas habrían sido:

- **Velocidad areolar:**

$$v_a = \frac{\pi(4{,}23\times10^7)^2}{24\times60\times60} = 6{,}49\times10^{10}\ \text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$$

- Velocidad lineal orbital:

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi\cdot4{,}23\times10^7}{24\times60\times60} = 3{,}07\times10^3\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

- Distancia del satélite al polo:

$$r_{polo} = \sqrt{r^2 + R_T^2} = \sqrt{(4,23\times10^7)^2 + (6,37\times10^6)^2}\ m$$

$$r_{polo} = 4,27\times10^7\ m$$

- Módulo del momento angular del satélite respecto al polo:

$$L = r_{polo}\cdot m\cdot v = 4,27\times10^7 \times 5\times10^3 \times 3,07\times10^3\ kg\,m^2 s^{-1}$$

$$L = 6,56\times10^{14}\ kg\,m^2 s^{-1}$$

- Ángulo que forma el vector momento angular con la dirección sur-norte:

$$\alpha = \text{arc tg}\,\frac{R_T}{r} = \text{arc tg}\,\frac{6,37\times10^6}{4,23\times10^7} = 8^\circ 34' 26''$$

FÍSICA de 2º de BACHILLERATO **MECÁNICA E INTERACCIÓN GRAVITATORIA**

Un satélite artificial de 500 kg que describe una órbita circular alrededor de la Tierra se mueve con una velocidad de 6,5 km/s. Calcule:

a) la energía mecánica del satélite;

b) la altura sobre la superficie de la Tierra a la que se encuentra.

Datos:

Constante de Gravitación Universal: $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$

Masa de la Tierra: $m_T = 5{,}98 \times 10^{24}$ kg

Radio de la Tierra: $R_T = 6{,}37 \times 10^6$ m.

(Pruebas de acceso a la Universidad – Madrid, junio 2009)

SOLUCIÓN.-

El satélite describe un movimiento circular uniforme alrededor de la Tierra porque la fuerza gravitatoria con que ésta lo atrae es una fuerza centrípeta. Igualando los módulos de ambas, tenemos:

$$F_{grav} = G\frac{m_T m_{sat}}{r^2} = m_{sat}\frac{v^2}{r} = F_{cpta}$$; de donde:

$$G\frac{m_T m_{sat}}{r} = m_{sat} v^2$$, y también: $$r = \frac{G m_T m_{sat}}{m_{sat} v^2} = \frac{G m_T}{v^2}$$

La energía mecánica del satélite vale:

$$\boxed{\begin{aligned} E_{tot} &= E_c + E_p = \frac{1}{2}m_{sat}v^2 - G\frac{m_T m_{sat}}{r} = \frac{1}{2}m_{sat}v^2 - m_{sat}v^2 = \\ &= -\frac{1}{2}m_{sat}v^2 = -\frac{1}{2}500 \times (6{,}5 \times 10^3)^2 = -1{,}06 \times 10^{10}\ J \end{aligned}}$$

RESULTADO

De la expresión deducida antes para el radio de la órbita descrita por el satélite encontramos la altura: h a la que éste se halla sobre la superficie de la Tierra:

$$r = h + R_T = \frac{G m_T}{v^2} \quad ; \text{ despejando:}$$

$$h = \frac{G m_T}{v^2} - R_T = \frac{6{,}67 \times 10^{-11} \times 5{,}98 \times 10^{24}}{(6{,}5 \times 10^3)^2} - 6{,}37 \times 10^6$$

$$\boxed{h = 3{,}07 \times 10^6 \text{ m} \quad : \text{ RESULTADO}}$$

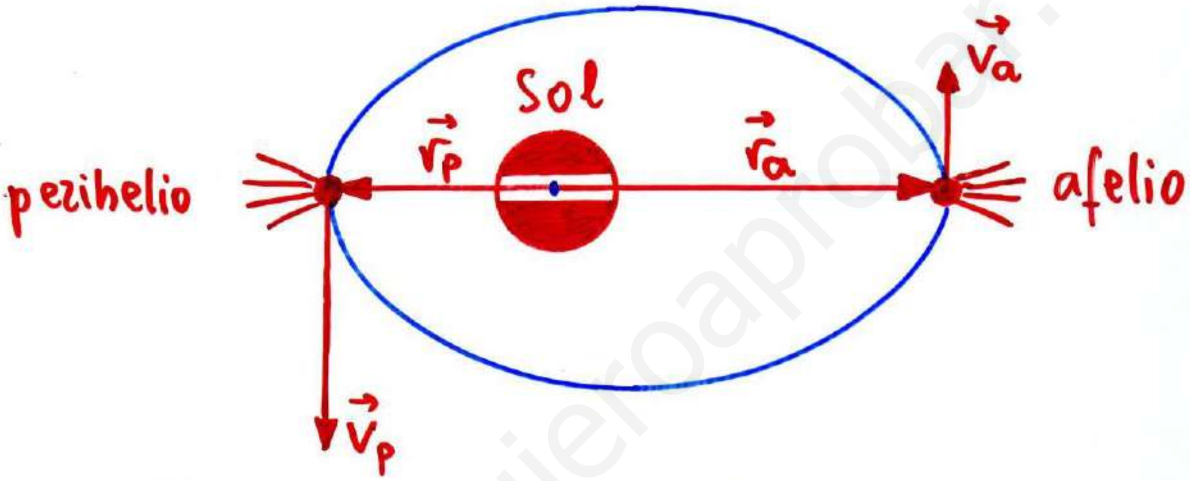
Un cometa se mueve en una órbita elíptica alrededor del Sol. Explique en qué punto de su órbita: afelio (punto más alejado del Sol) o perihelio (punto más cercano al Sol) tiene mayor valor:

a) la velocidad;

b) la energía mecánica.

(Pruebas de acceso a la Universidad − Madrid, septiembre 2010 -Fase Específica-)

SOLUCIÓN:-



La fuerza gravitatoria con la que el Sol atrae al cometa es una fuerza central y conservativa, por lo cual:

a) El momento angular del cometa respecto al centro del Sol es constante.

Recordando la expresión del módulo de esta magnitud, tenemos:

$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$; $L_a = L_p$; $r_a m v_a = r_p m v_p$.

Al ser $r_a > r_p$ se deduce:

$$\boxed{v_p > v_a \quad : \quad \text{RESULTADO}}$$

b) La energía mecánica del cometa es constante, es decir:

$$\boxed{E_{tot}(a) = E_{tot}(p) \quad : \quad \text{RESULTADO}}$$

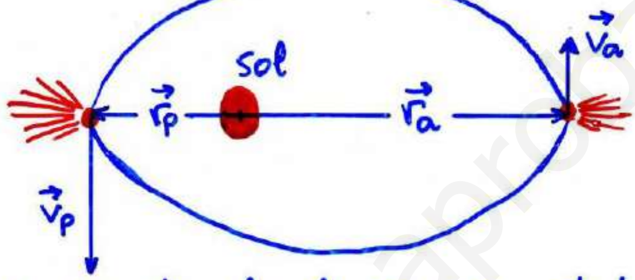
El cometa Halley se mueve en una órbita elíptica alrededor del Sol. En el perihelio (posición más próxima) el cometa está a 8,75 x 10^7 km del Sol y en el afelio (posición más alejada) está a 5,26 x 10^9 km del Sol.

a) ¿En cuál de los dos puntos tiene el cometa mayor velocidad?. ¿Y mayor aceleración?.

b) ¿En qué punto tiene mayor energía potencial?. ¿Y mayor energía mecánica?.

(*Pruebas de acceso a la Universidad − Madrid, junio 1999*)

SOLUCIÓN:



Según la ley de Newton, la fuerza gravitatoria entre el Sol y el cometa vale, en módulo:

$$F = G\frac{m_{sol}\cdot m_{cometa}}{r^2} = m_{cometa}\times a \Rightarrow a = G\frac{m_{sol}}{r^2},$$

luego: $G\dfrac{m_{sol}}{r_p^2} > G\dfrac{m_{sol}}{r_a^2} \Rightarrow \boxed{a_p > a_a : \text{RESULTADO}}$

La fuerza gravitatoria es central, por lo que el momento angular del cometa se mantiene constante, luego:

$L_p = L_a$; $r_p m v_p = r_a m v_a$ $(\vec{r} \perp \vec{v})$; $\boxed{v_p > v_a : \text{RESULTADO}}$

La energía potencial gravitatoria vale:

$E_p = -G\dfrac{m_{sol}\cdot m_{cometa}}{r}$, luego: $\boxed{E_p(p) < E_p(a) : \text{RESULTADO}}$

Al ser conservativa la fuerza gravitatoria, la energía mecánica total es constante, es decir:

$$\boxed{E_{tot\ p} = E_{tot\ a} : \text{RESULTADO}}$$

Plutón describe una órbita elíptica alrededor del Sol. Indique para cada una de las siguientes magnitudes si su valor es mayor, menor o igual en el afelio (punto más alejado del Sol) comparado con el perihelio (punto más próximo al Sol):

a) momento angular respecto a la posición del Sol;

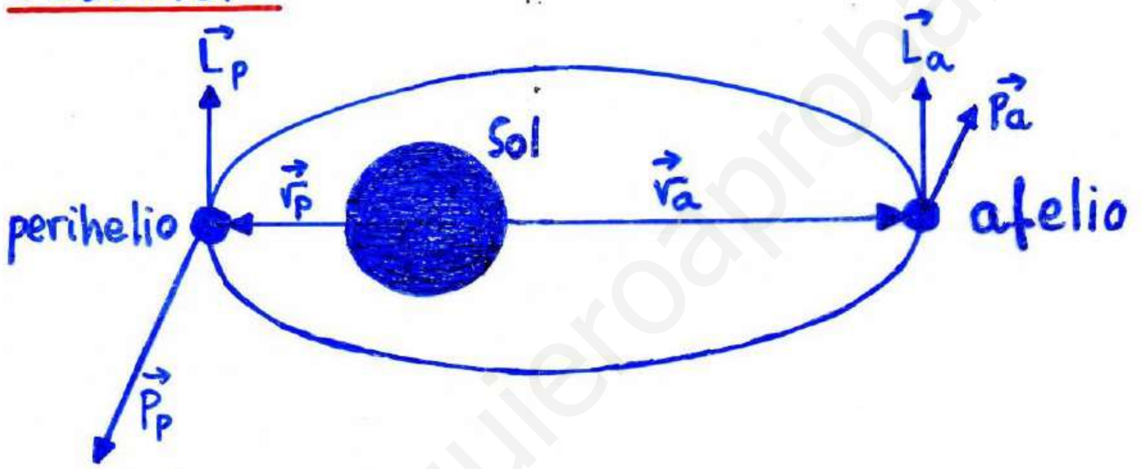
b) momento lineal;

c) energía potencial;

d) energía mecánica.

(Pruebas de acceso a la Universidad − Madrid, junio 2004)

SOLUCIÓN.-



La fuerza gravitatoria ejercida por el Sol sobre Plutón es central y conservativa. Por ello.-

a) El momento angular de Plutón respecto al Sol se conserva, al ser nulo el momento de la fuerza respecto del Sol.

b) De acuerdo a la segunda ley de Kepler, Plutón va más rápido en el perihelio, por lo que su momento lineal: $\vec{p} = m\vec{v}$ es mayor aquí que en el afelio.

c) La energía potencial gravitatoria de plutón vale:

$$E_p = -G\frac{M_{Sol} \cdot M_{Plutón}}{r} \quad ;$$

al ser $r_p < r_a$ se deduce que: la energía potencial de Plutón es mayor en el afelio.

d) Como ya dijimos antes, la energía mecánica -total-: $E_{tot} = E_c + E_p$ es constante, al ser conservativa la fuerza gravitatoria entre el Sol y Plutón.

En resumen:

Magnitud	Afelio	Perihelio
Momento angular respecto al Sol	$L_a =$	L_p
Momento lineal	$p_a <$	p_p
Energía potencial	$E_{p_a} >$	E_{p_p}
Energía mecánica	$E_{tot_a} =$	E_{tot_p}
RESULTADO		

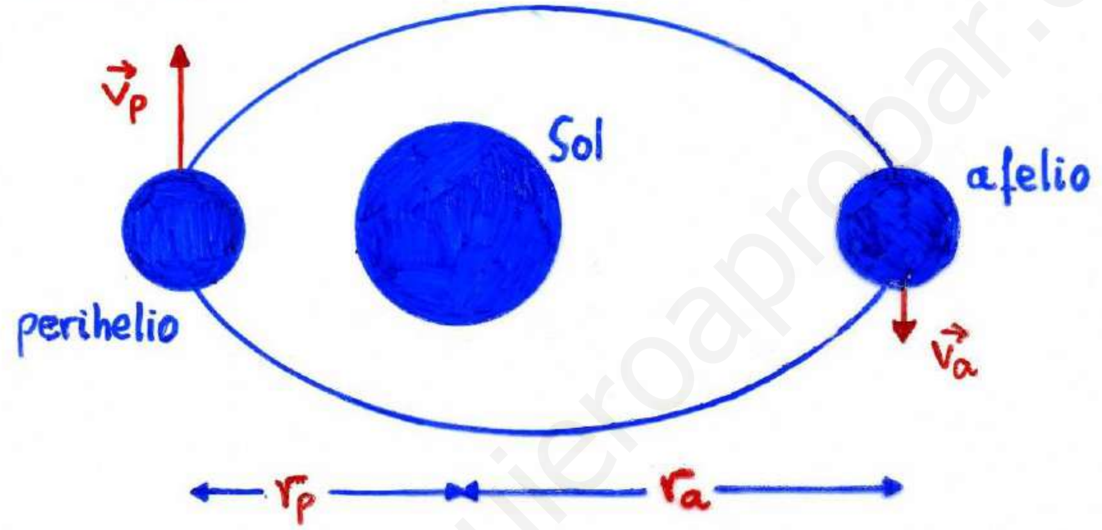
La velocidad de un asteroide es de 20 km/s en el perihelio y de 14 km/s en el afelio. Determine en estas posiciones cuál es la relación entre:

a) las distancias al Sol en torno al cual orbitan;

b) las energías potenciales del asteroide.

(Pruebas de acceso a la Universidad − Madrid, modelo 2004)

SOLUCIÓN.-



El asteroide orbita en torno al Sol debido a la fuerza gravitatoria con que éste lo atrae. Dicha fuerza gravitatoria es central, por lo que el momento angular del asteroide se conserva; comparando sus valores en el perihelio y en el afelio tenemos:

$L_p = L_a$; $r_p m v_p = r_a m v_a$; por lo cual:

$$\boxed{\frac{r_a}{r_p} = \frac{v_p}{v_a} = \frac{20\ \text{kms}^{-1}}{14\ \text{kms}^{-1}} = \frac{10}{7}\ :\ \text{RESULTADO}}$$

Recordando la exprexión de la energía potencial gravitatoria del asteroide, encontramos la siguiente relación pedida:

$$\boxed{\frac{E_p(a)}{E_p(p)} = \frac{-G\frac{m_{sol} m_{ast.}}{r_a}}{-G\frac{m_{sol} m_{ast.}}{r_p}} = \frac{r_p}{r_a} = \frac{7}{10} \text{ : RESULTADO}}$$

a) Deduzca la expresión de la energía cinética de un satélite en órbita circular alrededor de un planeta en función del radio de la órbita y de las masas del satélite y del planeta.

b) Demuestre que la energía mecánica del satélite es la mitad de su energía potencial.

(Pruebas de acceso a la Universidad − Madrid, junio 2005 y junio 2010 -Fase Específica-)

SOLUCIÓN.-

Si el satélite describe un movimiento circular uniforme alrededor del planeta es porque la fuerza gravitatoria con que éste lo atrae es una fuerza centrípeta. Igualando las expresiones de los módulos de ambas, queda:

$$F_{grav} = F_{cpta} \; ; \quad G\frac{m_p m_s}{r^2} = m_s \frac{v_s^2}{r} \; ; \text{ de donde:}$$

$$\boxed{\text{Energía cinética: } E_c = \frac{1}{2} m_s v_s^2 = G\frac{m_p m_s}{2r} \; : \quad \text{RESULTADO}}$$

Recordando que la energía potencial gravitatoria del satélite vale:

$$E_{p\,grav} = -G\frac{m_p m_s}{r} \; ,$$

la energía mecánica del mismo queda:

$$\boxed{E_{tot} = E_c + E_p = G\frac{m_p m_s}{2r} - G\frac{m_p m_s}{r} = -G\frac{m_p m_s}{2r} = \frac{E_{p\,grav}}{2}}$$

RESULTADO

G: constante de gravitación universal

m_p: masa del planeta − m_s: masa del satélite

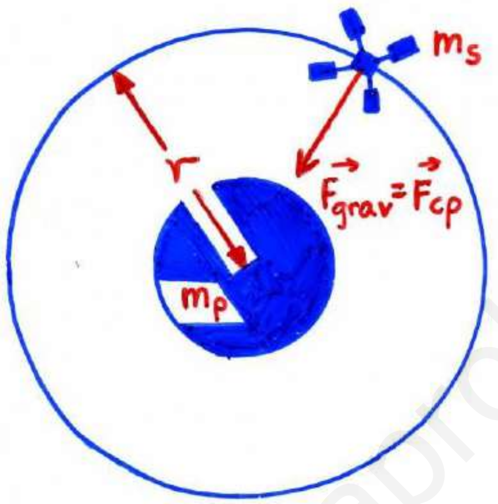
r: radio de la órbita descrita por el satélite (distancia del centro del planeta al satélite).

FÍSICA DE 2º DE BACHILLERATO **MECÁNICA E INTERACCIÓN GRAVITATORIA**

Determine la relación que existe entre la energía mecánica de un satélite que describe una órbita circular en torno a un planeta y su energía potencial.

(Pruebas de acceso a la Universidad − Madrid, modelo 2001)

SOLUCIÓN:



Si el satélite describe un movimiento circular uniforme en torno al planeta ello se debe a que la fuerza gravitatoria con que éste lo atrae es una fuerza centrípeta. Recordando las expresiones de ambas fuerzas, y de las energías cinética, potencial gravitatoria y mecánica total, y considerando que el planeta es gravitatoriamente equivalente a una partícula cuya masa es la de dicho planeta y que se encuentra en su centro, según el teorema de Gauss, tenemos los cálculos y resultado mostrados en la siguiente página:

$F_{grav} = F_{cp}$; $G\dfrac{m_P m_S}{r^2} = m_S\dfrac{v_S^2}{r}$; de donde:

$$m_S v_S^2 = G\frac{m_P m_S}{r}$$, y entonces:

$$E_c = \frac{1}{2}m_S v_S^2 = G\frac{m_P m_S}{2r}$$ (energía cinética).

Por otra parte:

$$E_P = -G\frac{m_P m_S}{r}$$ (energía potencial gravitatoria).

La energía mecánica total vale, en consecuencia:

$$E_{total} = E_c + E_P = G\frac{m_P m_S}{2r} - G\frac{m_P m_S}{r} = -G\frac{m_P m_S}{2r}$$; o sea:

$$\boxed{E_P = 2E_{total} \quad : \quad \text{RESULTADO}}$$

FÍSICA DE 2º DE BACHILLERATO MECÁNICA E INTERACCIÓN GRAVITATORIA

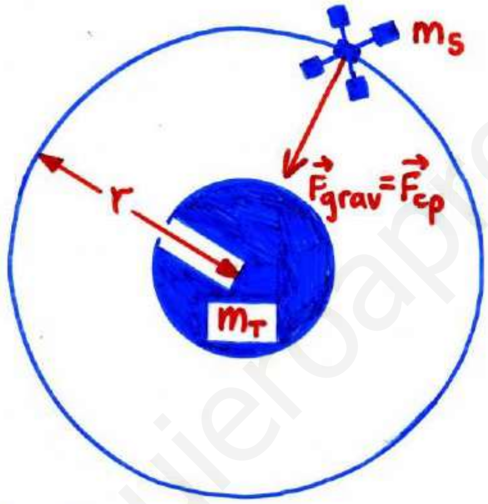
En el movimiento circular de un satélite en torno a la Tierra, determine:

a) la expresión de la energía cinética en función de las masas del satélite y de la Tierra y del radio de la órbita;

b) la relación que existe entre su energía mecánica y su energía potencial.

(Pruebas de acceso a la Universidad – Madrid, junio 2001)

SOLUCIÓN:



Si el satélite describe un movimiento circular uniforme en torno a la Tierra ello se debe a que la fuerza gravitatoria con que ésta lo atrae es una fuerza centrípeta. Recordando las expresiones de ambas fuerzas, y de las energías cinética, potencial gravitatoria y mecánica total, y considerando que la Tierra es gravitatoriamente equivalente a una partícula cuya masa es la de este planeta y que se encuentra en su centro, según el teorema de Gauss, tenemos los cálculos y resultados que se muestran en la página siguiente:

$F_{grav} = F_{cp}$; $G \frac{m_T m_S}{r^2} = m_S \frac{v_S^2}{r}$; de donde:

$m_S v_S^2 = G \frac{m_T m_S}{r}$, y entonces:

$$\boxed{\text{Energía cinética: } E_c = \frac{1}{2} m_S v_S^2 = G \frac{m_T m_S}{2r} \text{ : RESULTADO}}$$

Por otra parte:

Energía potencial gravitatoria: $E_p = -G \frac{m_T m_S}{r}$.

La energía mecánica total vale, en consecuencia:

$E_{tot} = E_c + E_p = G \frac{m_T m_S}{2r} - G \frac{m_T m_S}{r} = -G \frac{m_T m_S}{2r}$; o sea:

$$\boxed{E_p = 2 E_{total} \text{ : RESULTADO}}$$

Dos satélites de masas: m_A y m_B describen sendas órbitas circulares alrededor de la Tierra, siendo sus radios orbitales: r_A y r_B respectivamente. Conteste razonadamente a las siguientes preguntas:

a) Si $m_A = m_B$ y $r_A > r_B$, ¿cuál de los dos satélites tiene mayor energía cinética?.

b) Si los dos satélites estuvieran en la misma órbita ($r_A = r_B$) y tuviesen distinta masa ($m_A < m_B$), ¿cuál de los dos tendría mayor energía cinética?.

(Pruebas de acceso a la Universidad – Madrid, modelo 2011)

SOLUCIÓN:-

Si un satélite artificial describe un movimiento circular uniforme alrededor de la Tierra es porque la fuerza gravitatoria con que ésta lo atrae es una fuerza centrípeta. Recordando las expresiones de los módulos de ambas, tenemos:

$$F_{grav} = F_{cpta}; \quad G\frac{m_T m_{sat}}{r^2} = m_{sat}\frac{v_{sat}^2}{r} \quad ;$$

de donde la energía cinética del satélite vale:

$$E_c = \frac{1}{2} m_{sat} v_{sat}^2 = G\frac{m_T m_{sat}}{2r}$$

Por consiguiente:

a) Si $m_A = m_B$ y $r_A > r_B$ deducimos: $E_c(A) < E_c(B)$

b) Si $m_A < m_B$ y $r_A = r_B$ deducimos: $E_c(A) < E_c(B)$

RESULTADO

Considerando que la órbita de la Luna alrededor de la Tierra es una órbita circular, deduzca:

a) la relación entre la energía potencial gravitatoria y la energía cinética de la Luna en su órbita;

b) la relación entre el período orbital y el radio de la órbita descrita por la Luna.

(Pruebas de acceso a la Universidad − Madrid, septiembre 2010 -Fase General-)

SOLUCIÓN:-

Si la Luna describe un movimiento circular uniforme alrededor de la Tierra es porque la fuerza gravitatoria con que ésta la atrae es una fuerza centrípeta. Recordando las expresiones de los módulos de ambas, tenemos:

$$F_{grav} = F_{cpta} \quad ; \quad G\frac{m_T m_L}{r^2} = m_L \frac{v_L^2}{r} .$$

Las energías cinética y potencial gravitatoria de la Luna valen, respectivamente:

$$E_c = \frac{1}{2} m_L v_L^2 = G\frac{m_T m_L}{2r} \quad ; \quad E_p = -G\frac{m_T m_L}{r} .$$

Deducimos de lo anterior que:

$$\boxed{E_p = -2E_c \quad : \quad \text{RESULTADO}}$$

Si, por otra parte, recordamos la expresión del módulo de la velocidad lineal de la Luna alrededor de la Tierra:

$$v_L = \frac{2\pi r}{T}$$

podemos encontrar la relación entre el período orbital y el radio de la órbita descrita por la Luna entorno a la Tierra:

$$\frac{T}{r} = \frac{2\pi}{v_L} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{2E_c}{m_L}}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{2G\frac{m_T m_L}{2r}}{m_L}}} = \frac{2\pi}{\sqrt{G\frac{m_T}{r}}}$$

$$\boxed{\frac{T}{r} = \frac{2\pi}{v_L} = 2\pi\sqrt{\frac{r}{Gm_T}} \quad : \quad \text{RESULTADO}}$$

Un asteroide está situado en una órbita circular alrededor de una estrella y tiene una energía total de -10^{10} J. Determine:

a) La relación que existe entre las energías potencial y cinética del asteroide.

b) Los valores de ambas energías potencial y cinética.

(Pruebas de acceso a la Universidad − Madrid, septiembre 2010 -Fase Específica-)

SOLUCIÓN:-

Si el asteroide describe un movimiento circular uniforme alrededor de la estrella es porque la fuerza gravitatoria con que ésta lo atrae es una fuerza centrípeta. Recordando las expresiones de los módulos de ambas, tenemos:

$$F_{grav} = F_{cpta} \ ; \qquad G\frac{m_e m_a}{r^2} = m_a \frac{v_a^2}{r} \ .$$

Las energías cinética y potencial gravitatoria del asteroide valen, respectivamente:

$$E_c = \frac{1}{2} m_a v_a^2 = G\frac{m_e m_a}{2r} \ ; \ E_p = -G\frac{m_e m_a}{r} \ .$$

Deducimos de lo anterior que:

$$\boxed{E_p = -2E_c \quad : \quad \text{RESULTADO}}$$

Tenemos:

$$\begin{cases} E_p = -2E_c \\ E_{tot} = E_c + E_p = -10^{10} \end{cases}$$

La solución al sistema es:

$$\boxed{\begin{array}{c} E_c = 10^{10}\ J \\ E_p = -2 \times 10^{10}\ J \\ \text{RESULTADO} \end{array}}$$

FÍSICA de 2º de BACHILLERATO MECÁNICA E INTERACCIÓN GRAVITATORIA

Calcule el módulo del momento angular de un objeto de 1.000 kg respecto al centro de la Tierra en los siguientes casos:

a) Se lanza desde el polo Norte perpendicularmente a la superficie de la Tierra con una velocidad de 10 km/s.

b) Realiza una órbita circular alrededor de la Tierra en el plano ecuatorial a una distancia de 600 km de su superficie.

Datos: Constante de Gravitación Universal: $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ Nm^2kg^{-2}$

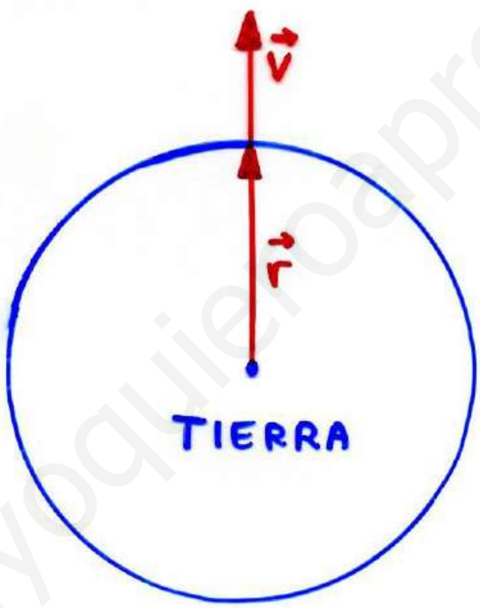
Masa de la Tierra: $m_T = 5{,}98 \times 10^{24}$ kg

Radio de la Tierra: $R_T = 6{,}37 \times 10^{6}$ m.

(Pruebas de acceso a la Universidad − Madrid, septiembre 2008)

SOLUCIÓN.-

a)

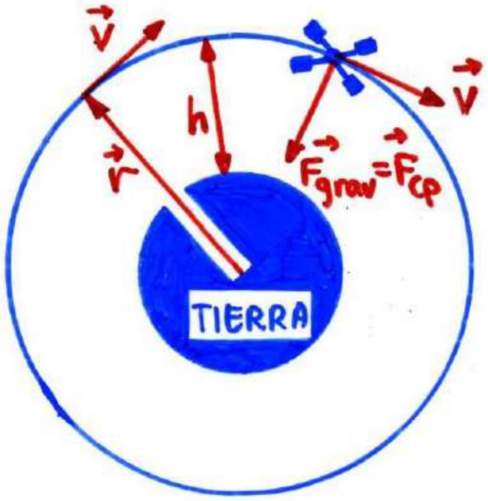


Dado que los vectores $\vec{r}$ y $\vec{v}$ tienen la misma dirección el momento angular del objeto lanzado desde el polo Norte perpendicularmente a la superficie terrestre, respecto al centro de la Tierra vale:

$$\boxed{\vec{L} = \vec{r} \times (m\vec{v}) = 0 \qquad \text{RESULTADO}}$$

Ya que: $L = rmv\,sen\,0° = 0$.

b)



Ahora el objeto describe un movimiento circular uniforme alrededor de la Tierra porque la fuerza gravitatoria con que la Tierra lo atrae es una fuerza centrípeta. Igualando los módulos de ambas, recordando el valor numérico de la velocidad lineal del objeto y las expresiones vectorial y numérica del momento angular respecto al centro de la Tierra tenemos:

$F_{grav} = F_{cp}$; $G\dfrac{m_T m_0}{r^2} = m_0 \dfrac{v^2}{r}$; de donde: $v = \sqrt{\dfrac{Gm_T}{r}}$.

De la figura : $r = R_T + h$.

Entonces : $\vec{L} = \vec{r} \times m_0 \vec{v}$

$$L = r m_0 v \operatorname{sen} 90^\circ = r m_0 v = r m_0 \sqrt{\frac{Gm_T}{r}} = m_0 \sqrt{G m_T r} =$$

$$= m_0 \sqrt{G m_T (R_T + h)} =$$

$$= 10^3 \sqrt{6{,}67 \times 10^{-11} \times 5{,}98 \times 10^{24} (6{,}37 \times 10^6 + 6 \times 10^5)}$$

$$\boxed{L = 5{,}27 \times 10^{13} \text{ kgm}^2\text{s}^{-1} : \text{RESULTADO}}$$

Una sonda de masa 5.000 kg se encuentra en una órbita circular a una altura sobre la superficie terrestre de $1{,}5R_T$. Determine:

a) el momento angular de la sonda en esa órbita respecto al centro de la Tierra;

b) la energía que hay que comunicar a la sonda para que escape del campo gravitatorio terrestre desde esa órbita.

Datos:

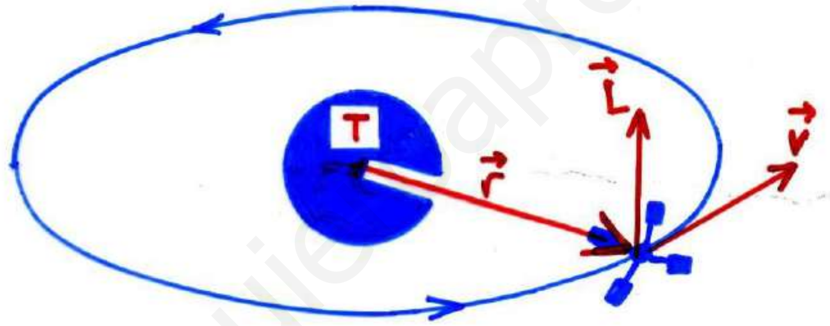
Constante de Gravitación Universal: $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2kg^{-2}}$

Masa de la Tierra: $m_T = 5{,}98 \times 10^{24}$ kg

Radio de la Tierra: $R_T = 6{,}37 \times 10^{6}$ m.

(Pruebas de acceso a la Universidad − Madrid, junio 2008)

SOLUCIÓN.-



Esta sonda describe un movimiento circular uniforme en torno a la Tierra porque la fuerza con la que ésta la atrae gravitatoriamente es una fuerza centrípeta. Igualando los módulos de ambas, tenemos:

$$F_{grav} = F_{cp};\quad G\frac{m_T m}{r^2} = m\frac{v^2}{r} \qquad (r = 1{,}5R_T + R_T = 2{,}5R_T).$$

El momento angular de la sonda en órbita, respecto al centro de la Tierra vale:

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} \quad ;$$

despejando de la primera igualdad, tenemos:

$$rv = \sqrt{rGm_T} \quad \text{, por lo que:}$$

El momento angular de la sonda respecto al centro de la Tierra es un vector perpendicular al plano de la órbita descrita por dicha sonda y cuyo módulo vale:

$$L = rmv = m\sqrt{rGm_T} = m\sqrt{2{,}5R_T G m_T} =$$

$$= 5.000\sqrt{2{,}5 \times 6{,}37 \times 10^6 \times 6{,}67 \times 10^{-11} \times 5{,}98 \times 10^{24}} =$$

$$= 3{,}98 \times 10^{14}\ kgm^2s^{-1}$$

RESULTADO

La energía mecánica de la sonda en órbita vale:

$$E_{tot} = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{Gm_Tm}{r} = \frac{Gm_Tm}{2r} - \frac{Gm_Tm}{r} =$$

$$= -\frac{Gm_Tm}{2r} = -\frac{Gm_Tm}{2(2{,}5R_T)} = -\frac{6{,}67 \times 10^{-11} \times 5{,}98 \times 10^{24} \times 5.000}{5 \times 6{,}37 \times 10^6}$$

$$E_{tot} = -6{,}26 \times 10^{10}\ J\ .$$

Si la sonda lograse escapar del campo gravitatorio terrestre su energía mecánica final valdría, como mínimo:

$$E_{tot\,f} = E_{tot}(\infty) = \frac{1}{2}m \times 0^2 - G\frac{m_Tm}{\infty} = 0$$

Por consiguiente:

Hay que comunicar a la sonda una energía mínima -de escape- de:

$$6{,}26 \times 10^{10}\ \text{J}$$

para que logre escapar a la acción del campo gravitatorio terrestre desde esa órbita inicial.

RESULTADO

Un objeto de 5 kg de masa posee una energía potencial gravitatoria: $E_p = -2 \times 10^8$ J cuando se encuentra a cierta distancia de la Tierra.

a) Si el objeto a esa distancia estuviera describiendo una órbita circular, ¿cuál sería su velocidad?.

b) Si la velocidad del objeto a esa distancia fuese de 9 km/s, ¿cuál sería su energía mecánica?. ¿Podría el objeto estar describiendo una órbita elíptica en este caso?.

(Pruebas de acceso a la Universidad − Madrid, modelo 2007)

SOLUCIÓN.-

Si el objeto está describiendo un movimiento circular uniforme en torno a la Tierra es porque la fuerza gravitatoria con que ésta lo atrae es una fuerza centrípeta. Igualando las expresiones de ambas, tenemos:

$$F_{grav} = G\frac{m_T m}{r^2} = m\frac{v^2}{r} = F_{cp}$$

(r: distancia del cuerpo al centro de la Tierra).

Recordando las expresiones de las energías potencial gravitatoria, cinética y mecánica -total-, y utilizando la igualdad anterior, tenemos:

a) $E_{p_a} = -G\frac{m_T m}{r_a} = -m v_a^2$; de donde:

$$\boxed{v_a = \sqrt{-\frac{E_{p_a}}{m}} = \sqrt{-\frac{-2\times10^8}{5}} = 6.324,56\ \mathrm{m\,s^{-1}}}$$

RESULTADO

b) Energía mecánica:

$$E_{tot_b} = E_{c_b} + E_{p_a} = \frac{1}{2} m v_b^2 - G\frac{m_T m}{r_a} = \frac{1}{2} m v_b^2 + E_{p_a}$$

NOTA: La energía potencial en b) es la misma que en a) ya que el objeto se halla a la misma distancia del centro de la Tierra.

$$\boxed{E_{tot_b} = \frac{1}{2} 5 \times (9.000)^2 - 2 \times 10^8 = 2{,}50 \times 10^6 \text{ J}}$$

Al ser $E_{tot} > 0$ el objeto -en esta situación b)- describe una trayectoria abierta, no cerrada, es decir: no puede describir una órbita elíptica alrededor de la Tierra.

RESULTADO

FÍSICA DE 2º DE BACHILLERATO MECÁNICA E INTERACCIÓN GRAVITATORIA

Un proyectil de masa 10 kg se dispara verticalmente desde la superficie de la Tierra con una velocidad de 3.200 m/s.

a) ¿Cuál es la máxima energía potencial que adquiere?.

b) ¿En qué posición se alcanza?.

Datos: Gravedad en la superficie de la Tierra = 9,8 ms^{-2}
Radio medio de la Tierra = 6,37 x 10^6 m.

(Pruebas de acceso a la Universidad − Madrid, septiembre 2001)

SOLUCIÓN:

Cuando el proyectil se encuentra en la superficie terrestre -posición inicial- su peso vale, según las leyes de gravitación universal y fundamental de la Dinámica:

$$F = G\frac{m_T m_P}{R_T^2} = m_P g \text{ ; despejando:}$$

$$\frac{G m_T}{R_T} = g R_T \text{ ; y también: } G m_T = g R_T^2 \quad (g = 9{,}8\, ms^{-2})$$

Las energías iniciales del proyectil son:

- Energía cinética: $E_{c_i} = \frac{1}{2} m_P v_i^2 = \frac{1}{2} 10 (3.200)^2 = 5{,}12 \times 10^7 \text{ J}$

- Energía potencial gravitatoria:

$$E_{p_i} = -G\frac{m_T m_P}{R_T} = -g R_T m_P = -9{,}8 \times 6{,}37 \times 10^6 \times 10 = -6{,}24 \times 10^8 \text{ J}$$

- Energía mecánica -total-:

$$E_{tot_i} = E_{c_i} + E_{p_i} = 5{,}12 \times 10^7 - 6{,}24 \times 10^8 = -5{,}73 \times 10^8 \text{ J}$$

En la posición final después de la ascensión vertical del cohete éste se para, por el frenado debido a la atracción gravitatoria ejercida por la Tierra.

Aplicando el Principio de conservación de la energía mecánica, queda:

$$E_{tot_i} = E_{tot_f} \; ; \quad E_{tot_i} = Ec_f + Ep_f = Ep_f \quad (Ec_f = 0)$$

En definitiva:

$$\boxed{Ep_{máx} = Ep_f = E_{tot} = -5{,}73 \times 10^8 \, J \ : \text{RESULTADO}}$$

Con la expresión de la energía potencial final obtenemos:

$$Ep_f = -G\frac{m_T m_p}{R_f} \quad ; \text{ de donde:}$$

$$R_f = \frac{-G m_T m_p}{Ep_f} = \frac{-g R_T^2 m_p}{Ep_f} = \frac{-9{,}8(6{,}37 \times 10^6)^2 \times 10}{-5{,}73 \times 10^8}$$

$$\boxed{R_f = 6{,}94 \times 10^6 \, m \text{ -desde el centro de la Tierra- RESULTADO}}$$

FÍSICA DE 2º DE BACHILLERATO MECÁNICA E INTERACCIÓN GRAVITATORIA

a) Desde la superficie de la Tierra se lanza verticalmente hacia arriba un objeto con una velocidad v. Si se desprecia el rozamiento, calcule el valor de v necesario para que el objeto alcance una altura igual al radio de la Tierra.

b) Si se lanza el objeto desde la superficie de la Tierra con una velocidad doble a la calculada en el apartado anterior, ¿escapará o no del campo gravitatorio terrestre?.

Datos: Masa de la Tierra: $m_T = 5{,}98 \times 10^{24}$ kg
Radio de la Tierra: $R_T = 6.370$ km
Constante de Gravitación: $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ Nm^2kg^{-2}.

(Pruebas de acceso a la Universidad − Madrid, septiembre 2006)

SOLUCIÓN.-

Para la situación descrita en el apartado a) tenemos:

Salida -punto inicial-: $v_{i,mín} = v$
$r_i = R_T$
(distancia al centro de la Tierra)

Llegada -punto final-: $v_f = 0$ (valor mínimo)
$r_f = h + R_T = R_T + R_T = 2R_T$

(h: altura sobre la superficie terrestre).

Recordando las expresiones de las energías cinética y potencial gravitatoria, y dado que la fuerza de la gravedad es conservativa, el Principio de Conservación de la energía mecánica conduce a:

$$Ec_i + Ep_i = Ec_f + Ep_f$$

$$\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{m_T m}{R_T} = 0 - G\frac{m_T m}{2R_T} \quad ;$$

despejando la velocidad inicial queda:

$$\boxed{v = \sqrt{G\frac{m_T}{R_T}} = \sqrt{6{,}67 \times 10^{-11}\frac{5{,}98 \times 10^{24}}{6{,}37 \times 10^{6}}} = 7.913{,}05\ ms^{-1} : \text{RESULTADO}}$$

Para que el objeto lograse escapar del campo gravitatorio terrestre debería llegar a distancia infinita del centro del planeta, al menos con velocidad final nula. Tendríamos entonces:

Salida -punto inicial-: $v_i = v_{esc}$ (escape)
$r_i = R_T$

Llegada -punto final-: $v_f = 0$
$r_f = \infty$.

Aplicando otra vez el Principio de Conservación de la energía mecánica resulta:

$$Ec_i + Ep_i = Ec_f + Ep_f$$

$$\frac{1}{2} m v_{esc}^2 - G\frac{m_T m}{R_T} = \frac{1}{2} m v_f^2 - G\frac{m_T m}{\infty} = 0 \;;$$

despejando, la velocidad de escape queda:

$$v_{esc} = \sqrt{2G\frac{m_T}{R_T}} = \sqrt{2 \times 6{,}67 \times 10^{-11}\frac{5{,}98 \times 10^{24}}{6{,}37 \times 10^{6}}} = 11.190{,}74\ ms^{-1}.$$

Por consiguiente, si el objeto se lanzase desde la superficie terrestre con velocidad inicial:

$$v_{i,b)} = 2 v_{i,a)} = 2 \times 7.913{,}05 = 15.826{,}10\ ms^{-1}$$

al ser $v_{i,b)} > v_{esc}$: el objeto sí escaparía del campo gravitatorio terrestre : RESULTADO

Razone si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

a) Un objeto de masa m_1 necesita una velocidad de escape de la Tierra el doble que la que necesita otro objeto de masa $m_2 = m_1/2$.

b) Se precisa realizar más trabajo para colocar en una misma órbita un satélite de masa m_1 que otro satélite de masa $m_2 = m_1/2$, lanzados desde la superficie de la Tierra.

(Pruebas de acceso a la Universidad − Madrid, modelo 2005)

SOLUCIÓN.-

La velocidad de escape desde la superficie de la Tierra es la que hay que suministrar a un objeto, de masa: m, situado inicialmente en ella para que logre alejarse hasta una distancia infinita de la Tierra, llegando allí con velocidad final nula.

Aplicando el Principio de conservación de la energía mecánica tenemos:

$$E_{c,sup} + E_{p,sup} = E_{c,\infty} + E_{p,\infty}$$

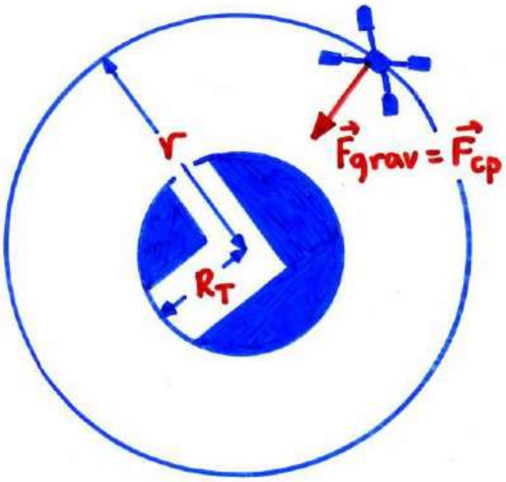
$$\frac{1}{2} m v_{esc}^2 - G\frac{m_T m}{R_T} = \frac{1}{2} m \cdot 0^2 - G\frac{m_T m}{\infty} = 0 .$$

Despejando la velocidad de escape queda:

$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2Gm_T}{R_T}}$$ (m_T: masa de la Tierra; R_T: radio de la Tierra).

Es decir:

La velocidad de escape es independiente de la masa del objeto : RESULTADO



Cuando el satélite describe una órbita de radio **r** se debe a que la fuerza gravitatoria ejercida sobre él por la Tierra es una fuerza centrípeta. Igualando las expresiones de ambas:

$$G\frac{m_T m}{r^2} = m\frac{v^2}{r}$$

tenemos: $mv^2 = G\frac{m_T m}{r}$.

Las energías del satélite en órbita son:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{G m_T m}{2r} \quad ; \quad E_p = -G\frac{m_T m}{r}$$

$$E_{órbita} = E_c + E_p = G\frac{m_T m}{2r} - G\frac{m_T m}{r} = -G\frac{m_T m}{2r} \ .$$

En la superficie terrestre la energía del satélite es:

$$E_{sup} = E_c + E_p = 0 - G\frac{m_T m}{R_T} = -G\frac{m_T m}{R_T} \ .$$

Por tanto, el trabajo necesario para poner en órbita el satélite vale:

$$W = E_{órbita} - E_{sup} = -G\frac{m_T m}{2r} - \left(-G\frac{m_T m}{R_T}\right)$$

$$W = G m_T m\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2r}\right) \ ;$$

vemos entonces que:

Efectivamente, hay que desarrollar más trabajo cuanto mayor es la masa del satélite : RESULTADO

FÍSICA de 2º de BACHILLERATO **MECÁNICA E INTERACCIÓN GRAVITATORIA**

Urano es un planeta que describe una órbita elíptica alrededor del Sol. Razone la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

a) El módulo del momento angular, respecto a la posición del Sol, en el afelio es mayor que en el perihelio y lo mismo ocurre con el módulo del momento lineal.

b) La energía mecánica es menor en el afelio que en el perihelio y lo mismo ocurre con la energía potencial.

(Pruebas de acceso a la Universidad − Madrid, junio 2013)

SOLUCIÓN:-

La fuerza gravitatoria es una fuerza central, y por ello se conserva el momento angular de Urano, respecto a la posición del Sol.

El módulo de ese momento angular de Urano vale:

$$L = r M_U v = r p \quad .$$

Dado que en el afelio -punto de su órbita donde Urano está más lejos del Sol- la distancia Sol-Urano es mayor que en el perihelio -punto de su órbita donde Urano está más cerca del Sol-, tenemos:

$$L_a = L_p \ ; \quad r_a p_a = r_p p_p$$

$$r_a > r_p \qquad ;$$

de donde concluimos que: $p_a < p_p$.

Ésto es la base de la Segunda Ley de Kepler.

La energía potencial gravitatoria de Urano vale:

$$E_{p,grav} = -G\frac{m_S \cdot m_U}{r}.$$

Al ser: $r(afelio) > r(perihelio)$:

$$E_{p,grav}(a) > E_{p,grav}(p).$$

Sin embargo, la energía mecánica es la misma en toda la órbita, dado que el campo gravitatorio es conservativo, al ser central.

En resumen:

Magnitud		Afelio	Perihelio
Distancia		$r_a >$	r_p
Módulo	Momento lineal	$p_a <$	p_p
	Momento angular	$L_a =$	L_p
Energía potencial		$E_{p,grav\,a} >$	$E_{p,grav\,p}$
Energía mecánica		$E_{tot\,a} =$	$E_{tot\,p}$

Concluimos que:

Las dos afirmaciones son falsas: RESULTADO

FÍSICA de 2º de BACHILLERATO **MECÁNICA E INTERACCIÓN GRAVITATORIA**

Se ha descubierto un planeta esférico de 4.100 km de radio y con una aceleración de la gravedad en su superficie de 7,2 $m \cdot s^{-2}$.

a) Calcule la masa del planeta.

b) Calcule la energía mínima necesaria que hay que comunicar a un objeto de 3 kg de masa para lanzarlo desde la superficie del planeta y situarlo a 1.000 km de altura de la superficie, en una órbita circular en torno al mismo.

Dato: Constante de Gravitación: $G = 6,67 \times 10^{-11}\ N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$.

(Pruebas de acceso a la Universidad − Madrid, modelo 2012)

SOLUCIÓN:-

De acuerdo con el Teorema de Gauss del campo gravitatorio, el planeta es gravitatoriamente equivalente a una partícula cuya masa es la de dicho planeta y que está situada en el centro del planeta, lo que nos permite utilizar la ley de gravitación universal, tomando siempre distancias hasta el centro del planeta.

Así, para un cuerpo situado en la superficie del planeta, la fuerza gravitatoria con que éste lo atrae: su peso vale:

$$F = G\frac{m_{planeta} \cdot m}{R^2_{planeta}} = m \cdot g_{sup} \ ;$$

de donde, despejando la masa del planeta, obtenemos:

$$\boxed{m_{planeta} = \frac{g_{sup} \cdot R^2_{planeta}}{G} = \frac{7,2 \times (4,1 \times 10^6)^2}{6,67 \times 10^{-11}} = 1,81 \times 10^{24}\ kg}$$

RESULTADO

El objeto de masa: $m = 3$ kg situado -en reposo- en la **superficie** del planeta tiene, inicialmente, una **energía potencial gravitatoria**:

$$E_{p_{sup}} = -G\frac{m_p \cdot m}{R_p} = -6{,}67\times10^{-11}\,\frac{1{,}81\times10^{24}\times3}{4{,}1\times10^{6}}$$

$$E_{p_{sup}} = -8{,}86\times10^{7}\ \text{J}$$

Cuando el objeto se encuentra orbitando, con movimiento circular uniforme, alrededor del planeta la fuerza gravitatoria con que éste lo atrae es una fuerza centrípeta:

$$F = G\frac{m_p \cdot m}{(h+R_p)^2} = m\frac{v^2}{h+R_p} \quad ;$$

y la **energía cinética** del cuerpo vale:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = G\frac{m_p \cdot m}{2(h+R_p)}$$

Por otra parte, la **energía potencial gravitatoria** del cuerpo en la órbita es:

$$E_p = -G\frac{m_p \cdot m}{h+R_p} \quad ;$$

y, entonces, la **energía mecánica** de dicho cuerpo en la órbita vale:

$$E_{tot}(h) = E_c(h) + E_p(h) = G\frac{m_p m}{2(h+R_p)} - G\frac{m_p m}{h+R_p}$$

$$E_{tot}(h) = -G\frac{m_p \cdot m}{2(h+R_p)} = -6{,}67\times10^{-11}\,\frac{1{,}81\times10^{24}\times3}{2\times5{,}1\times10^{6}}\ \text{J}$$

$$E_{tot}(h) = -3{,}56 \times 10^{7}\ \text{J}$$

Por ello, para lanzar el cuerpo desde la superficie del planeta y ponerlo en órbita a 1.000 km de altura hay que comunicarle una energía:

$$\Delta E = E_{tot}(h) - E_p(sup)$$

$$\boxed{\Delta E = -3{,}56 \times 10^{7} - (-8{,}86 \times 10^{7}) = 5{,}30 \times 10^{7}\ \text{J}}$$

RESULTADO

Calcule:

a) La densidad media del planeta Mercurio, sabiendo que posee un radio de 2.440 km y una intensidad de campo gravitatorio en su superficie de 3,7 N·kg^{-1}.

b) La energía necesaria para enviar una nave espacial de 5.000 kg de masa desde la superficie del planeta a una órbita en la que el valor de la intensidad de campo gravitatorio sea la cuarta parte de su valor en la superficie.

Dato: Constante de la Gravitación Universal: $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ N·m^2·kg^{-2}.

(Pruebas de acceso a la Universidad − Madrid, junio 2013)

SOLUCIÓN.-

La intensidad del campo gravitatorio (que numéricamente coincide con la aceleración de la gravedad) en la superficie de Mercurio es la fuerza gravitatoria que éste ejerce sobre una masa de 1 kg situada en dicha superficie. Con la ley de gravitación universal, en módulo tenemos:

$$g_{sup} = G\frac{m_M \cdot 1}{R_M^2} = G\frac{m_M}{R_M^2} .$$

La densidad media del planeta Mercurio, supuesto esférico, es:

$$\rho_{m,M} = \frac{m_M}{V_M} = \frac{m_M}{\frac{4}{3}\pi R_M^3} = \frac{3\,m_M}{4\pi R_M^3} = \frac{G\,m_M}{R_M^2} \times \frac{3}{4\pi R_M \cdot G}$$

$$\rho_{m,M} = g_{sup} \times \frac{3}{4\pi R_M \cdot G} .$$

Sustituyendo:

$$\boxed{\rho_{m,M} = 3{,}7 \times \frac{3}{4\pi \times 2{,}44 \times 10^6 \times 6{,}67 \times 10^{-11}} = 5.427{,}47\ kg \cdot m^{-3}}$$

RESULTADO

Al depender el módulo de la intensidad del campo gravitatorio del inverso del cuadrado de la distancia al centro del planeta, si esa intensidad del campo gravitatorio se reduce a la cuarta parte de su valor en la superficie es porque la distancia se ha duplicado (la nave orbita a una altura sobre la superficie igual al radio de Mercurio).

En su órbita alrededor de Mercurio la nave está sometida a la fuerza:

$$F_{grav} = F_{cpta}(MCU): \quad G\frac{m_M \cdot m}{(2R_M)^2} = m\frac{v^2}{2R_M} \quad ;$$

y posee las energías:

- Energía cinética: $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = G\frac{m_M \cdot m}{4R_M}$

- Energía potencial gravitatoria: $E_{p,grav} = -G\frac{m_M \cdot m}{2R_M}$

- Energía mecánica: $E_{tot_f} = E_c + E_{p,grav} = -G\frac{m_M \cdot m}{4R_M}$

En la superficie de Mercurio la nave poseía una energía -potencial gravitatoria-:

$$E_{tot_i} = E_{p,grav} = -G\frac{m_M \cdot m}{R_M}.$$

Por tanto, la energía necesaria para, partiendo de la superficie, poner en órbita la nave espacial vale:

$$\Delta E = E_{tot_f} - E_{tot_i} = -G\frac{m_M \cdot m}{4R_M} - \left(-G\frac{m_M \cdot m}{R_M}\right) = G\frac{3m_M \cdot m}{4R_M}$$

Recordando la expresión del módulo de la intensidad del campo gravitatorio en la superficie, ya utilizada, concluimos:

$$\Delta E = G\frac{3m_M \cdot m}{4R_M} = G\frac{m_M}{R_M^2} \times \frac{3m \cdot R_M}{4} = g_{sup} \times \frac{3m \cdot R_M}{4}.$$

Sustituyendo:

$$\boxed{\Delta E = 3{,}7 \times \frac{3 \times 5 \times 10^3 \times 2{,}44 \times 10^6}{4} = 3{,}39 \times 10^{10}\ \text{J} : \text{RESULTADO}}$$

El planeta *A* tiene tres veces más masa que el planeta *B*, y cuatro veces su radio. Obtenga:

a) La relación entre las velocidades de escape desde las superficies de ambos planetas.

b) La relación entre las aceleraciones gravitatorias en las superficies de ambos planetas.

(Pruebas de acceso a la Universidad − Madrid, junio 2014)

SOLUCIÓN.-

La velocidad de escape desde la superficie de un planeta es la velocidad mínima que ha de tener un cuerpo al salir desde dicha superficie para lograr salir del campo gravitatorio del planeta: llegar a distancia infinita, con velocidad nula.

Dado que la fuerza gravitatoria es conservativa, aplicamos el Principio de conservación de la energía mecánica para obtener la expresión de esa velocidad de escape, desde la superficie:

$$\frac{1}{2}mv_{esc}^2 - G\frac{m_P \cdot m}{R_P} = \frac{1}{2}mv_\infty^2 - G\frac{m_P \cdot m}{\infty} = 0$$

$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2Gm_P}{R_P}}$$

Comparando para los planetas A y B, tenemos:

$$\boxed{\frac{v_{esc}(A)}{v_{esc}(B)} = \frac{\sqrt{\frac{2Gm_A}{R_A}}}{\sqrt{\frac{2Gm_B}{R_B}}} = \sqrt{\frac{m_A \cdot R_B}{m_B \cdot R_A}} = \sqrt{\frac{3m_B \cdot R_B}{m_B \cdot 4R_B}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = 0{,}87 : \text{RESULTADO}}$$

Para obtener la expresión de la aceleración de la gravedad en la superficie del planeta igualamos las expresiones que para el módulo del peso de un objeto situado en dicha superficie proporcionan la Ley de Gravitación Universal y la Ley Fundamental de la Dinámica:

$$peso = G\frac{m_P \cdot m}{R_P^2} = m \cdot g_{sup} \;;\; g_{sup} = G\frac{m_P}{R_P^2} .$$

Comparando, de nuevo, para los planetas A y B, encontramos ahora:

$$\boxed{\frac{g_{sup}(A)}{g_{sup}(B)} = \frac{G\frac{m_A}{R_A^2}}{G\frac{m_B}{R_B^2}} = \frac{m_A \cdot R_B^2}{m_B \cdot R_A^2} = \frac{3m_B \cdot R_B^2}{m_B \cdot (4R_B)^2} = \frac{3}{16} = 0,19}$$

RESULTADO

Dos planetas, *A* y *B*, tienen la misma densidad. El planeta *A* tiene un radio de 3.500 km, y el planeta B un radio de 3.000 km. Calcule:

a) La relación que existe entre las aceleraciones de la gravedad en la superficie de cada planeta.

b) La relación entre las velocidades de escape en cada planeta.

(Pruebas de acceso a la Universidad − Madrid, septiembre 2013)

SOLUCIÓN:-

La densidad del planeta esférico vale:

$$\rho = \frac{m_P}{V_P} = \frac{m_P}{\frac{4}{3}\pi R_P^3}.$$

La aceleración de la gravedad en la superficie del planeta se obtiene igualando las expresiones del peso de un cuerpo dadas por la ley de Gravitación Universal y la Ley Fundamental de la Dinámica:

$$G\frac{m_P \cdot m}{R_P^2} = m \cdot g_{sup} \quad ; \quad g_{sup} = G\frac{m_P}{R_P^2}.$$

Comparando para los planetas A y B, tenemos:

$$\frac{g_A}{g_B} = \frac{G\frac{m_A}{R_A^2}}{G\frac{m_B}{R_B^2}} = \frac{G\frac{m_A R_A}{\frac{4}{3}\pi R_A^3}}{G\frac{m_B R_B}{\frac{4}{3}\pi R_B^3}} = \frac{G\rho_A R_A}{G\rho_B R_B} = \frac{R_A}{R_B} = \frac{3.500\,km}{3.000\,km} = 1{,}17$$

RESULTADO

La velocidad de escape desde la superficie de un planeta es la velocidad mínima que ha de tener un cuerpo al salir desde dicha superficie para lograr salir del campo gravitatorio del planeta: llegar a distancia infinita, con velocidad nula.

Dado que la fuerza gravitatoria es conservativa, aplicamos el Principio de conservación de la energía mecánica para obtener la expresión de esa velocidad de escape:

$$\frac{1}{2} m v_{esc}^2 - G\frac{m_p \cdot m}{R_p} = \frac{1}{2} m v_\infty^2 - G\frac{m_p m}{\infty} = 0$$

$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2Gm_p}{R_p}}.$$

Comparando, de nuevo, para los planetas A y B - en sus superficies -, tenemos:

$$\frac{v_{esc}(A)}{v_{esc}(B)} = \frac{\sqrt{\frac{2Gm_A}{R_A}}}{\sqrt{\frac{2Gm_B}{R_B}}} = \frac{\sqrt{\frac{2Gm_A R_A^2}{\frac{4}{3}\pi R_A^3}}}{\sqrt{\frac{2Gm_B R_B^2}{\frac{4}{3}\pi R_B^3}}} = \frac{\sqrt{2G\rho_A R_A^2}}{\sqrt{2G\rho_B R_B^2}} = \frac{R_A}{R_B}$$

Se llega a:

$$\boxed{\frac{v_{esc}(A)}{v_{esc}(B)} = \frac{R_A}{R_B} = \frac{3.500\,km}{3.000\,km} = 1{,}17 \quad : \quad \text{RESULTADO}}$$

La Tierra tiene un diámetro 2,48 veces mayor que el de Titán, y su masa es 44,3 veces mayor. Considerando que ambos astros son esféricos, calcule:

a) El valor de la aceleración de la gravedad en la superficie de Titán.

b) La relación entre las velocidades de escape en Titán y en la Tierra.

Dato: Aceleración de la gravedad en la superficie terrestre: $g = 9{,}81\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

(Pruebas de acceso a la Universidad − Madrid, junio 2014 -Materias coincidentes-)

SOLUCIÓN:-

Para obtener la expresión de la aceleración de la gravedad en la superficie de un astro esférico igualamos las expresiones que para el módulo del peso de un objeto situado en dicha superficie proporcionan la Ley de Gravitación Universal y la Ley Fundamental de la Dinámica:

$$\text{peso} = G\frac{M_{astro}\cdot m}{R^2_{astro}} = m\cdot g_{sup}\ ;\ g_{sup} = G\frac{M_{astro}}{R^2_{astro}}\ .$$

Para la Tierra:

$$g_{Tierra} = G\frac{M_{Tierra}}{R^2_{Tierra}} = 9{,}81\ \frac{m}{s^2}$$

Para Titán:

$$g_{Titán} = G\frac{M_{Titán}}{R^2_{Titán}} = G\frac{\frac{1}{44{,}3}M_{Tierra}}{\left(\frac{1}{2{,}48}R_{Tierra}\right)^2} = \frac{2{,}48^2}{44{,}3}\left(G\frac{M_{Tierra}}{R^2_{Tierra}}\right) =$$

$$= \frac{2{,}48^2}{44{,}3}\cdot 9{,}81 = 1{,}36\ \frac{m}{s^2}\quad : \quad \text{RESULTADO}$$

La velocidad de escape desde la superficie de un astro es la velocidad mínima que ha de tener un cuerpo al salir desde dicha superficie para lograr salir del campo gravitatorio del astro: llegar a distancia infinita con velocidad nula.

Dado que la fuerza gravitatoria es conservativa, aplicamos el Principio de conservación de la energía mecánica para obtener la expresión de esa velocidad de escape, desde la superficie:

$$\frac{1}{2}mv_{esc}^2 - G\frac{M_{astro}\cdot m}{R_{astro}} = \frac{1}{2}mv_{\infty}^2 - G\frac{M_{astro}\cdot m}{\infty} = 0$$

$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM_{astro}}{R_{astro}}}$$

Comparando entre Titán y la Tierra, obtenemos:

$$\boxed{\frac{v_{esc}(\text{Titán})}{v_{esc}(\text{Tierra})} = \frac{\sqrt{\frac{2GM_{Titán}}{R_{Titán}}}}{\sqrt{\frac{2GM_{Tierra}}{R_{Tierra}}}} = \frac{\sqrt{\frac{2GM_{Titán}}{R_{Titán}}}}{\sqrt{\frac{2G\cdot 44{,}3M_{Titán}}{2{,}48\cdot R_{Titán}}}} = \sqrt{\frac{2{,}48}{44{,}3}} = 0{,}24}$$

RESULTADO

FÍSICA de 2º de BACHILLERATO **MECÁNICA E INTERACCIÓN GRAVITATORIA**

Un cierto planeta esférico tiene una masa: $m = 1{,}25 \times 10^{23}$ kg y un radio. $R = 1{,}5 \times 10^{6}$ m. Desde su superficie se lanza verticalmente hacia arriba un objeto, el cual alcanza una altura máxima de $R/2$. Despreciando rozamientos, determine:

a) La velocidad con que fue lanzado el objeto.

b) La aceleración de la gravedad en el punto más alto alcanzado por el objeto.

Dato: Constante de la Gravitación Universal: $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ N·m²·kg⁻² .

(Pruebas de acceso a la Universidad − Madrid, modelo 2013)

SOLUCIÓN:-

El campo gravitatorio es conservativo, por lo que la energía mecánica del objeto se mantiene constante.

Recordando las expresiones de las energías cinética y potencial gravitatoria, y considerando el planeta como equivalente a una partícula de masa la de ese planeta y situada en su centro -Teorema de Gauss-, comparamos las energías mecánicas del objeto en la superficie $(r = R)$ y donde se para $\left(h = \frac{R}{2};\ r = R + \frac{R}{2} = \frac{3R}{2}\right)$:

$$\frac{1}{2} m_0 v_i^2 - G \frac{m_p \cdot m_0}{R} = \frac{1}{2} m_0 \cdot 0^2 - G \frac{m_p \cdot m_0}{\frac{3R}{2}} .$$

Simplificando y despejando, la velocidad inicial queda:

$$\boxed{v_i = \sqrt{\frac{2Gm_p}{3R}} = \sqrt{\frac{2 \times 6{,}67 \times 10^{-11} \times 1{,}25 \times 10^{23}}{3 \times 1{,}5 \times 10^{6}}} = 1{,}92 \times 10^{3}\ \frac{m}{s}}$$

RESULTADO

Igualando las expresiones que para la fuerza gravitatoria dan las leyes de Gravitación Universal y Fundamental de la Dinámica podemos averiguar el valor numérico de la aceleración de la gravedad en el punto donde se para el objeto, tras su subida ($r = \frac{3R}{2}$):

$$F_{grav} = G\frac{m_P \cdot m_o}{\left(\frac{3R}{2}\right)^2} = m_o \cdot g\left(h = \frac{R}{2}\right) \quad ;$$

despejando:

$$g\left(h=\frac{R}{2}\right) = G\frac{m_P}{\left(\frac{3R}{2}\right)^2} = 6{,}67\times10^{-11}\,\frac{1{,}25\times10^{23}}{\left(\frac{3\times1{,}5\times10^{6}}{2}\right)^2}$$

$$\boxed{g\left(h=\frac{R}{2}\right) = 1{,}65\ m.s^{-2} \ : \ \text{RESULTADO}}$$

Un cohete de masa: 2 kg se lanza verticalmente desde la superficie terrestre, de tal manera que alcanza una altura máxima, con respecto a la superficie terrestre, de 500 km. Despreciando el rozamiento con el aire, calcule:

a) La velocidad del cuerpo en el momento del lanzamiento. Compárela con la velocidad de escape desde la superficie terrestre.

b) La distancia a la que se encuentra el cohete, con respecto al centro de la Tierra, cuando su velocidad se ha reducido en un 10 % con respecto a su velocidad de lanzamiento.

Datos:

Radio terrestre:	R_T	$= 6{,}37 \times 10^6$ m
Masa de la Tierra:	m_T	$= 5{,}97 \times 10^{24}$ kg
Constante de Gravitación Universal:	G	$= 6{,}67 \times 10^{-11}$ $N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$.

(Pruebas de acceso a la Universidad − Madrid, junio 2014)

SOLUCIÓN:-

La fuerza gravitatoria es conservativa. Aplicando el Principio de conservación de la energía mecánica, y considerando los puntos inicial -superficie de la Tierra- y final -el cohete se para, a la altura máxima-, tenemos:

$$\frac{1}{2} m_c \cdot v_i^2 - G\frac{m_T \cdot m_c}{R_T} = \frac{1}{2} m_c \cdot 0^2 - G\frac{m_T \cdot m_c}{R_T + h} \quad ;$$

despejando la velocidad inicial, queda:

$$\boxed{\begin{aligned} v_i &= \sqrt{2Gm_T\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_T+h}\right)} = \\ &= \sqrt{2 \times 6{,}67 \times 10^{-11} \times 5{,}97 \times 10^{24}\left(\frac{1}{6{,}37 \times 10^6} - \frac{1}{6{,}37 \times 10^6 + 5 \times 10^5}\right)} = \\ &= 3.016{,}49\ m \cdot s^{-1} \quad : \quad \text{RESULTADO} \end{aligned}}$$

La velocidad de escape desde la superficie terrestre es la velocidad mínima que ha de tener el cohete al salir desde dicha superficie para lograr salir del campo gravitatorio del planeta: llegar al infinito, con velocidad nula.

Aplicando, de nuevo, el Principio de conservación de la energía mecánica para obtener la expresión de esa velocidad de escape desde la superficie de la Tierra, encontramos:

$$\frac{1}{2} m_c \cdot v_{esc}^2 - G\frac{m_T \cdot m_c}{R_T} = \frac{1}{2} m_c \cdot v_{\infty}^2 - G\frac{m_T \cdot m_c}{\infty} = 0 \quad ;$$

$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2Gm_T}{R_T}} = \sqrt{\frac{2 \times 6{,}67 \times 10^{-11} \times 5{,}97 \times 10^{24}}{6{,}37 \times 10^{6}}} = 11.181{,}38\ \frac{m}{s}$$

Comparando esas dos velocidades halladas:

$$\boxed{\frac{v_i}{v_{esc}} = \frac{3.016{,}49}{11.181{,}38} = 0{,}27 \quad : \quad \text{RESULTADO}}$$

Aplicando, por tercera vez, el Principio de conservación de la energía mecánica, entre el punto inicial y aquel donde: $v = 0{,}9 v_i$, obtenemos:

$$\frac{1}{2} m_c v_i^2 - G\frac{m_T m_c}{R_T} = \frac{1}{2} m_c (0{,}9 v_i)^2 - G\frac{m_T m_c}{r} \quad ;$$

sustituyendo y simplificando:

$$\frac{1}{2} 3.016{,}49^2 - 6{,}67 \times 10^{-11} \frac{5{,}97 \times 10^{24}}{6{,}37 \times 10^{6}} = \frac{1}{2}(0{,}9 \times 3016{,}49)^2 - 6{,}67 \times 10^{-11} \frac{5{,}97 \times 10^{24}}{r}$$

finalmente:

$$\boxed{r = 6{,}46 \times 10^{6}\ m \quad : \quad \text{RESULTADO}}$$

La aceleración de la gravedad en la Luna es 0,166 veces la aceleración de la gravedad en la Tierra y el radio de la Luna es 0,273 veces el radio de la Tierra. Despreciando la influencia de la Tierra y utilizando exclusivamente los datos aportados, determine:

a) La velocidad de escape de un cohete que abandona la Luna desde su superficie.

b) El radio de la órbita circular que describe un satélite en torno a la Luna si su velocidad es de 1,5 $km \cdot s^{-1}$.

Datos: Constante de Gravitación Universal: $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$

Masa de la Tierra: $m_T = 5{,}98 \times 10^{24}$ kg

Radio de la Tierra: $R_T = 6{,}37 \times 10^{6}$ m .

(Pruebas de acceso a la Universidad − Madrid, septiembre 2012)

SOLUCIÓN:-

Consideremos un objeto de masa m en las superficies terrestre y lunar. Recordando las expresiones que para el valor de su peso en esas superficies dan las leyes de gravitación y fundamental de la dinámica -ambas de Newton-, tenemos:

Tierra: $G\dfrac{m_T m}{R_T^2} = m \cdot g_{sup,T}$; $g_{sup,T} = G\dfrac{m_T}{R_T^2}$

Luna: $G\dfrac{m_L m}{R_L^2} = m \cdot g_{sup,L}$; $g_{sup,L} = G\dfrac{m_L}{R_L^2}$.

Comparando ambas aceleraciones de la gravedad podemos hallar la masa de la Luna:

$$m_L = \frac{g_{sup,L} \cdot R_L^2}{G} = \frac{0{,}166 \cdot g_{sup,T} \cdot R_L^2}{G} = \frac{0{,}166 \cdot G\frac{m_T}{R_T^2}(0{,}273 R_T)^2}{G}$$

$$m_L = 0{,}166 \cdot 0{,}273^2 \cdot m_T = 0{,}166 \cdot 0{,}273^2 \cdot 5{,}98 \times 10^{24}\ kg$$

$$m_L = 7{,}40 \times 10^{22}\ kg \quad .$$

La velocidad de escape desde la superficie de la Luna es la velocidad mínima que debe tener el cohete a su salida, en la superficie de la Luna, para lograr abandonar el campo gravitatorio lunar. Dado que éste es conservativo, la aplicación del Principio de conservación de la energía mecánica conduce a:

$$E_{c,supL} + E_{p,supL} = E_{c,\infty} + E_{p,\infty} = 0 + 0 = 0$$

$$\frac{1}{2} m v_{esc,supL}^2 - G\frac{m_L \cdot m}{R_L} = 0 \quad ; \text{ de donde:}$$

$$\boxed{v_{esc,supL} = \sqrt{\frac{2Gm_L}{R_L}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}67\times10^{-11} \cdot 7{,}40\times10^{22}}{0{,}273 \cdot 6{,}37\times10^{6}}} = 2{,}38\times10^{3}\,ms^{-1}}$$

RESULTADO

Un satélite orbita con movimiento circular uniforme alrededor de la Luna porque la fuerza gravitatoria con la que ésta lo atrae es una fuerza centrípeta. Igualando las expresiones de los módulos de ambas, encontramos el radio de la órbita descrita por el satélite:

$$F_{grav} = F_{cpta} \quad ; \quad G\frac{m_L \cdot m_{sat}}{r^2} = \frac{m_{sat} \cdot v_{sat}^2}{r} \; ;$$

y despejando queda:

$$\boxed{r = \frac{Gm_L}{v_{sat}^2} = \frac{6{,}67\times10^{-11} \times 7{,}40\times10^{22}}{(1{,}5\times10^{3})^2} = 2{,}19\times10^{6}\,m \text{ : RESULTADO}}$$

Una nave espacial de 3.000 kg de masa describe, en ausencia de rozamiento, una órbita circular en torno a la Tierra a una distancia de $2,5 \times 10^4$ km de su superficie. Calcule:

a) El período de revolución de la nave espacial alrededor de la Tierra.

b) Las energías cinética y potencial de la nave en dicha órbita.

Datos: Constante de Gravitación Universal: $G = 6,67 \times 10^{-11}\ N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$
Masa de la Tierra: $m_T = 5,98 \times 10^{24}$ kg
Radio de la Tierra: $R_T = 6,37 \times 10^6$ m .

(Pruebas de acceso a la Universidad − Madrid, junio 2012)

SOLUCIÓN:-

El satélite describe un movimiento circular uniforme alrededor de la Tierra porque la fuerza gravitatoria con que ésta lo atrae es una fuerza centrípeta.

Si recordamos que, según el Teorema de Gauss del campo gravitatorio, la Tierra es gravitatoriamente equivalente a una partícula de masa igual a la del planeta y situada en su centro, lo que obliga siempre a tomar distancias desde el centro de la Tierra, tenemos:

- Fuerza:

$$F = G\frac{m_T m}{(h+R_T)^2} = m\frac{v^2}{h+R_T}$$

- Velocidad -módulo-:

$$v = \sqrt{\frac{G m_T}{h+R_T}} = \sqrt{\frac{6,67\times10^{-11}\times5,98\times10^{24}}{2,5\times10^7+6,37\times10^6}} = 3,57\times10^3\ \frac{m}{s}$$

- **Período orbital:**

A partir de la expresión del módulo de la velocidad lineal de la nave, despejamos:

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi (h + R_T)}{T} \quad ;$$

$$T = \frac{2\pi(h+R_T)}{v} = \frac{2\pi(2{,}5\times10^7 + 6{,}37\times10^6)}{3{,}57\times10^3} = 5{,}53\times10^4\ s$$

$$T = 15\ h\ 21\ min\ 16\ s$$

RESULTADO

- **Energía cinética:**

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}3.000\cdot(3{,}57\times10^3)^2 = 1{,}91\times10^{10}\ J$$

RESULTADO

- **Energía potencial gravitatoria:**

$$E_p = -G\frac{m_T m}{h+R_T} = -6{,}67\times10^{-11}\ \frac{5{,}98\times10^{24}\times3000}{(2{,}5\times10^7)+(6{,}37\times10^6)}\ J$$

$$E_p = -3{,}81\times10^{10}\ J$$: RESULTADO

Recordamos que para la nave en órbita se cumple:

$$E_p = -2E_c \quad .$$

FÍSICA de 2º de BACHILLERATO **MECÁNICA E INTERACCIÓN GRAVITATORIA**

Un satélite artificial está situado en una órbita circular en torno a la Tierra a una altura de su superficie de 2.500 km. Si el satélite tiene una masa de 1.100 kg:

a) Calcule la energía cinética del satélite y su energía mecánica total.

b) Calcule el módulo del momento angular del satélite respecto al centro de la Tierra.

Datos: Constante de Gravitación: $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N{\cdot}m^2{\cdot}kg^{-2}}$
Radio de la Tierra: $R_T = 6.370$ km
Masa de la Tierra: $m_T = 5{,}98 \times 10^{24}$ kg .

(Pruebas de acceso a la Universidad − Madrid, modelo 2012)

SOLUCIÓN:-

El satélite describe un movimiento circular uniforme alrededor de la Tierra porque la fuerza gravitatoria con que ésta lo atrae es una fuerza centrípeta.

Si recordamos que, según el Teorema de Gauss del campo gravitatorio, la Tierra es gravitatoriamente equivalente a una partícula de masa igual a la del planeta y situada en su centro, tenemos:

• Fuerza:
$$F = G\frac{m_T m}{(h+R_T)^2} = m\frac{v^2}{h+R_T}$$

(siempre tomamos distancias respecto al **centro** de la Tierra.)

• Velocidad -módulo-:

$$v = \sqrt{\frac{G m_T}{h+R_T}} = \sqrt{\frac{6{,}67\times10^{-11}\times5{,}98\times10^{24}}{(2.500+6.370)\times10^3}} = 6{,}71\times10^3\ \frac{m}{s}$$

• Energía cinética:

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} 1.100 \cdot (6{,}71 \times 10^3)^2 = 2{,}47 \times 10^{10}\ J$$

RESULTADO

• Energía potencial gravitatoria:

$$E_p = -G \frac{m_T m}{h + R_T} = -6{,}67 \times 10^{-11} \frac{5{,}98 \times 10^{24} \times 1.100}{(2.500 + 6.370) \times 10^3}\ J$$

$$E_p = -4{,}95 \times 10^{10}\ J = -2 E_c$$

• Energía mecánica:

$$E_{tot} = E_c + E_p = 2{,}47 \times 10^{10} + (-4{,}95 \times 10^{10})\ J = -E_c$$

$E_{tot} = -2{,}47 \times 10^{10}\ J$: RESULTADO

• Módulo del momento angular, respecto al centro de la Tierra:

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

$$L = r m v = (h + R_T) m v$$

$$L = (2500 + 6370) \cdot 10^3 \cdot 1.100 \cdot 6{,}71 \times 10^3\ kg\, m^2 s^{-1}$$

$L = 6{,}54 \times 10^{13}\ kg\, m^2 s^{-1}$: RESULTADO

FÍSICA de 2º de BACHILLERATO **MECÁNICA E INTERACCIÓN GRAVITATORIA**

Los satélites Meteosat son satélites geoestacionarios, situados sobre el ecuador terrestre y con un período orbital de un día.

a) Suponiendo que la órbita que describen es circular y poseen una masa de 500 kg, determine el módulo del momento angular de los satélites respecto del centro de la Tierra y la altura a la que se encuentran estos satélites respecto de la superficie terrestre.

b) Determine la energía mecánica de los satélites.

Datos:

Radio terrestre: $R_T = 6{,}37 \times 10^6$ m

Masa de la Tierra: $m_T = 5{,}97 \times 10^{24}$ kg

Constante de Gravitación Universal: $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ $N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$.

(Pruebas de acceso a la Universidad – Madrid, modelo 2014)

SOLUCIÓN.-

El satélite describe un movimiento circular uniforme alrededor de la Tierra porque la fuerza gravitatoria con que ésta lo atrae es una fuerza centrípeta. Igualando las expresiones de los módulos de ambas, y recordando, además la expresión del módulo de la velocidad lineal del satélite, podemos despejar el radio de la órbita que describe:

$$F_{grav} = F_{cpta};\quad G\frac{m_T m_S}{r^2} = m_S\frac{v_S^2}{r} = m_S\frac{\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2}{r} = \frac{4\pi^2 m_S \cdot r}{T^2}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{G \cdot m_T \cdot T^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{6{,}67\times10^{-11}\times5{,}97\times10^{24}\times(24\times3600)^2}{4\pi^2}} = 4{,}22\times10^7\,m$$

La altura sobre la superficie terrestre es, entonces:

$$\boxed{h = r - R_T = 4{,}22\times10^7 - 6{,}37\times10^6 = 3{,}59\times10^7\,m \ : \text{RESULTADO}}$$

El momento angular del satélite respecto al centro de la Tierra vale:

$$\vec{L} = \vec{r} \times (m_s \vec{v}) \quad .$$

Al ser $\vec{r}$ -radial- perpendicular a $m_s\vec{v}$ -tangencial-, su módulo queda:

$$L = r m_s v = r \cdot m_s \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi \cdot 5 \times 10^2 \cdot (4{,}22 \times 10^7)^2}{24 \cdot 3600}$$

$$\boxed{L = 6{,}48 \times 10^{13}\ kg\,m^2 \cdot s^{-1} \ : \ \text{RESULTADO}}$$

Las energías del satélite en órbita son:

- Energía cinética: $E_c = \frac{1}{2} m_s \cdot v^2 = G \frac{m_T \cdot m_s}{2r}$

- Energía potencial gravitatoria: $E_{p\,grav} = -G \frac{m_T \cdot m_s}{r}$

- Energía mecánica:

$$E_{tot} = E_c + E_{pgrav} = -G \frac{m_T \cdot m_s}{2r} = -6{,}67 \times 10^{-11} \frac{5{,}97 \times 10^{24} \times 5 \times 10^2}{2 \times 4{,}22 \times 10^7}$$

$$\boxed{E_{tot} = -2{,}36 \times 10^9\ J \ : \ \text{RESULTADO}}$$

FÍSICA de 2º de BACHILLERATO **MECÁNICA E INTERACCIÓN GRAVITATORIA**

Un satélite, de masa: 800 kg, orbita alrededor de la Luna con una velocidad angular de $4{,}33 \times 10^{-4}$ rad·s^{-1}. Despreciando rozamientos, determine:

a) La altura, medida desde la superficie de la Luna, a la que se encuentra el satélite orbitando, así como su período de revolución alrededor de la misma.

b) La energía mecánica del satélite a dicha altura.

Datos: Constante de Gravitación Universal: $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ N·m^2·kg^{-2}
Radio de la Luna: $R_L = 1.740$ **km**
Masa de la Luna: $m_L = 7{,}35 \times 10^{22}$ kg .

(Pruebas de acceso a la Universidad − Madrid, junio 2013 -Materias coincidentes-)

SOLUCIÓN:-

El satélite describe un movimiento circular uniforme alrededor de la Luna porque la la fuerza gravitatoria con que ésta lo atrae es una fuerza centrípeta. Igualando los módulos de ambas:

$$F_{grav} = F_{cpta} \; ; \; G\frac{m_L \cdot m_S}{(h+R_L)^2} = m_S \cdot \omega^2 (h+R_L)$$

podemos despejar la altura sobre la superficie lunar a la que orbita el satélite:

$$h = \sqrt[3]{\frac{G \cdot m_L}{\omega^2}} - R_L = \sqrt[3]{\frac{6{,}67\times10^{-11} \times 7{,}35\times10^{22}}{(4{,}33\times10^{-4})^2}} - 1{,}74\times10^6$$

$$\boxed{h = 1{,}23\times10^6 \text{ m} \quad : \quad \text{RESULTADO}}$$

A partir de la velocidad angular del satélite encontramos su período de revolución:

$$\boxed{T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{4{,}33\times10^{-4}}=1{,}45\times10^{4}\,s \quad : \text{RESULTADO}}$$

De la igualación de las expresiones de los módulos de las fuerzas gravitatoria y centrípeta obtenemos la energía cinética:

$$G\frac{m_L\cdot m_S}{(h+R_L)^2}=m_S\frac{v^2}{h+R_L}\;;\quad E_c=\frac{1}{2}m_S v^2=\frac{G\cdot m_L\cdot m_S}{2(h+R_L)}$$

Por otra parte, la energía potencial gravitatoria vale:

$$E_{p\,grav}=-\frac{G m_L\cdot m_S}{h+R_L}.$$

La energía mecánica del satélite en órbita queda, entonces:

$$E_{tot}=E_c+E_{p\,grav}=-\frac{G\cdot m_L\cdot m_S}{2(h+R_L)}$$

$$\boxed{E_{tot}=-\frac{6{,}67\times10^{-11}\times7{,}35\times10^{22}\times8\times10^{2}}{2(1{,}23\times10^{6}+1{,}74\times10^{6})}=-6{,}61\times10^{8}\,J}$$

RESULTADO

FÍSICA de 2º de BACHILLERATO **MECÁNICA E INTERACCIÓN GRAVITATORIA**

Una nave espacial de 800 kg de masa realiza una órbita circular de 6.000 km de radio alrededor de un planeta. Sabiendo que la energía mecánica de la nave es: $E_m = -3,27 \times 10^8$ J, determine:

a) La masa del planeta.

b) La velocidad angular de la nave en su órbita.

Dato: Constante de la Gravitación Universal: $G = 6,67 \times 10^{-11}\ N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$.

(Pruebas de acceso a la Universidad – Madrid, modelo 2013)

SOLUCIÓN:-

La nave describe un movimiento circular uniforme alrededor del planeta porque la fuerza gravitatoria con que éste la atrae es una fuerza centrípeta. Igualando los módulos de ambas, tenemos:

$$F_{grav} = F_{cpta} \ ; \quad G\frac{m_p \cdot m_n}{r^2} = m_n \frac{v^2}{r} \quad ;$$

con esta relación, las energías de la nave en órbita circular valen:

- Energía cinética: $E_c = \frac{1}{2} m_n v^2 = G\frac{m_p \cdot m_n}{2r}$
- Energía potencial gravitatoria: $E_p = -G\frac{m_p \cdot m_n}{r}$
- Energía mecánica:

$$E_m = E_c + E_p = G\frac{m_p \cdot m_n}{2r} - G\frac{m_p \cdot m_n}{r} = -G\frac{m_p \cdot m_n}{2r} \ .$$

De aquí podemos despejar la masa del planeta:

$$\boxed{m_p = -\frac{2r \cdot E_m}{G \cdot m_n} = -\frac{2 \times 6 \times 10^6 \times (-3,27 \times 10^8)}{6,67 \times 10^{-11} \times 8 \times 10^2} = 7,35 \times 10^{22}\ kg}$$

RESULTADO

De la primera igualdad podemos despejar el módulo de la velocidad lineal orbital de la nave:

$$v = \sqrt{\frac{G m_P}{r}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \times 10^{-11} \times 7{,}35 \times 10^{22}}{6 \times 10^{6}}}$$

$$v = 9{,}04 \times 10^{2}\ m \cdot s^{-1}$$

Finalmente, en función de este último dato y del radio de la órbita descrita, el módulo de la velocidad angular de la nave en su órbita es:

$$\boxed{\omega = \frac{v}{r} = \frac{9{,}04 \times 10^{2}}{6 \times 10^{6}} = 1{,}51 \times 10^{-4}\ rad \cdot s^{-1} : \text{RESULTADO}}$$

FÍSICA de 2º de BACHILLERATO **MECÁNICA E INTERACCIÓN GRAVITATORIA**

Un satélite artificial de masa: 100 kg describe una órbita circular alrededor de cierto planeta. La energía mecánica del satélite en dicha órbita es de -5×10^{7} J y su período de revolución es de 24 horas. Calcule:

a) El radio de la órbita.

b) La masa del planeta.

Dato: Constante de la Gravitación Universal: $G = 6{,}67\times10^{-11}$ N·m²·kg⁻² .

(Pruebas de acceso a la Universidad − Madrid, junio 2014 -Materias coincidentes-)

SOLUCIÓN:-

El satélite describe un movimiento circular uniforme alrededor del planeta porque la fuerza gravitatoria con que éste lo atrae es una fuerza centrípeta. Igualando las expresiones de los módulos de ambas, y recordando, también, cuánto vale el módulo de la velocidad lineal del satélite, tenemos:

$$F_{grav} = F_{cpta}$$

$$G\frac{m_p\cdot m_s}{r^2} = m_s\cdot\frac{v_s^2}{r} = m_s\frac{\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2}{r} = \frac{4\pi^2 m_s\cdot r}{T^2}.$$

Las energías del satélite en órbita son:

- Energía cinética: $E_c = \frac{1}{2}m_s v_s^2 = G\frac{m_p\cdot m_s}{2r}$
- Energía potencial gravitatoria: $E_{pgrav} = -G\frac{m_p\cdot m_s}{r}$
- Energía mecánica: $E_{tot} = E_c + E_{pgrav} = -G\frac{m_p\cdot m_s}{2r}$

Sustituyendo, planteamos este sistema de dos ecuaciones:

$$\begin{cases} G\dfrac{m_P}{r^2}=\dfrac{4\pi^2\cdot r}{T^2} \\ E_{tot}=-G\dfrac{m_P\cdot m_S}{2r} \end{cases} ; \quad \begin{cases} 6{,}67\times10^{-11}\dfrac{m_P}{r^2}=\dfrac{4\pi^2\cdot r}{(24\times3600)^2} \\ -5\times10^{7}=-6{,}67\times10^{-11}\dfrac{m_P\cdot 10^2}{2\cdot r} \end{cases}$$

Las soluciones son:

- Radio de la órbita: $r=1{,}38\times10^{7}\,m$
- Masa del planeta: $m_P=2{,}06\times10^{23}\,kg$

RESULTADO

Un satélite de masa *m* gira alrededor de la Tierra describiendo una órbita circular a una altura de 2×10^4 km sobre su superficie.

a) Calcule la velocidad orbital del satélite alrededor de la Tierra.

b) Suponga que la velocidad del satélite se anula repentina e instantáneamente y éste empieza a caer sobre la Tierra. Calcule la velocidad con la que llegaría el satélite a la superficie de la misma. Considere despreciable el rozamiento con el aire.

Datos: Constante de Gravitación Universal: $G = 6{,}67\times10^{-11}\ \mathrm{N\cdot m^2\cdot kg^{-2}}$

Masa de la Tierra: $m_T = 5{,}98\times10^{24}$ kg

Radio de la Tierra: $R_T = 6{,}37\times10^{6}$ m .

(Pruebas de acceso a la Universidad − Madrid, junio 2012)

SOLUCIÓN.-

El satélite describe un movimiento circular uniforme alrededor de la Tierra porque la fuerza gravitatoria con que ésta lo atrae es una fuerza centrípeta.

Si recordamos que, según el Teorema de Gauss del campo gravitatorio, la Tierra es gravitatoriamente equivalente a una partícula de masa igual a la del planeta y situada en su centro, lo que obliga siempre a tomar distancias desde el centro de la Tierra, tenemos, para el satélite en órbita:

- Fuerza: $$F = G\frac{m_T m}{(h+R_T)^2} = m\frac{v^2}{h+R_T}$$

- **Velocidad orbital -módulo-:**

$$\boxed{v=\sqrt{\frac{Gm_T}{h+R_T}}=\sqrt{\frac{6{,}67\times10^{-11}\times5{,}98\times10^{24}}{(2\times10^{7})+(6{,}37\times10^{6})}}=3{,}89\times10^{3}\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}}$$

RESULTADO

- Energía cinética:

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (3{,}89 \times 10^3)^2 = 7{,}56 \times 10^6\, m \quad J$$

- Energía potencial gravitatoria:

$$E_p = -G \frac{M_T m}{h + R_T} = -6{,}67 \times 10^{-11} \frac{5{,}98 \times 10^{24} \times m}{(2 \times 10^7) + (6{,}37 \times 10^6)} \; J$$

$$E_p = -1{,}51 \times 10^7\, m \;\; J = -2 E_c$$

- Energía mecánica:

$$E_{tot} = E_c + E_p = (7{,}56 \times 10^6 m) + (-1{,}51 \times 10^7 m) \; J$$

$$E_{tot} = -7{,}56 \times 10^6\, m \;\; J = -E_c$$

Tras su caída, al llegar a la **superficie terrestre** el satélite tiene una energía potencial gravitatoria:

$$E_{p_s} = -G \frac{M_T m}{R_T} = -6{,}67 \times 10^{-11} \frac{5{,}98 \times 10^{24} \times m}{6{,}37 \times 10^6} \;\; J$$

$$E_{p\,sup} = -6{,}26 \times 10^7\, m \;\; J$$

Dado que el **campo gravitatorio es conservativo la energía mecánica es constante**. Igualando sus valores en la órbita y en la superficie terrestre −ya que hemos despreciado el rozamiento con el aire−:

$$E_{tot,\,órbita} = -7{,}56 \times 10^6\, m = E_{p\,sup} + E_{c\,sup} = E_{tot,\,sup}$$

$$-7{,}56 \times 10^6\, m = -6{,}26 \times 10^7\, m + \frac{1}{2} m v_f^2$$; y de ahí:

$$\boxed{v_f = 1{,}05 \times 10^4 \; m \cdot s^{-1} \; : \; \text{RESULTADO}}$$

Un satélite artificial de 400 kg describe una órbita circular de radio: $\frac{5}{2}R_T$ alrededor de la Tierra. Determine:

a) El trabajo que hay que realizar para llevar al satélite desde la órbita circular de radio: $\frac{5}{2}R_T$ a otra órbita circular de radio: $5R_T$ y mantenerlo en dicha órbita.

b) El período de rotación del satélite en la órbita de radio: $5R_T$.

Datos: Constante de Gravitación Universal: $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ N\cdot m^2\cdot kg^{-2}$
Masa de la Tierra: $m_T = 5{,}98 \times 10^{24}$ kg
Radio de la Tierra: $R_T = 6{,}37 \times 10^{6}$ m .

(Pruebas de acceso a la Universidad − Madrid, septiembre 2012)

SOLUCIÓN:-

El satélite orbita alrededor de la Tierra con movimiento circular uniforme porque la fuerza gravitatoria con que ésta lo atrae es una fuerza centrípeta. Igualando las expresiones de sus respectivos módulos, y recordando las de las energías cinética y potencial gravitatoria, llegamos a la energía mecánica: E_{tot} del satélite en órbita:

$$G\frac{m_T m_{sat}}{r^2} = m_{sat}\frac{v_{sat}^2}{r}$$

$$E_{tot}(r) = E_c(r) + E_p(r) = \frac{1}{2}m_{sat}v_{sat}^2 - G\frac{m_T\cdot m_{sat}}{r} = -G\frac{m_T m_{sat}}{2r}$$

El trabajo necesario para que el satélite cambie de órbita es la variación de esa energía mecánica:

$$W\left(r_i = \tfrac{5}{2}R_T \to r_f = 5R_T\right) = \Delta E_{tot} = E_{tot}(r_f = 5R_T) - E_{tot}\left(r_i = \tfrac{5}{2}R_T\right).$$

Con la expresión anterior de la energía mecánica queda:

$$W\left(r_i=\frac{5}{2}R_T \rightarrow r_f=5R_T\right) = -G\frac{m_T m_{sat}}{2\cdot 5R_T} - \left(-G\frac{m_T\cdot m_{sat}}{2\cdot\frac{5}{2}R_T}\right) =$$

$$= \frac{G m_T m_{sat}}{10 R_T} = \frac{6{,}67\times10^{-11}\times5{,}98\times10^{24}\times4\times10^{2}}{10\times6{,}37\times10^{6}}\ J$$

$$\boxed{W\left(r_i=\frac{5}{2}R_T\rightarrow r_f=5R_T\right)=2{,}50\times10^{9}\ J : \text{RESULTADO}}$$

Una vez que el satélite está describiendo la órbita de radio: $r_f = 5R_T$, el módulo de su velocidad lineal es:

$$v_{sat} = \frac{2\pi(5R_T)}{T} = \sqrt{\frac{G m_T}{5R_T}}\ ;$$

y de aquí podemos determinar el período orbital del satélite en esta órbita final:

$$T = \frac{10\pi R_T}{\sqrt{\frac{G m_T}{5R_T}}} = \frac{10\pi\times6{,}37\times10^{6}}{\sqrt{\frac{6{,}67\times10^{-11}\times5{,}98\times10^{24}}{5\times6{,}37\times10^{6}}}} = 5{,}65\times10^{4}\ s$$

$$\boxed{T(r=5R_T)=5{,}65\times10^{4}\ s = 15\ h\ 42\ min\ 30\ s : \text{RESULTADO}}$$

FÍSICA de 2º de BACHILLERATO **MECÁNICA E INTERACCIÓN GRAVITATORIA**

Dos satélites describen órbitas circulares alrededor de un planeta cuyo radio es de 3.000 km. El primero de ellos orbita a 1.000 km de la superficie del planeta y su período orbital es de 2 h. La órbita del segundo tiene un radio 500 km mayor que la del primero. Calcule:

a) El módulo de la aceleración de la gravedad en la superficie del planeta.

b) El período orbital del segundo satélite.

(Pruebas de acceso a la Universidad − Madrid, septiembre 2013)

SOLUCIÓN:-

Igualando las expresiones que para el peso del satélite, situado en la superficie del planeta, dan la ley de Gravitación Universal y la ley Fundamental de la Dinámica, obtenemos la aceleración de la gravedad en la superficie de ese planeta:

$$G\frac{m_p \cdot m_s}{R_p^2} = m_s \cdot g_{sup} \quad ; \quad g_{sup} = G\frac{m_p}{R_p^2} \, .$$

Cuando el satélite orbita alrededor del planeta, describe un movimiento circular uniforme, dado que la fuerza gravitatoria ejercida por el planeta es una fuerza centrípeta. Igualando las expresiones de los módulos de ambas, y recordando también la expresión del módulo de la velocidad lineal del satélite en órbita, tenemos, para el primer satélite:

$$G\frac{m_p\cdot m_{s_1}}{r_1^2}=m_{s_1}\frac{v_{s_1}^2}{r_1}=m_{s_1}\frac{\left(\frac{2\pi r_1}{T_1}\right)^2}{r_1}=\frac{4\pi^2 m_{s_1}\cdot r_1}{T_1^2} \quad ;$$

de donde despejamos:

$$G\,m_p=\frac{4\pi^2 r_1^3}{T_1^2} \quad ;$$

sustituyendo en la expresión de la aceleración de la gravedad en la superficie del planeta, encontramos:

$$\boxed{g_{sup}=\frac{G\,m_p}{R_p^2}=\frac{4\pi^2 r_1^3}{R_p^2\cdot T_1^2}=\frac{4\pi^2(4\times10^6)^3}{(3\times10^6)^2\times(2\times3600)^2}=5{,}42\,\frac{m}{s^2}}$$

RESULTADO

Para el segundo satélite, su período orbital vale:

$$G\,m_p=\frac{4\pi^2 r_1^3}{T_1^2}=\frac{4\pi^2 r_2^3}{T_2^2} \quad ;$$

y despejando y sustituyendo llegamos a:

$$T_2=\sqrt{\frac{r_2^3}{r_1^3}\cdot T_1^2}=\sqrt{\frac{(4{,}5\times10^6\,m)^3}{(4\times10^6\,m)^3}}\cdot 2\times3600\,s$$

$$\boxed{T_2=8.591{,}35\,s=2\,h\;23\,min\;11{,}35\,s \;:\; \text{RESULTADO}}$$

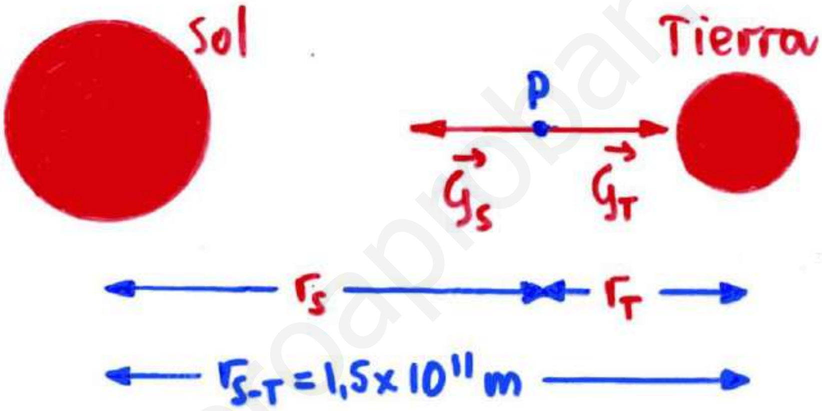
La masa del Sol es 333.183 veces mayor que la de la Tierra y la distancia que separa sus centros es de $1,5 \times 10^8$ km. Determine si existe algún punto a lo largo de la línea que los une en el que se anule:

a) El potencial gravitatorio. En caso afirmativo, calcule su distancia a la Tierra.

b) El campo gravitatorio. En caso afirmativo, calcule su distancia a la Tierra.

(Pruebas de acceso a la Universidad − Madrid, modelo 2014)

SOLUCIÓN:-



El potencial gravitatorio creado por un objeto -puntual- de masa m, a distancia r, vale:

$$V = -G\frac{m}{r} \quad ;$$

y es una magnitud escalar.

En consecuencia:

$$V_{tot} = V_S + V_T = -G\frac{m_S}{r} + \left(-G\frac{m_T}{r'}\right) \neq 0$$

$$(V_{tot} < 0)$$

En ningún punto de la línea Sol-Tierra el potencial gravitatorio total puede ser nulo.   **RESULTADO**

En cambio, al ser la intensidad del campo gravitatorio una magnitud vectorial, si los vectores intensidades de campo gravitatorio debidos al Sol y a la Tierra son iguales y contrarios si será nula la intensidad del campo gravitatorio resultante.

Tenemos:

$$g_S = g_T \quad ; \quad G\frac{m_S}{(r_{S-T} - r_T)^2} = G\frac{m_T}{r_T^2}$$

$$G\frac{333.183\, m_T}{(1{,}5\times10^{11} - r_T)^2} = G\frac{m_T}{r_T^2}$$

Simplificando por: Gm_T en ambos miembros, despejamos la distancia del punto P - donde la intensidad del campo gravitatorio resultante es nula - al centro de la Tierra:

$$\boxed{r_T = 2{,}59\times10^8\,\text{m} \quad : \quad \text{RESULTADO}}$$

Fuera de la zona entre el Sol y la Tierra en ningún punto de la línea que une sus centros la intensidad del campo gravitatorio resultante puede ser nula, ya que $\vec{g}_{Sol}$ y $\vec{g}_{Tierra}$ tienen el mismo sentido, por lo que sus módulos se suman, en lugar de contrarrestarse.

Se considera el movimiento elíptico de la Tierra en torno al Sol. Cuando la Tierra está en el afelio (la posición más alejada del Sol) su distancia al Sol es de $1{,}52 \times 10^{11}$ m y su velocidad orbital es de $2{,}92 \times 10^{4}$ m/s. Hallar:

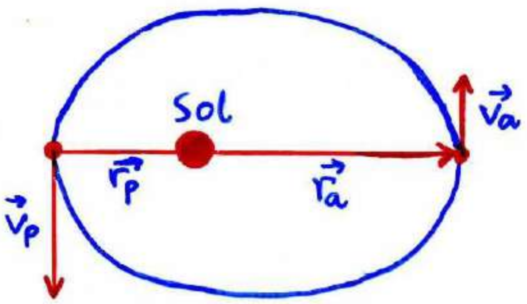
a) El momento angular de la Tierra respecto al Sol.

b) La velocidad orbital en el perihelio (la posición más cercana al Sol), siendo en este punto su distancia al Sol de $1{,}47 \times 10^{11}$ m.

Datos complementarios: masa de la Tierra: $m_T = 5{,}98 \times 10^{24}$ kg.

(Pruebas de acceso a la Universidad − Madrid, junio 1997)

SOLUCIÓN:



El momento angular de la Tierra respecto del Sol es constante en toda la órbita, al ser la fuerza gravitatoria entre el Sol y la Tierra una fuerza central. Calculando el módulo del momento angular en el afelio, habida cuenta de la perpendicularidad entre $\vec{r}$ y $\vec{v}$, tenemos:

$$\boxed{L = r_a m v_a = 1{,}52 \times 10^{11} \cdot 5{,}98 \times 10^{24} \cdot 2{,}92 \times 10^{4} = 2{,}65 \times 10^{40}\ \text{kg m}^2 \text{s}^{-1}}$$

RESULTADO

Dada la conservación del momento angular, antes comentada, la velocidad de la Tierra en el perihelio vale:

$$L_p = L_a;\quad r_p m v_p = r_a m v_a;\quad \boxed{v_p = \frac{r_a v_a}{r_p} = \frac{1{,}52 \times 10^{11} \cdot 2{,}92 \times 10^{4}}{1{,}47 \times 10^{11}} = 3{,}02 \times 10^{4}\ \text{m s}^{-1}}$$

RESULTADO

NOTA: el dibujo anterior no es del todo correcto, ya que la órbita de la Tierra alrededor del Sol es casi circular:

$$\text{excentricidad} = \frac{1{,}52 \times 10^{11} - 1{,}47 \times 10^{11}}{1{,}52 \times 10^{11} + 1{,}47 \times 10^{11}} = 0{,}017\ .$$

Mercurio describe una órbita elíptica alrededor del Sol. En el afelio su distancia al Sol es de $6{,}99 \times 10^{10}$ m y su veloicidad orbital es de $3{,}88 \times 10^4$ m/s, siendo su distancia al Sol en el perihelio de $4{,}60 \times 10^{10}$ m.

a) Calcule la velocidad orbital de Mercurio en el perihelio.

b) Calcule las energías cinética, potencial y mecánica de Mercurio en el perihelio.

c) Calcule el módulo de su momento lineal y de su momento angular en el perihelio.

d) De las magnitudes calculadas en los apartados anteriores, decir cuáles son iguales en el afelio.

Datos:

Masa de Mercurio: $M_M = 3{,}18 \times 10^{23}$ kg

Masa del Sol: $M_S = 1{,}99 \times 10^{30}$ kg

Constante de gravitación universal: $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ Nm^{2}kg^{-2}.

(Pruebas de acceso a la Universidad − Madrid, junio 2003)

SOLUCIÓN.-

La fuerza gravitatoria con la que el Sol atrae a Mercurio es central y conservativa, y por ello tanto el momento angular como la energía mecánica del planeta se mantienen constantes.

Igualando las expresiones del módulo del momento angular del planeta en el afelio y en el perihelio obtenemos el módulo de la velocidad orbital de Mercurio en esta posición:

$L_a = L_p$; $r_a m_M v_a = r_p m_M v_p$; de donde:

$$v_p = \frac{r_a v_a}{r_p} = \frac{6{,}99 \times 10^{10} \times 3{,}88 \times 10^4}{4{,}60 \times 10^{10}} = 5{,}90 \times 10^4 \text{ ms}^{-1}.$$

Recordando sus respectivas expresiones, las energías cinética, potencial gravitatoria y mecánica -total- de Mercurio valen:

a) en el afelio.-

$$E_{c,a} = \frac{1}{2} m_M v_a^2 = \frac{1}{2} 3{,}18\times10^{23} \times (3{,}88\times10^4)^2 = 2{,}39\times10^{32}\ J$$

$$E_{p,a} = -\frac{G m_S m_M}{r_a} = -\frac{6{,}67\times10^{-11} \times 1{,}99\times10^{30} \times 3{,}18\times10^{23}}{6{,}99\times10^{10}} = -6{,}04\times10^{32}\ J$$

$$E_{tot,a} = E_{c,a} + E_{pa} = 2{,}39\times10^{32} - 6{,}04\times10^{32} = -3{,}65\times10^{32}\ J$$

b) en el perihelio.-

$$E_{c,p} = \frac{1}{2} m_M v_p^2 = \frac{1}{2} 3{,}18\times10^{23} \times (5{,}90\times10^4)^2 = 5{,}53\times10^{32}\ J$$

$$E_{p,p} = -\frac{G m_S m_p}{r_p} = -\frac{6{,}67\times10^{-11} \times 1{,}99\times10^{30} \times 3{,}18\times10^{23}}{4{,}60\times10^{10}} = -9{,}18\times10^{32}\ J$$

$$E_{tot,p} = E_{c,p} + E_{p,p} = 5{,}53\times10^{32} - 9{,}18\times10^{32} = -3{,}65\times10^{32}\ J = E_{tot,a}$$

Por otra parte, los módulos de los momentos lineal y angular valen, respectivamente:

a) en el afelio.-

$$p_a = m_M v_a = 3{,}18\times10^{23} \times 3{,}88\times10^4 = 1{,}23\times10^{28}\ kgms^{-1}$$

$$L_a = r_a m_M v_a = 6{,}99\times10^{10} \times 1{,}23\times10^{28} = 8{,}62\times10^{38}\ kgm^2s^{-1}$$

b) en el perihelio.-

$$p_P = m_M v_P = 3{,}18\times10^{23}\times 5{,}90\times10^{4} = 1{,}87\times10^{28}\ kg\,m\,s^{-1}$$

$$L_P = r_P m_M v_P = 4{,}60\times10^{10}\times 1{,}87\times10^{28} = 8{,}62\times10^{38}\ kg\,m^2 s^{-1} = L_a$$

En resumen, queda:

Magnitud -valor numérico-		Afelio	Perihelio
Distancia al Sol		$6{,}99\times10^{10}\ m$	$4{,}60\times10^{10}\ m$
Velocidad orbital		$3{,}88\times10^{4}\ m\,s^{-1}$	$5{,}90\times10^{4}\ m\,s^{-1}$
ENERGÍA	cinética	$2{,}39\times10^{32}\ J$	$5{,}53\times10^{32}\ J$
	potencial	$-6{,}04\times10^{32}\ J$	$-9{,}18\times10^{32}\ J$
	mecánica	$-3{,}65\times10^{32}\ J$	
MOMENTO	lineal	$1{,}23\times10^{28}\ kg\,m\,s^{-1}$	$1{,}87\times10^{28}\ kg\,m\,s^{-1}$
	angular	$8{,}62\times10^{38}\ kg\,m^2 s^{-1}$	
RESULTADOS			

FÍSICA de 2º de BACHILLERATO **MECÁNICA E INTERACCIÓN GRAVITATORIA**

Suponiendo que los planetas Venus y la Tierra describen órbitas circulares alrededor del Sol, calcule:

a) el período de revolución de Venus;

b) las velocidades orbitales de Venus y de la Tierra.

Datos: Distancia de la Tierra al Sol $= 1{,}49 \times 10^{11}$ m

Distancia de Venus al Sol $= 1{,}08 \times 10^{11}$ m

Período de revolución de la Tierra $= 365$ días.

(Pruebas de acceso a la Universidad − Madrid, junio 2009)

SOLUCIÓN:-

Podemos calcular el período orbital de Venus despejándolo de la expresión de la Tercera Ley de Kepler:

$$\frac{T_V^2}{T_T^2} = \frac{r_V^3}{r_T^3} \quad ;$$

$$\boxed{T_V = \sqrt{\frac{r_V^3}{r_T^3} T_T^2} = \sqrt{\left(\frac{1{,}08 \times 10^{11}}{1{,}49 \times 10^{11}}\right)^3 (365 \times 24 \times 60 \times 60)^2} = 1{,}95 \times 10^7 \text{ s}}$$

RESULTADO

Los módulos de las velocidades orbitales de Venus y la Tierra valen, respectivamente:

$$v_V = \frac{2\pi r_V}{T_V} = \frac{2\pi \times 1{,}08 \times 10^{11}}{1{,}95 \times 10^7} = 3{,}49 \times 10^4 \text{ m·s}^{-1}$$

$$v_T = \frac{2\pi r_T}{T_T} = \frac{2\pi \times 1{,}49 \times 10^{11}}{365 \times 24 \times 60 \times 60} = 2{,}97 \times 10^4 \text{ m·s}^{-1}$$

RESULTADO

Un satélite artificial de masa 200 kg se mueve alrededor de la Tierra en una órbita elíptica definida por una distancia al perigeo (posición más próxima al centro de la Tierra) de $7{,}02 \times 10^6$ m y una distancia al apogeo (posición más alejada del centro de la Tierra) de $10{,}30 \times 10^6$ m. Si en el perigeo el módulo de la velocidad es $8{,}22 \times 10^3$ m/s:

a) ¿Cuál es el módulo de la velocidad en el apogeo?.

b) Determine el módulo y dirección del momento angular del satélite.

c) Determine la velocidad areolar del satélite.

d) Determine la energía mecánica del satélite.

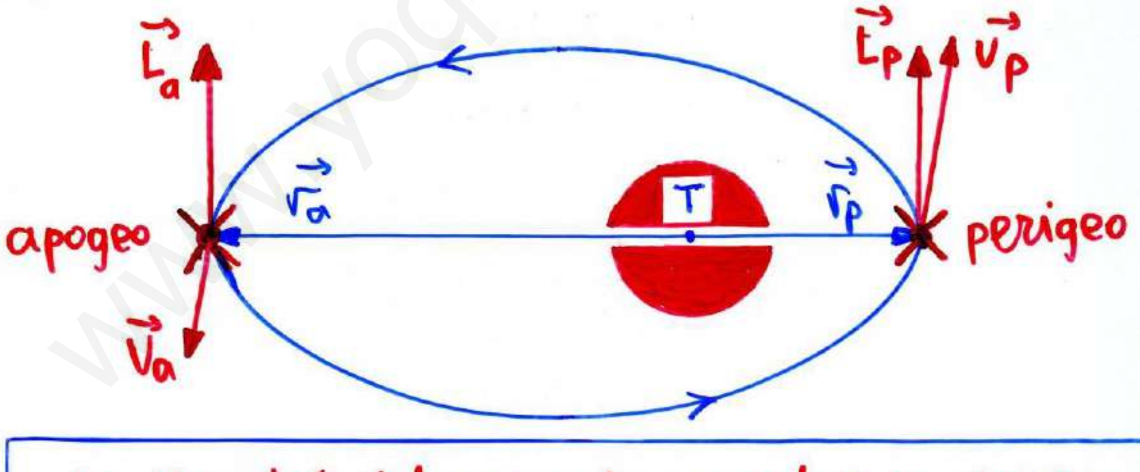
Datos: Constante de Gravitación Universal: $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$

Masa de la Tierra: $m_T = 5{,}98 \times 10^{24}$ kg .

(Pruebas de acceso a la Universidad − Madrid, septiembre 2011 -Materias coincidentes-)

SOLUCIÓN:-

La fuerza gravitatatatoria con la que la Tierra atrae al satélite es una fuerza central y, a consecuencia de ello, el momento angular del satélite respecto al centro de la Tierra es constante:



La dirección del momento angular es perpendicular al plano de la órbita descrita por el satélite, y su módulo vale:

$$L = L_p = r_p m v_p = 7{,}02 \times 10^6 \times 2 \times 10^2 \times 8{,}22 \times 10^3 = 1{,}15 \times 10^{13}\ \mathrm{kg\,m^2 s^{-1}}$$

RESULTADO

Igualando los módulos del momento angular en el apogeo y en el perigeo podemos despejar el módulo de la velocidad en el apogeo:

$$L_p = L_a \; ; \quad r_p m v_p = r_a m v_a \; ;$$

$$\boxed{v_a = \frac{r_p v_p}{r_a} = \frac{7{,}02\times10^6 \times 8{,}22\times10^3}{10{,}30\times10^6} = 5{,}60\times10^3 \ \frac{m}{s}}$$

RESULTADO

La velocidad areolar es el ritmo al cual va barriendo área el radio-vector que une el centro de la Tierra con el satélite, y, en función del módulo del momento angular -que es constante, por lo que dicha velocidad areolar también es constante- vale:

$$\boxed{v_a = \frac{L}{2m} = \frac{1{,}15\times10^{13}}{2\cdot200} = 2{,}89\times10^{10}\ m^2\cdot s^{-1}} : \text{RESULTADO}$$

La energía mecánica del satélite también es constante, dado que el campo gravitatorio es conservativo. La calculamos, por ejemplo, en el apogeo:

$$E_{tot} = E_{tot}(a) = E_c(a) + E_p(a) = \frac{1}{2} m v_a^2 - G\frac{m_T m}{r_a}$$

$$E_{tot} = \frac{1}{2}200\cdot(5{,}60\times10^3)^2 - 6{,}67\times10^{-11}\frac{5{,}98\times10^{24}\times200}{10{,}30\times10^6}$$

$$\boxed{E_{tot} = -4{,}61\times10^9\ J \ : \ \text{RESULTADO}}$$

Io, un satélite de Júpiter, tiene una masa de $8{,}9 \times 10^{22}$ kg, un período orbital de 1,77 días y un radio medio orbital de $4{,}22 \times 10^{8}$ m. Considerando que la órbita es circular con este radio, determine:

a) la masa de Júpiter;
b) la intensidad del campo gravitatorio, debida a Júpiter, en los puntos de la órbita de Io;
c) la energía cinética de Io en su órbita;
d) el módulo del momento angular de Io respecto al centro de su órbita.

Dato: Constante de Gravitación Universal: $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$.

(Pruebas de acceso a la Universidad − Madrid, junio 2010 -Fase General-)

SOLUCIÓN.-

Io describe un movimiento circular uniforme en torno a Júpiter porque la fuerza gravitatoria con que éste lo atrae es una fuerza centrípeta. Igualando las expresiones de los módulos de ambas, y recordando la del módulo de la velocidad lineal del satélite, podemos despejar la masa de Júpiter:

$$F_{grav} = F_{cpta} \; ; \quad G\frac{m_J m_{Io}}{r^2} = m_{Io}\frac{v^2}{r} = m_{Io}\frac{\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2}{r} \; ;$$

$$\boxed{m_J = \frac{4\pi^2 r^3}{G T^2} = \frac{4\pi^2 (4{,}22 \times 10^8)^3}{6{,}67 \times 10^{-11} \cdot (1{,}53 \times 10^5)^2} = 1{,}90 \times 10^{27}\ kg}$$

RESULTADO

Hemos utilizado como período orbital de Io:

$$T = 1{,}77 \text{ días} = 1{,}77 \times 24 \times 60 \times 60\ s = 1{,}53 \times 10^5\ s.$$

La intensidad del campo gravitatorio de Júpiter en los puntos de la órbita de Io es un vector dirigido hacia el centro de Júpiter, cuyo módulo es el de la fuerza gravitatoria sobre la unidad de masa; por tanto:

$$g = G\frac{m_J}{r^2} = 6{,}67\times10^{-11}\,\frac{1{,}90\times10^{27}}{(4{,}22\times10^{8})^2} = 0{,}71\ \mathrm{N\cdot kg^{-1}}$$

RESULTADO

La energía cinética de Io vale:

$$E_c = \frac{1}{2}m_{Io}v^2 = \frac{1}{2}m_{Io}\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2 = \frac{1}{2}8{,}9\times10^{22}\left(\frac{2\pi\times4{,}22\times10^{8}}{1{,}53\times10^{5}}\right)^2$$

$E_c = 1{,}34\times10^{31}$ J : RESULTADO

Finalmente, el módulo del momento angular de Io respecto al centro de su órbita vale:

$$\vec{L}_{Io} = \vec{r}\times m_{Io}\vec{v}$$

$$L_{Io} = r\cdot m_{Io}\cdot v = r\cdot m_{Io}\,\frac{2\pi r}{T} = \frac{8{,}9\times10^{22}\cdot2\pi(4{,}22\times10^{8})^2}{1{,}53\times10^{5}}$$

$L_{Io} = 6{,}51\times10^{35}\ \mathrm{kg\,m^2s^{-1}}$: RESULTADO

Fobos es un satélite de Marte que gira en una órbita circular de 9.380 km de radio, respecto al centro del planeta, con un período de revolución de 7,65 horas. Otro satélite de Marte, Deimos, gira en una órbita de 23.460 km de radio. Determine:

a) la masa de Marte;
b) el período de revolución del satélite Deimos;
c) la energía mecánica del satélite Deimos;
d) el módulo del momento angular de Deimos respecto al centro de Marte.

Datos:

Constante de Gravitación Universal: G $= 6{,}67 \times 10^{-11}\ Nm^2kg^{-2}$
Masa de Fobos $= 1{,}1 \times 10^{16}$ kg
Masa de Deimos $= 2{,}4 \times 10^{15}$ kg.

(Pruebas de acceso a la Universidad − Madrid, junio 2007)

Solución.-

Los dos satélites describen sus respectivas órbitas circulares alrededor de Marte porque las fuerzas gravitatorias con que son atraídos por éste también son fuerzas centrípetas. Igualando las expresiones de ambas, tenemos:

a) Para Fobos.-

$$G\frac{m_M m_F}{r_F^2} = m_F\frac{v_F^2}{r_F} = m_F\frac{\left(\frac{2\pi r_F}{T_F}\right)^2}{r_F} \quad ;$$

despejando la masa de Marte: m_M queda:

$$\boxed{m_M = \frac{4\pi^2 r_F^3}{G T_F^2} = \frac{4\pi^2(9{,}38\times 10^6)^3}{6{,}67\times 10^{-11}(7{,}65\times 3.600)^2} = 6{,}44\times 10^{23}\ kg}$$

RESULTADO

b) Para Deimos.-

$$G\frac{m_M m_D}{r_D^2} = m_D \frac{v_D^2}{r_D} = m_D \frac{\left(\frac{2\pi r_D}{T_D}\right)^2}{r_D} \quad ;$$

despejando el período orbital de Deimos: T_D queda ahora:

$$T_D = \sqrt{\frac{4\pi^2 r_D^3}{G\, m_M}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 (23{,}46\times10^6)^3}{6{,}67\times10^{-11}\times 6{,}44\times10^{23}}} = 1{,}09\times10^5\,s$$

(30,26 horas)

RESULTADO

c) La energía mecánica de Deimos vale:

$$E_{tot,D} = E_{c,D} + E_{p,D} = \frac{1}{2} m_D v_D^2 - G\frac{m_M m_D}{r_D} =$$

$$= G\frac{m_M m_D}{2 r_D} - G\frac{m_M m_D}{r_D} = -G\frac{m_M m_D}{2 r_D} .$$

$$E_{tot,D} = -6{,}67\times10^{-11}\,\frac{6{,}44\times10^{23}\times 2{,}4\times10^{15}}{2\times 23{,}46\times10^6} = -2{,}20\times10^{21}\,J$$

RESULTADO

d) Por último, el módulo del momento angular de Deimos respecto al centro de Marte vale:

$$L_D = r_D m_D v_D = r_D m_D \frac{2\pi r_D}{T_D} = \frac{2\pi m_D r_D^2}{T_D}$$

$$L_D = \frac{2\pi\times 2{,}4\times10^{15}(23{,}46\times10^6)^2}{1{,}09\times10^5} = 7{,}62\times10^{25}\,kg\,m^2 s^{-1}$$

RESULTADO

FÍSICA de 2º de BACHILLERATO **MECÁNICA E INTERACCIÓN GRAVITATORIA**

Un planeta tiene dos satélites, A y B, que describen órbitas circulares de radios: 8.400 km y 23.500 km, respectivamente. El satélite A, en su desplazamiento en torno al planeta, barre un área de 8.210 km^2 en un segundo. Sabiendo que la fuerza que ejerce el planeta sobre el satélite A es 37 veces mayor que sobre el satélite B:

a) Determine el período del satélite A.
b) Halle la masa del planeta.
c) Obtenga la relación entre las energías mecánicas de ambos satélites.
d) Calcule el vector momento angular del satélite A, si tiene una masa de: $1{,}08 \times 10^{16}$ kg.

Dato: Constante de Gravitación Universal: $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$.

(Pruebas de acceso a la Universidad − Madrid, junio 2010 -Materias coincidentes-)

SOLUCIÓN:-

La velocidad areolar -υ- es el ritmo al cual el radio vector planeta-satélite va barriendo el área. Para órbitas circulares, y tomando una órbita completa:

$$\upsilon = \frac{\pi r^2}{T} \quad (m^2 \cdot s^{-1})$$

Despejando el período orbital del satélite A obtenemos:

$$\boxed{T_A = \frac{\pi r_A^2}{\upsilon_A} = \frac{\pi (8{,}400 \times 10^6)^2}{8{,}210 \times 10^6} = 2{,}70 \times 10^4\, s \ : \text{RESULTADO}}$$

Si el satélite describe un movimiento circular uniforme alrededor del planeta es porque la fuerza gravitatoria con que éste lo atrae es una fuerza centrípeta. Recordando las expresiones de los módulos de ambos y el de la velocidad lineal del satélite, tenemos:

$$F_{grav} = F_{cpta} \quad ; \quad v = \frac{2\pi r}{T}$$

$$G\frac{m_P m_S}{r^2} = m_S \frac{v_S^2}{r} = m_S \frac{\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2}{r} = \frac{4\pi^2 m_S r}{T^2} \quad ;$$

con los datos del satélite A podemos despejar la masa del planeta:

$$\boxed{m_P = \frac{4\pi^2 r_A^3}{G T_A^2} = \frac{4\pi^2 (8{,}400 \times 10^6)^3}{6{,}67 \times 10^{-11} \times (2{,}70 \times 10^4)^2} = 4{,}81 \times 10^{23}\ \text{kg}}$$

RESULTADO

La relación entre las energías mecánicas de ambos satélites la podemos obtener así:

$$E_c = \frac{1}{2} m_S v_S^2 = G\frac{m_P m_S}{2r} \quad ; \quad E_P = -G\frac{m_P m_S}{r}$$

$$E_{tot} = -G\frac{m_P m_S}{2r}$$

$$\frac{E_{tot}(A)}{E_{tot}(B)} = \frac{-G\frac{m_P m_A}{2r_A}}{-G\frac{m_P m_B}{2r_B}} = \frac{G\frac{m_P m_A}{r_A}}{G\frac{m_P m_B}{r_B}} = \frac{G\frac{m_P m_A}{r_A^2} r_A}{G\frac{m_P m_B}{r_B^2} r_B} =$$

$$= \frac{F_{grav}(A)}{F_{grav}(B)} \cdot \frac{r_A}{r_B} = 37\, \frac{8{,}400 \times 10^6}{2{,}350 \times 10^7} = 13{,}23$$

RESULTADO

El vector momento angular del satélite A respecto al centro del planeta vale:

$$\vec{L}_A = \vec{r}_A \times m_A \vec{v}_A$$

Es, por tanto, un vector perpendicular al plano de la órbita descrita por el satélite, y al ser ésta una órbita circular su módulo vale:

$$L_A = r_A m_A v_A = r_A m_A \frac{2\pi r_A}{T_A} = \frac{2\pi m_A r_A^2}{T_A} =$$

$$= \frac{2\pi \times 1{,}08 \times 10^{16} (8{,}400 \times 10^6)^2}{2{,}70 \times 10^4} = 1{,}77 \times 10^{26} \text{ kg}\,m^2 s^{-1}$$

RESULTADO

FÍSICA DE 2º DE BACHILLERATO **MECÁNICA E INTERACCIÓN GRAVITATORIA**

Dos planetas de masas iguales orbitan alrededor de una estrella de masa mucho mayor. El planeta 1 se mueve en una órbita circular de radio 10^{11} m y período de 2 años. El planeta 2 se mueve en una órbita elíptica, siendo su distancia en la posición más próxima a la estrella 10^{11} m y en la más alejada: $1,8 \times 10^{11}$ m.

a) ¿Cuál es la masa de la estrella?.

b) Halle el período de la órbita del planeta 2.

c) Utilizando los principios de conservación del momento angular y de la energía mecánica, hallar la velocidad del planeta 2 cuando se encuentra en la posición más cercana a la estrella.

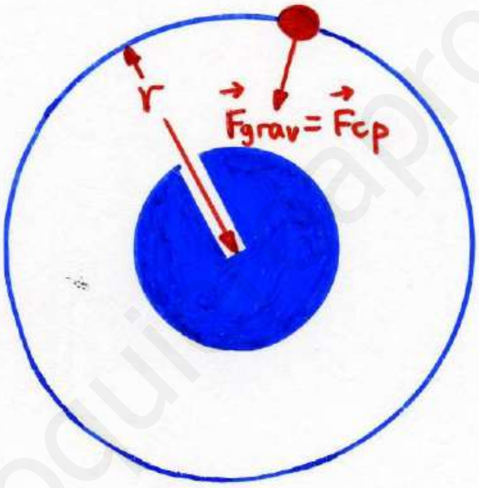
Dato:

Constante de Gravitación Universal: $G = 6,67 \times 10^{-11}$ Nm^2kg^{-2}

(Pruebas de acceso a la Universidad − Madrid, modelo 2002)

SOLUCIÓN:

Planeta 1 órbita circular:

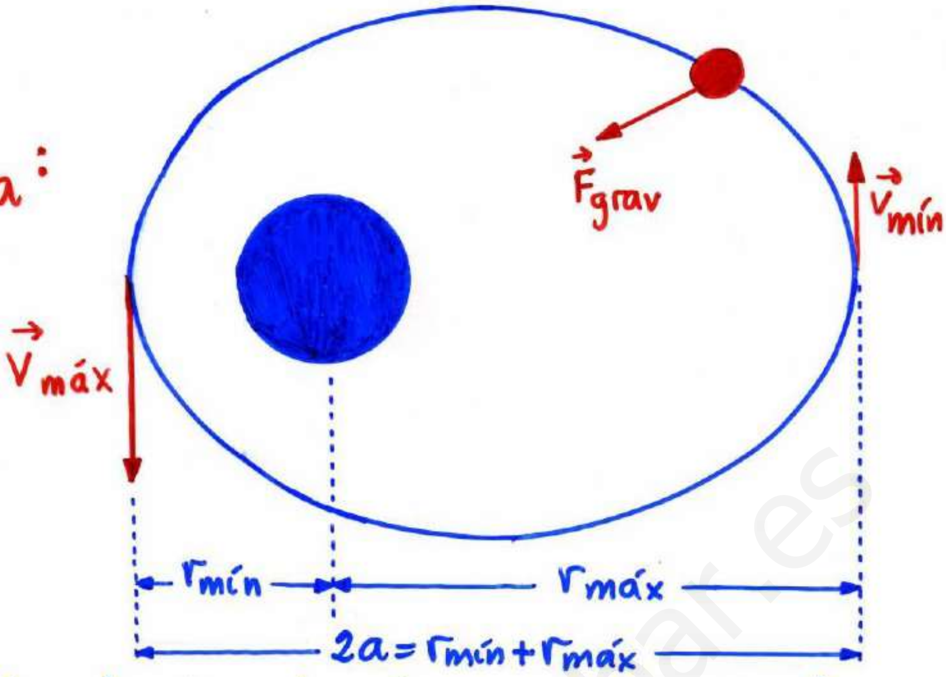


El planeta 1 describe un movimiento circular uniforme alrededor de la estrella al ser la fuerza gravitatoria ejercida por ésta una fuerza centrípeta; igualando las expresiones de ambas y recordando la relación entre la velocidad lineal del planeta y su período, despejamos la masa de la estrella:

$$F_{grav} = F_{cp} ; \; G\frac{m_e m_{p1}}{r^2} = m_{p1}\frac{v_{p1}^2}{r} = m_{p1}\frac{\left(\frac{2\pi r}{T_1}\right)^2}{r} = \frac{4\pi^2 m_{p1} r}{T_1^2}$$

$$\boxed{m_e = \frac{4\pi^2 r^3}{G T_1^2} = \frac{4\pi^2 (10^{11})^3}{(6,67\times 10^{-11})(2\times 365\times 24\times 60\times 60)^2} = 1,49\times 10^{29}\,kg : \text{RESULTADO}}$$

Planeta 2 órbita elíptica:



Al orbitar los dos planetas en torno a la misma estrella podemos considerar la tercera ley de Kepler, según la cual los cuadrados de los períodos de traslación de los diferentes planetas son proporcionales a los cubos de los semiejes mayores -radio para órbita circular- de sus respectivas órbitas: $T^2 = k a^3$.

Para el planeta 1: $T_1^2 = k R_1^3$ $\begin{cases} T_1 = 2 \text{ años} = 6{,}31 \times 10^7 \text{ s} \\ R_1 = 10^{11} \text{ m} \end{cases}$

Para el planeta 2: $T_2^2 = k a_2^3$

$$a_2 = \frac{r_{mín} + r_{máx}}{2} = \frac{10^{11} + (1{,}8 \times 10^{11})}{2} = 1{,}4 \times 10^{11} \text{ m}.$$

Comparando las dos expresiones anteriores y despejando:

$$\frac{T_2^2}{T_1^2} = \frac{a_2^3}{R_1^3}; \quad \boxed{T_2 = \sqrt{\frac{T_1^2 a_2^3}{R_1^3}} = \sqrt{\frac{(6{,}31 \times 10^7)^2 (1{,}4 \times 10^{11})^3}{(10^{11})^3}} = 1{,}04 \times 10^8 \text{ s}}$$

RESULTADO

La fuerza gravitatoria con que la estrella atrae a cada planeta es central y conservativa, por lo que tanto el momento angular como la energía mecánica de cada planeta se mantienen constantes. Aplicando estos dos principios de conservación al planeta 2, en sus posiciones de máxima proximidad y lejanía respecto a la estrella tenemos este sistema de dos ecuaciones:

$$\begin{cases} m_{p_2} v_{máx} r_{mín} = m_{p_2} v_{mín} r_{máx} \\ \frac{1}{2} m_{p_2} v_{máx}^2 - G \frac{m_e m_{p_2}}{r_{mín}} = \frac{1}{2} m_{p_2} v_{mín}^2 - G \frac{m_e m_{p_2}}{r_{máx}} \end{cases} ;$$

simplificando por m_{p_2} y sustituyendo, queda:

$$\begin{cases} v_{máx} \times 10^{11} = v_{mín} (1{,}8 \times 10^{11}) \\ \frac{1}{2} v_{máx}^2 - (6{,}67 \times 10^{-11}) \frac{1{,}49 \times 10^{29}}{10^{11}} = \frac{1}{2} v_{mín}^2 - (6{,}67 \times 10^{-11}) \frac{1{,}49 \times 10^{29}}{1{,}8 \times 10^{11}} \end{cases}$$

la solución a este sistema es:

$$\boxed{v_{máx} = 11.295{,}76 \ ms^{-1} \ : \text{RESULTADO}}$$

$$v_{mín} = 6.275{,}42 \ ms^{-1}$$

Un planeta orbita alrededor de una estrella de masa M. La masa del planeta es: $m = 10^{24}$ kg y su órbita es circular de radio: $r = 10^8$ km y período: T = 3 años terrestres. Determine:

a) La masa M de la estrella.
b) La energía mecánica del planeta.
c) El módulo del momento angular del planeta respecto al centro de la estrella.
d) La velocidad angular de un segundo planeta que describiese una órbita circular de radio igual a $2r$ alrededor de la estrella.

Datos: Constante de Gravitación Universal: $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ N·m²·kg⁻²
Considere un año terrestre = 365 días.

(Pruebas de acceso a la Universidad − Madrid, modelo 2011)

SOLUCIÓN:-

Si el planeta describe alrededor de la estrella un movimiento circular uniforme es porque la fuerza gravitatoria con que ésta lo atrae es una fuerza centrípeta. Igualando los módulos de ambas, y recordando también el módulo de la velocidad lineal del planeta, tenemos:

$$v = \frac{2\pi r}{T} \quad ; \quad \vec{F}_{grav} = \vec{F}_{cpta} \quad ; \quad G\frac{m_e m_p}{r^2} = m_p \frac{v^2}{r} \quad ;$$

despejando, la masa de la estrella queda:

$$M = m_e = \frac{v^2 r}{G} = \frac{\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2 r}{G} = \frac{4\pi^2 r^3}{G T^2} =$$

$$= \frac{4\pi^2 \cdot (10^{11})^3}{6{,}67\times10^{-11}(3\times365\times24\times60\times60)^2} = 6{,}61\times10^{28}\ \text{kg}$$

RESULTADO

Las energías cinética, potencial gravitatoria y mecánica del planeta valen, respectivamente:

• $E_c = \frac{1}{2} m_p v^2 = G \frac{m_p m_e}{2r}$; • $E_p = -G \frac{m_p m_e}{r}$

• Energía mecánica:

$$E_{tot} = E_c + E_p = -G \frac{m_p m_e}{2r} = -6,67 \times 10^{-11} \frac{10^{24} \times 6,61 \times 10^{28}}{2 \times 10^{11}}$$

$$\boxed{E_{tot} = -2,21 \times 10^{31}\ J \quad : \quad \text{RESULTADO}}$$

El momento angular del planeta respecto al centro de la estrella vale:

$$\vec{L} = \vec{r} \times m_p \vec{v} \quad ,$$

y al ser una órbita circular: $\vec{r} \perp \vec{v}$ y el módulo vale:

$$L = r m_p v = r m_p \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi m_p r^2}{T}$$

$$\boxed{L = \frac{2\pi \times 10^{24} (10^{11})^2}{3 \times 365 \times 24 \times 60 \times 60} = 6,64 \times 10^{38}\ kg\,m^2 s^{-1} \quad \text{RESULTADO}}$$

Aplicando ahora a los dos planetas que orbitan alrededor de la estrella una Ley análoga a la Tercera Ley de Kepler para el Sistema Solar, tenemos:

$$\frac{T^2(\text{planeta } 1)}{T^2(\text{planeta } 2)} = \frac{r^3(\text{planeta } 1)}{r^3(\text{planeta } 2)} = \frac{r^3}{(2r)^3} = \frac{1}{8} \; .$$

$$T(\text{planeta } 2) = \sqrt{8 \cdot T^2(\text{planeta } 1)} = \sqrt{8} \cdot T(\text{planeta } 1) \; .$$

Finalmente, la velocidad angular del segundo planeta en torno a la estrella vale:

$$\omega(\text{planeta } 2) = \frac{2\pi}{T(\text{planeta } 2)} = \frac{2\pi}{\sqrt{8} \cdot 3 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60} \; .$$

$$\boxed{\omega(\text{planeta } 2) = 2{,}35 \times 10^{-8}\ \text{rad} \cdot \text{s}^{-1} \; : \text{RESULTADO}}$$

FÍSICA DE 2º DE BACHILLERATO MECÁNICA E INTERACCIÓN GRAVITATORIA

Un satélite artificial de 200 kg gira en una órbita circular a una altura *h* sobre la superficie de la Tierra. Sabiendo que a esa altura el valor de la aceleración de la gravedad es la mitad del valor que tiene en la superficie terrestre, averiguar:

a) la velocidad del satélite, y

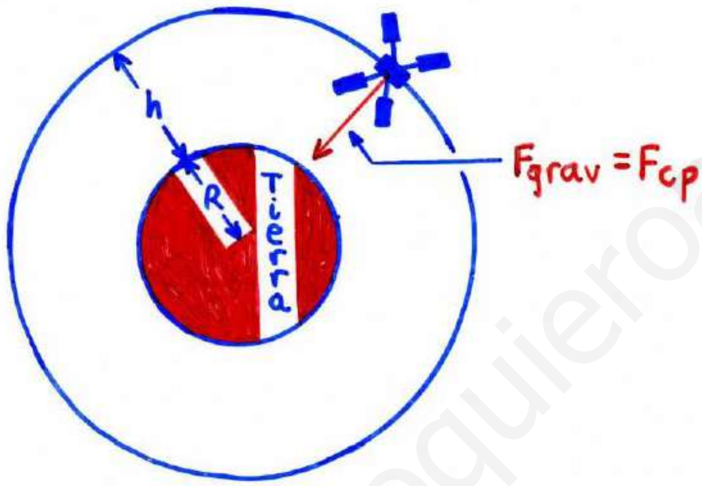
b) su energía mecánica.

Datos: Gravedad en la superficie terrestre: $g = 9{,}8\ ms^{-2}$

Radio medio de la Tierra: $R = 6{,}37 \times 10^6$ m.

(Pruebas de acceso a la Universidad − Madrid, septiembre 2000)

SOLUCIÓN:



Comparando las fuerzas -y las aceleraciones- de la gravedad en la superficie de la Tierra y a una altura h sobre ella, aplicando las leyes de gravitación universal y fundamental de la Dinámica, y recordando que la Tierra es gravitatoriamente equivalente a una partícula de masa la total del planeta y situada en su centro (teorema de Gauss), tenemos:

$$\frac{g_{sup}}{g_h} = \frac{\frac{F_{grav\,sup}}{m}}{\frac{F_{grav\,h}}{m}} = \frac{\frac{\frac{GM_Tm}{R^2}}{m}}{\frac{\frac{GM_Tm}{(R+h)^2}}{m}} = \left(\frac{R+h}{R}\right)^2 = 2 \quad ;$$

de donde obtenemos: $R+h = R\sqrt{2}$.

Aplicando la ley de gravitación universal en la superficie terrestre, sacamos:

$$F_{grav\ sup} = \frac{G m_T m}{R^2} = m g_{sup} \ ; \qquad G m_T = R^2 g_{sup} .$$

Igualando las expresiones de la fuerza gravitatoria y, a la vez, centrípeta sobre el satélite, despejamos la velocidad de éste:

$$F_{grav} = F_{cp} \ ; \qquad G\frac{m_T m_{sat}}{(R+h)^2} = m_{sat}\frac{v_{sat}^2}{R+h} \ ; \text{ de donde:}$$

$$\boxed{v_{sat} = \sqrt{\frac{G m_T}{R+h}} = \sqrt{\frac{R^2 g_{sup}}{R\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{6{,}37 \times 10^6 \times 9{,}80}{\sqrt{2}}} = 6.643{,}93 \ m s^{-1}}$$

RESULTADO

Las energías cinética, potencial y total del satélite son:

- Energía cinética:

$$E_c = \frac{1}{2} m_{sat} v_{sat}^2 = \frac{1}{2} m_{sat} \frac{G m_T}{R+h} = \frac{G m_T m_{sat}}{2(R+h)} \ ;$$

- Energía potencial gravitatoria:

$$E_p = -\frac{G m_T m_{sat}}{R+h} \ ;$$

- Energía mecánica total:

$$E_{tot} = E_c + E_p = \frac{G m_T m_{sat}}{2(R+h)} - \frac{G m_T m_{sat}}{R+h} = -\frac{G m_T m_{sat}}{2(R+h)} = -\frac{R^2 g_{sup} m_{sat}}{2R\sqrt{2}}$$

$$\boxed{E_{tot} = -\frac{6{,}37 \times 10^6 \times 9{,}80 \times 200}{2\sqrt{2}} = -4{,}41 \times 10^9 \ J \ : \text{RESULTADO}}$$

Un satélite de 2.000 kg de masa describe una órbita ecuatorial circular alrededor de la Tierra, de 8.000 km de radio. Determinar:

a) Su momento angular respecto al centro de la órbita.

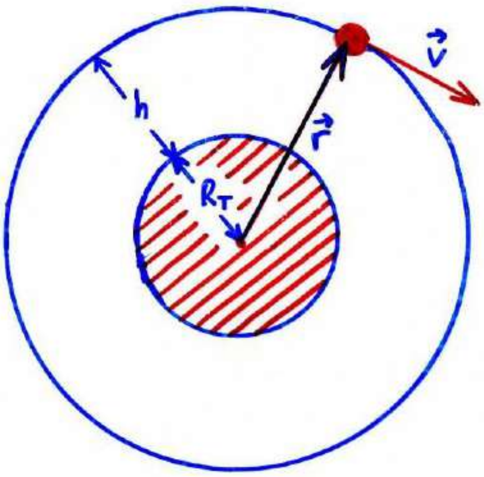
b) Sus energías cinética, potencial y total.

Datos: Constante de Gravitación: $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ Nm^2kg^{-2}$

Masa de la Tierra: $m_T = 5{,}98 \times 10^{24}$ kg.

(Pruebas de acceso a la Universidad − Madrid, junio 1996)

SOLUCIÓN:



Recordando que la Tierra se comporta como una partícula de masa la total: m_T, situada en el centro del planeta (teorema de Gauss), e igualando la fuerza gravitatoria a la fuerza centrípeta, necesaria para el movimiento circular uniforme del satélite, calculamos su velocidad lineal:

$$F_{grav} = F_{cp}\ ;\ G\frac{m_T m}{R^2} = m\frac{v^2}{R}\ ;\text{de donde:}$$

$$v = \sqrt{\frac{Gm_T}{R}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \times 10^{-11} \times 5{,}98 \times 10^{24}}{8 \times 10^6}} = 7.061{,}04\ ms^{-1}$$

Habida cuenta de la perpendicularidad entre $\vec{r}$ y $\vec{v}$, el módulo del momento angular del satélite respecto al centro de su órbita vale:

$$\boxed{L = rmv = 8 \times 10^6 \times 2 \times 10^3 \times 7.061{,}04 = 1{,}13 \times 10^{14}\ kgm^2s^{-1} : \text{RESULTADO}}$$

Recordando las expresiones de las energías cinética, potencial y total:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}2.000 \times 7.061{,}04^2 = 4{,}98 \times 10^{10}\ J$$

$$E_p = -G\frac{m_T m}{R} = -6{,}67 \times 10^{-11}\ \frac{5{,}98 \times 10^{24} \times 2.000}{8 \times 10^6} = -9{,}97 \times 10^{10}\ J \quad : \text{RESULTADOS}$$

$$E_{total} = E_c + E_p = (4{,}98 - 9{,}97) \times 10^{10} = -4{,}98 \times 10^{10}\ J$$

FÍSICA DE 2º DE BACHILLERATO MECÁNICA E INTERACCIÓN GRAVITATORIA

Un satélite artificial de la Tierra de 100 kg de masa describe una órbita circular a una altura de 655 km. Calcule:

a) el período de la órbita;
b) la energía mecánica del satélite;
c) el módulo del momento angular del satélite respecto al centro de la Tierra;
d) el cociente entre los valores de la intensidad del campo gravitatorio terrestre en el satélite y en la superficie de la Tierra.

Datos:

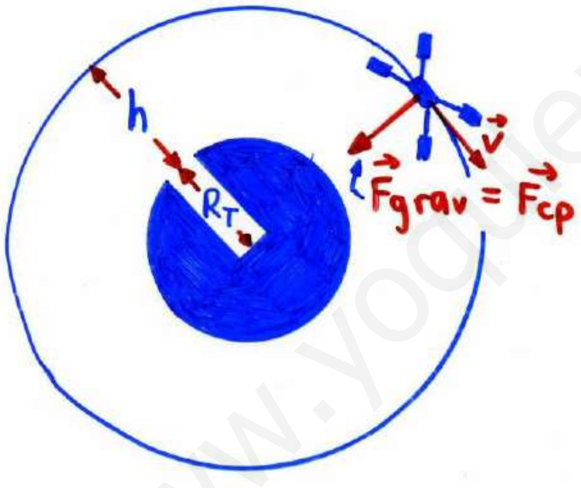
Masa de la Tierra: $m_T = 5{,}98 \times 10^{24}$ kg

Radio de la Tierra: $R = 6{,}37 \times 10^6$ m

Constante de Gravitación Universal: $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ Nm^2kg^{-2}$.

(Pruebas de acceso a la Universidad − Madrid, junio 2005)

SOLUCIÓN.-



El satélite describe un movimiento circular uniforme alrededor de la Tierra porque la fuerza gravitatoria con que ésta lo atrae es, a la vez, fuerza centrípeta. Igualando las expresiones de ambas, queda:

$$F_{grav} = F_{cp}\ ;\ G\frac{m_T m_S}{(h+R_T)^2} = m_S\frac{v^2}{h+R_T} = m_S\frac{\left[\frac{2\pi(h+R_T)}{T}\right]^2}{h+R_T} = \frac{m_S 4\pi^2(h+R_T)}{T^2}$$

Despejando el período: T obtenemos:

$$\boxed{T = \sqrt{\frac{4\pi^2(h+R_T)^3}{G\,m_T}} = \sqrt{\frac{4\pi^2(6{,}55\times10^5+6{,}37\times10^6)^3}{6{,}67\times10^{-11}\times5{,}98\times10^{24}}} = 5.857{,}82\ s}$$

RESULTADO

La **energía mecánica** del satélite vale:

$$E_{tot} = E_c + E_p = \frac{1}{2} m_s v^2 - G\frac{m_T m_s}{h+R_T} = G\frac{m_T m_s}{2(h+R_T)} - G\frac{m_T m_s}{h+R_T}$$

$$E_{tot} = -G\frac{m_T m_s}{2(h+R_T)} = -6{,}67\times10^{-11}\frac{5{,}98\times10^{24}\times10^2}{2(6{,}55\times10^5+6{,}37\times10^6)}$$

$$\boxed{E_{tot} = -2{,}84\times10^9 \text{ J} \quad : \text{RESULTADO}}$$

El **módulo del momento angular** del satélite respecto al centro de la Tierra -de la órbita- es:

$$L = |\vec{r}\times m_s\vec{v}| = r m_s v = (h+R_T) m_s \frac{2\pi(h+R_T)}{T} = \frac{2\pi m_s (h+R_T)^2}{T}$$

$$\boxed{L = \frac{2\pi\times10^2(6{,}55\times10^5+6{,}37\times10^6)^2}{5.857{,}82} = 5{,}29\times10^{12}\ \text{kgm}^2\text{s}^{-1}}$$

RESULTADO

Por último, recordando la expresión del módulo de la **intensidad del campo gravitatorio**, la proporción pedida es:

$$\frac{g_h}{g_{sup}} = \frac{G\frac{m_T}{(h+R_T)^2}}{G\frac{m_T}{R_T^2}} = \left(\frac{R_T}{h+R_T}\right)^2 = \left(\frac{6{,}37\times10^6}{6{,}55\times10^5+6{,}37\times10^6}\right)^2$$

$$\boxed{\frac{g_h}{g_{sup}} = 0{,}82 \quad : \text{RESULTADO}}$$

Desde la superficie terrestre se lanza un satélite de 400 kg de masa hasta situarlo en una órbita circular a una distancia del centro de la Tierra igual a las 7/6 partes del radio terrestre. Calcule:

a) la intensidad del campo gravitatorio terrestre en los puntos de la órbita del satélite;
b) la velocidad y el período que tendrá el satélite en la órbita;
c) la energía mecánica del satélite en la órbita;
d) la variación de la energía potencial que ha experimentado el satélite al elevarlo desde la superficie de la Tierra hasta situarlo en su órbita.

Datos:

Constante de Gravitación Universal:	$G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ Nm^2kg^{-2}$
Masa de la Tierra:	$m_T = 5{,}98 \times 10^{24}$ kg
Radio de la Tierra:	$R_T = 6{,}37 \times 10^{6}$ m.

(Pruebas de acceso a la Universidad − Madrid, septiembre 2005)

SOLUCIÓN.-

De acuerdo al teorema de Gauss, consideramos la Tierra como gravitatoriamente equivalente a una masa puntual situada en su centro que vale toda la masa del planeta.

El módulo de la intensidad del campo gravitatorio terrestre -que es atractivo- a $\frac{7}{6}R_T$ del centro de la Tierra vale:

$$g\left(r=\frac{7}{6}R_T\right) = G\frac{m_T}{r^2} = G\frac{m_T}{\left(\frac{7}{6}R_T\right)^2} = 6{,}67\times10^{-11}\frac{5{,}98\times10^{24}}{\left(\frac{7}{6}6{,}37\times10^{6}\right)^2}$$

$$\boxed{g\left(r=\frac{7}{6}R_T\right) = 7{,}22\ Nkg^{-1}\text{: RESULTADO}}$$

El satélite describe su órbita porque la fuerza gravitatoria con que la Tierra lo atrae es una fuerza centrípeta. Igualando los módulos de ambas, tenemos:

$$F_{grav} = F_{cp} \ ; \quad G\frac{m_T m_S}{r^2} = m_S\frac{v_S^2}{r} \qquad \left(r = \frac{7}{6}R_T\right) \ ;$$

despejando, la velocidad -módulo- orbital del satélite queda:

$$v_S = \sqrt{G\frac{m_T}{r}} = \sqrt{G\frac{m_T}{\frac{7}{6}R_T}} = \sqrt{6{,}67\times10^{-11}\,\frac{5{,}98\times10^{24}}{\frac{7}{6}6{,}37\times10^{6}}}$$

$$\boxed{v_S = 7{,}33\times10^{3}\ ms^{-1} \quad : \text{RESULTADO}}$$

Recordando la expresión del período (tiempo empleado en completar una órbita) en el movimiento circular uniforme, encontramos:

$$v_S = \frac{2\pi r}{T_S} \ ; \quad T_S = \frac{2\pi r}{v_S} = \frac{2\pi\frac{7}{6}R_T}{v_S} = \frac{2\pi\frac{7}{6}6{,}37\times10^{6}}{7{,}33\times10^{3}}$$

$$\boxed{T_S = 6{,}37\times10^{3}\ s \qquad : \text{RESULTADO}}$$

La energía potencial gravitatoria del satélite es:

$$E_p = -G\frac{m_T m_S}{r} = -m_S v_S^2$$ (según la igualdad indicada al comienzo de esta hoja).

La energía mecánica del satélite en su órbita vale, entonces:

$$E_{tot} = E_c + E_p = \frac{1}{2} m_s v_s^2 - m_s v_s^2 = -\frac{1}{2} m_s v_s^2$$

$$\boxed{E_{tot} = -\frac{1}{2} 400 (7{,}33 \times 10^3)^2 = -1{,}07 \times 10^{10}\ \mathrm{J} : \text{RESULTADO}}$$

Las energías potenciales gravitatorias del satélite en la superficie terrestre y en su órbita valen, respectivamente:

$$E_{p,sup} = -G \frac{m_T m_s}{R_T} \quad ; \quad E_{p,órbita} = -G \frac{m_T m_s}{\frac{7}{6} R_T} \quad .$$

Entonces, la variación -incremento- de la energía potencial del satélite ha sido:

$$\Delta E_p = E_{p,órbita} - E_{p,sup} = -G \frac{m_T m_s}{\frac{7}{6} R_T} - \left(-G \frac{m_T m_s}{R_T} \right)$$

$$\Delta E_p = G \frac{m_T m_s}{7 R_T} = 6{,}67 \times 10^{-11} \frac{5{,}98 \times 10^{24} \times 400}{7 \times 6{,}37 \times 10^6}$$

$$\boxed{\Delta E_p = 3{,}58 \times 10^9\ \mathrm{J} : \text{RESULTADO}}$$

FÍSICA de 2º de BACHILLERATO **MECÁNICA E INTERACCIÓN GRAVITATORIA**

Un satélite de 1.000 kg de masa describe una órbita circular de 12×10^3 km de radio alrededor de la Tierra. Calcule:

a) El módulo del momento lineal y el módulo del momento angular del satélite respecto al centro de la Tierra. ¿Cambian las direcciones de estos vectores al cambiar la posición del satélite en su órbita?.

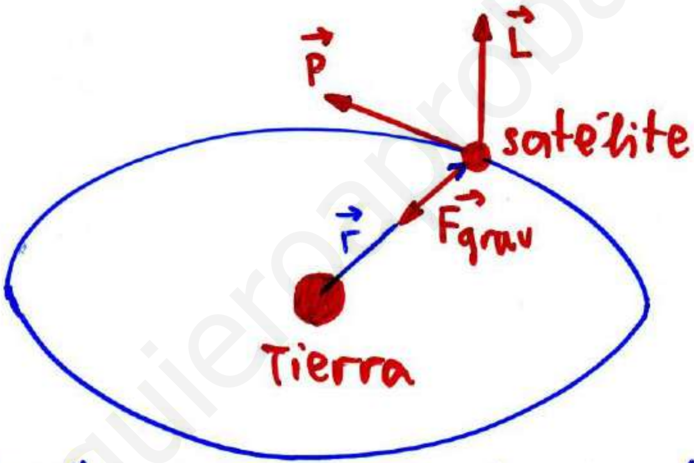
b) El período y la energía mecánica del satélite en la órbita.

Datos: Masa de la Tierra: $m_T = 5{,}98 \times 10^{24}$ kg

Constante de Gravitación Universal: $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$.

(Pruebas de acceso a la Universidad − Madrid, junio 2010 -Fase Específica-)

SOLUCIÓN.-



El satélite describe un movimiento circular uniforme alrededor de la Tierra porque la fuerza gravitatoria con que ésta lo atrae es una fuerza centrípeta. Igualando las expresiones de los módulos de ambas podemos despejar el módulo de la velocidad lineal del satélite y, con él, hallar los módulos de los momentos angular y lineal del satélite respecto al centro de la Tierra:

$F_{grav} = F_{cpta}$; $G\dfrac{m_T m_S}{r^2} = m_S \dfrac{v_S^2}{r}$; despejando v_S :

$$v_S = \sqrt{\frac{G m_T}{r}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \times 10^{-11} \times 5{,}98 \times 10^{24}}{1{,}2 \times 10^7}} = 5{,}77 \times 10^3\ ms^{-1}$$

El vector momento lineal del satélite es, al igual que el vector velocidad lineal, tangente a la trayectoria, por lo que su dirección cambia constantemente a lo largo de la órbita. Su módulo vale:

$$p = m_s v_s = 10^3 \times 5{,}77 \times 10^3 = 5{,}77 \times 10^6 \text{ kgms}^{-1} .$$

La fuerza gravitatoria es central y, por tanto, el vector momento angular del satélite respecto al centro de su órbita es constante, por lo que su dirección no varía: es perpendicular al plano de la órbita. Su módulo vale:

$$L = r m_s v_s = 1{,}2 \times 10^7 \times 10^3 \times 5{,}77 \times 10^3 = 6{,}92 \times 10^{13} \text{ kgm}^2\text{s}^{-1}$$

RESULTADO

El período orbital del satélite vale:

$$T_s = \frac{2\pi r}{v_s} = \frac{2\pi \times 1{,}2 \times 10^7}{5{,}77 \times 10^3} = 1{,}31 \times 10^4 \text{ s}$$: RESULTADO

Por último, con las expresiones de las energías cinética y potencial gravitatoria calculamos la energía mecánica del satélite -que es constante-:

$$E_{tot} = E_c + E_p = \frac{1}{2} m_s v_s^2 - G\frac{m_T m_s}{r} = G\frac{m_T m_s}{2r} - G\frac{m_T m_s}{r} =$$

$$= -G\frac{m_T m_s}{2r} = -6{,}67 \times 10^{-11} \frac{5{,}98 \times 10^{24} \times 10^3}{2 \times 1{,}2 \times 10^7} = -1{,}66 \times 10^{10} \text{ J}$$

RESULTADO

Un satélite artificial de 100 kg de masa se encuentra girando alrededor de la Tierra en una órbita circular de 7.100 km de radio. Determine:

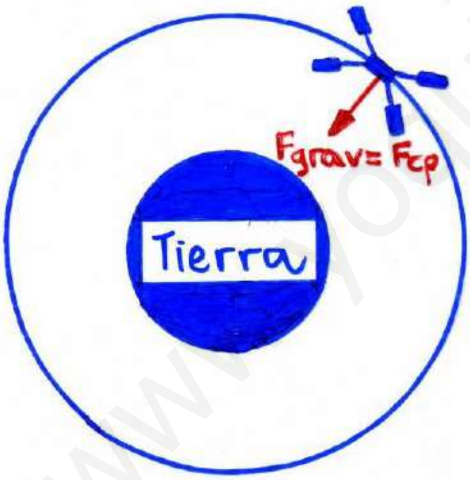
a) el período de revolución del satélite;
b el momento lineal y el momento angular del satélite respecto al centro de la Tierra;
c) la variación de energía potencial que ha experimentado el satélite al elevarlo desde la superficie de la Tierra hasta esa posición;
d) las energías cinética y total del satélite.

Datos:

Masa de la Tierra:	$m_T = 5{,}98 \times 10^{24}$ kg
Radio de la Tierra:	$R_T = 6{,}37 \times 10^{6}$ m
Constante de gravitación universal:	$G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ Nm^{2}kg^{-2}.

(Pruebas de acceso a la Universidad − Madrid, septiembre 2003)

SOLUCIÓN.-



Al ser la fuerza con que la Tierra atrae gravitatoriamente al satélite una fuerza centrípeta dicho satélite describe un movimiento circular uniforme en torno al planeta.

Igualando las expresiones de ambas fuerzas, tenemos:

$$F_{grav} = F_{cp} \; ; \quad G\frac{m_T m}{r^2} = m\frac{v^2}{r} \quad ; \text{ despejando } v:$$

$$v = \sqrt{G\frac{m_T}{r}} = \sqrt{6{,}67\times10^{-11}\,\frac{5{,}98\times10^{24}}{7{,}10\times10^{6}}} = 7{,}50\times10^{3}\ \mathrm{ms^{-1}}.$$

Recordando la relación existente entre la velocidad y el período en el movimiento circular uniforme podemos averiguar el período orbital del satélite:

$v = \frac{2\pi r}{T}$; $\boxed{T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi \times 7{,}10\times10^6}{7{,}50\times10^3} = 5{,}95\times10^3\,s}$

RESULTADO

Conociendo ya la velocidad lineal del satélite calculamos los módulos de los momentos lineal y angular del mismo respecto al centro de la Tierra:

Momento lineal: $p = mv = 10^2 \times 7{,}50\times10^3 = 7{,}50\times10^5\,kgms^{-1}$

Momento angular: $L = rp = 7{,}10\times10^6 \times 7{,}50\times10^5\,kgm^2s^{-1}$

$L = 5{,}32\times10^{12}\,kgm^2s^{-1}$

RESULTADOS

En la superficie terrestre -recordando que, según el teorema de Gauss, el planeta equivale gravitatoriamente a una partícula de masa m_T situada en su centro- la energía potencial gravitatoria del satélite vale:

$$E_{P,sup} = -G\frac{m_T m}{R_T} = -6{,}67\times10^{-11}\frac{5{,}98\times10^{24}\times100}{6{,}37\times10^6} = -6{,}26\times10^9\,J$$

y, análogamente, en su órbita:

$$E_p(r) = -G\frac{m_T m}{r} = -6{,}67\times10^{-11}\frac{5{,}98\times10^{24}\times100}{7{,}10\times10^{6}} = -5{,}62\times10^{9}\ \mathrm{J}\ ;$$

por ello, la variación de energía potencial del satélite al elevarlo ha sido:

$$\boxed{\Delta E_p = E_p(r) - E_{p,sup} = (-5{,}62\times10^{9}) - (-6{,}26\times10^{9}) = 6{,}44\times10^{8}\ \mathrm{J}}$$

RESULTADO

Finalmente, las energías cinética y mecánica -total- del satélite en su órbita valen, respectivamente:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}100(7{,}50\times10^{3})^2 = 2{,}81\times10^{9}\ \mathrm{J}$$

$$E_{tot} = E_c + E_p(r) = (2{,}81\times10^{9}) + (-5{,}62\times10^{9}) = -2{,}81\times10^{9}\ \mathrm{J}$$

RESULTADOS

Un satélite artificial describe una órbita circular alrededor de la Tierra. En esta órbita la energía mecánica del satélite es $-4,5 \times 10^9$ J y su velocidad es 7.610 ms^{-1}. Calcule:

a) el módulo del momento lineal del satélite y el módulo del momento angular del satélite respecto al centro de la Tierra;

b) el período de la órbita y la altura a la que se encuentra el satélite.

Datos:

Constante de gravitación universal: $G = 6,67 \times 10^{-11}$ Nm^2kg^{-2}

Masa de la Tierra: $m_T = 5,98 \times 10^{24}$ kg

Radio de la Tierra: $R_T = 6,37 \times 10^6$ m.

(Pruebas de acceso a la Universidad − Madrid, junio 2006)

SOLUCIÓN.-

El satélite describe un movimiento circular uniforme alrededor de la Tierra porque la fuerza con que ésta lo atrae gravitatoriamente es una fuerza centrípeta. Igualando las expresiones de sus módulos encontramos:

$$F_{grav} = F_{cp} \; ; \quad G\frac{m_T m}{r^2} = m\frac{v^2}{r} \; ;$$

las energías cinética, potencial gravitatoria y mecánica valen, respectivamente:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = G\frac{m_T m}{2r} \; ; \quad E_p = -G\frac{m_T m}{r} = -2E_c$$

$$E_{tot} = E_c + E_p = -E_c = -\frac{1}{2}mv^2 = -G\frac{m_T m}{2r} \; .$$

La masa del satélite vale:

$$m = -2\frac{E_{tot}}{v^2} = -2\frac{-4,5\times10^9}{7610^2} = 155,41 \text{ kg} \, .$$

De la primera expresión despejamos el radio de la órbita que describe el satélite:

$$r = \frac{Gm_T m}{mv^2} = \frac{6{,}67 \times 10^{-11} \times 5{,}98 \times 10^{24}}{7.610^2} = 6{,}89 \times 10^6 \text{ m}.$$

El módulo del momento lineal del satélite vale:

$$\boxed{p = mv = 155{,}41 \times 7.610 = 1{,}18 \times 10^6 \text{ kgms}^{-1} : \text{RESULTADO}}$$

El módulo del momento angular del satélite respecto al centro de la Tierra vale:

$$\boxed{L = rp = 6{,}89 \times 10^6 \times 1{,}18 \times 10^6 = 8{,}15 \times 10^{12} \text{ kgm}^2\text{s}^{-1} : \text{RESULTADO}}$$

Recordando que la velocidad lineal del satélite vale numéricamente:

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

encontramos el periodo orbital del mismo:

$$\boxed{T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi \times 6{,}89 \times 10^6}{7.610} = 5{,}69 \times 10^3 \text{ s} : \text{RESULTADO}}$$

Por último, dado que el radio de la órbita descrita es:

$$r = h + R_T$$

la altura a la que se encuentra el satélite es:

$$\boxed{h = r - R_T = 6{,}89 \times 10^6 - 6{,}37 \times 10^6 = 5{,}17 \times 10^5 \text{ m} : \text{RESULTADO}}$$

La velocidad angular con la que un satélite describe una órbita circular en torno al planeta Venus es: $\omega_1 = 1{,}45 \times 10^{-4}$ rad/s y su momento angular respecto al centro de la órbita es: $L_1 = 2{,}2 \times 10^{12}$ kgm^{2}s^{-1}.

a) Determine el radio r_1 de la órbita del satélite y su masa.

b) ¿Qué energía será preciso invertir para cambiar a otra órbita circular con velocidad angular: $\omega_2 = 10^{-4}$ rad/s?.

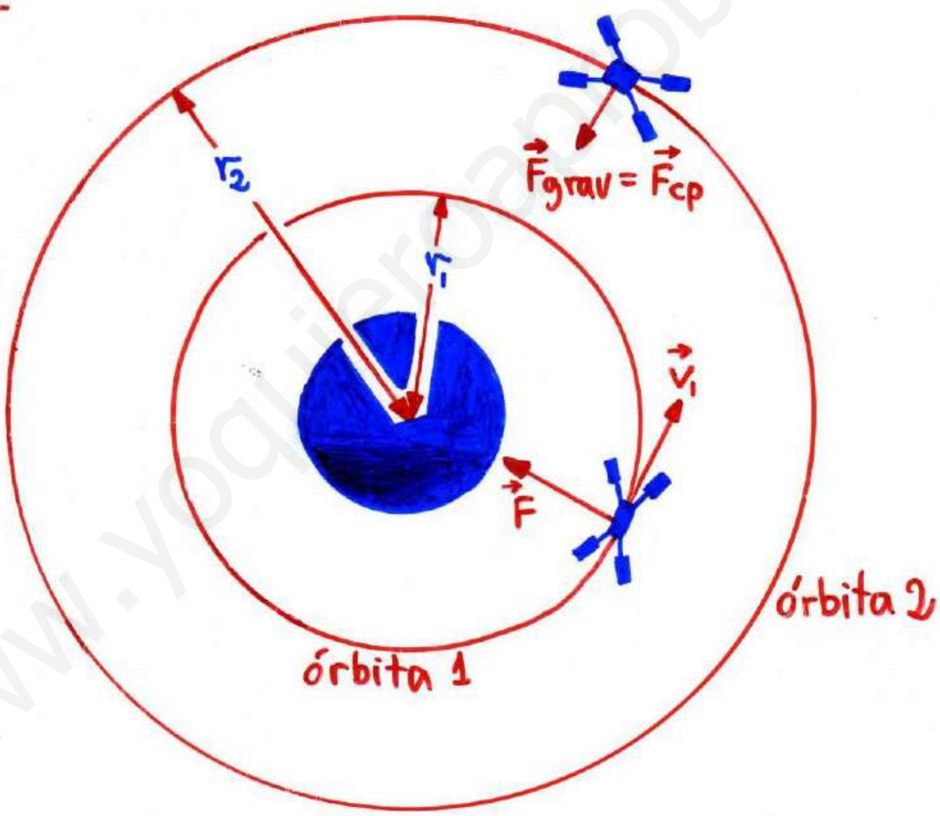
Datos:

Constante de Gravitación Universal: $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ Nm^{2}kg^{-2}

Masa de Venus: $m_V = 4{,}87 \times 10^{24}$ kg

(Pruebas de acceso a la Universidad − Madrid, junio 2002)

SOLUCIÓN:



El satélite describe en torno al planeta un movimiento circular uniforme dado que la fuerza gravitatoria con que Venus lo atrae es una fuerza centrípeta. Igualando las expresiones de ambas encontramos los radios r_1 y r_2:

$F_{grav} = F_{cp}$; $G\dfrac{m_v m_{sat}}{r^2} = m_{sat}\omega^2 r$; despejando r:

$$r = \sqrt[3]{\frac{G m_v}{\omega^2}}$$; y entonces:

$$r_1 = \sqrt[3]{\frac{G m_v}{\omega_1^2}} = \sqrt[3]{\frac{6{,}67\times10^{-11}\times4{,}87\times10^{24}}{(1{,}45\times10^{-4})^2}} = 2{,}49\times10^7\ m$$

RESULTADO

$$r_2 = \sqrt[3]{\frac{G m_v}{\omega_2^2}} = \sqrt[3]{\frac{6{,}67\times10^{-11}\times4{,}87\times10^{24}}{(10^{-4})^2}} = 3{,}19\times10^7\ m$$

En la órbita 1 el módulo del momento angular del satélite, habida cuenta que $\vec{r}_1$ y $\vec{v}_1$ son perpendiculares, vale:

$L_1 = m_{sat} v_1 r_1 = m_{sat}\omega_1 r_1^2$; de donde despejamos:

$$m_{sat} = \frac{L_1}{\omega_1 r_1^2} = \frac{2{,}2\times10^{12}}{(1{,}45\times10^{-4})\times(2{,}49\times10^7)^2} = 24{,}46\ kg$$

RESULTADO

Con las expresiones de las energías cinética y potencial gravitatoria calculamos la energía total del satélite en las dos órbitas dadas:

$$E_{tot} = E_c + E_p = \frac{1}{2}m_{sat}v^2 - G\frac{m_v m_{sat}}{r} = \frac{1}{2}m_{sat}\omega^2 r^2 - G\frac{m_v m_{sat}}{r}$$

En la órbita 1:

$$E_{tot_1} = \frac{1}{2} 24{,}46 (1{,}45 \times 10^{-4})^2 (2{,}49 \times 10^7)^2 - (6{,}67 \times 10^{-11}) \frac{(4{,}87 \times 10^{24}) \times 24{,}46}{2{,}49 \times 10^7}$$

$$E_{tot_1} = -1{,}59 \times 10^8 \text{ J}$$

En la órbita 2:

$$E_{tot_2} = \frac{1}{2} 24{,}46 (10^{-4})^2 (3{,}19 \times 10^7)^2 - (6{,}67 \times 10^{-11}) \frac{(4{,}87 \times 10^{24}) \times 24{,}46}{3{,}19 \times 10^7}$$

$$E_{tot_2} = -1{,}25 \times 10^8 \text{ J}$$

Deducimos, entonces, que para colocar el satélite en la órbita 2, a partir de la órbita 1, es preciso comunicarle una energía:

$$\boxed{\Delta E = E_{tot_2} - E_{tot_1} = (-1{,}25 \times 10^8) - (-1{,}59 \times 10^8) = 3{,}40 \times 10^7 \text{ J}}$$

RESULTADO

FÍSICA de 2º de BACHILLERATO **MECÁNICA E INTERACCIÓN GRAVITATORIA**

Desde un punto de la superficie terrestre se lanza verticalmente hacia arriba un objeto de 100 kg que llega hasta una altura de 300 km. Determine:

a) la velocidad del lanzamiento;
b) la energía potencial del objeto a esa altura.

Si estando situado a la altura de 300 km queremos convertir el objeto en satélite de forma que se ponga en órbita circular alrededor de la Tierra,

c) ¿qué energía adicional habrá que comunicarle?;
d) ¿cuál será la velocidad y el período del satélite en esa órbita?.

Datos: Constante de Gravitación: $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ N\cdot m^2\cdot kg^{-2}$
Masa de la Tierra: $m_T = 5{,}98 \times 10^{24}$ kg
Radio de la Tierra: $R_T = 6.370$ km.

(Pruebas de acceso a la Universidad − Madrid, modelo 2010)

SOLUCIÓN.-

Si, de acuerdo al Teorema de Gauss del campo gravitatorio, consideramos que la Tierra es equivalente a una partícula cuya masa es la de todo el planeta y que está situada en su centro (hemos de tomar distancias respecto a ese punto central), la energía potencial gravitatoria del objeto a 300 km sobre la superficie terrestre es:

$$\boxed{E_p = -G\frac{m_T m}{r} = -\frac{6{,}67\times 10^{-11}\times 5{,}98\times 10^{24}\times 100}{(6.370+300)\times 10^3} = -5{,}98\times 10^9\ J}$$

RESULTADO

Dado que el campo gravitatorio es conservativo, si aplicamos el Principio de conservación de la energía mecánica entre el punto inicial (superficie terrestre) y ese punto final (a 300 km sobre dicha superficie, y en el que la velocidad del objeto es nula), tenemos:

$E_{tot}(sup) = E_{tot}(h)$; $E_c(sup) + E_p(sup) = E_c(h) + E_p(h)$

$\frac{1}{2} m v_i^2 - G\frac{m_T m}{R_T} = 0 - G\frac{m_T m}{R_T + h}$; despejando v_i :

$$\boxed{\begin{aligned} v_i &= \sqrt{2 G m_T \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_T+h}\right)} = \\ &= \sqrt{2 \times 6{,}67 \times 10^{-11} \times 5{,}98 \times 10^{24}\left(\frac{1}{6{,}37 \times 10^6} - \frac{1}{6{,}67 \times 10^6}\right)} = \\ &= 2{,}37 \times 10^3 \ m \cdot s^{-1} \quad : \quad \text{RESULTADO} \end{aligned}}$$

El objeto a 300 km sobre la superficie terrestre ya posee la energía potencial gravitatoria calculada antes. Si queremos convertirlo en un satélite que de vueltas alrededor de la Tierra deberemos comunicarle, además, la energía adicional para que adquiera la energía cinética adecuada. El satélite estará sometido a la fuerza de atracción gravitatoria terrestre, que será, también, una fuerza centrípeta. Con las expresiones numéricas de estas dos fuerzas y de la energía cinética, tenemos:

$F_{grav} = F_{cpta}$; $G\frac{m_T m}{(R_T+h)^2} = m\frac{v^2}{R_T+h}$; de donde:

$$\Delta E = E_c(h) = \frac{1}{2} m v^2 = G\frac{m_T m}{2(R_T+h)} = \frac{|E_p(R_T+h)|}{2} = \frac{5{,}98 \times 10^9}{2} \ J$$

$$\boxed{\Delta E = 2{,}99 \times 10^9 \ J \quad : \quad \text{RESULTADO}}$$

El valor numérico de la velocidad lineal del satélite lo obtenemos de su energía cinética en su órbita:

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2$$

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{2E_c}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 2{,}99 \times 10^9}{10^2}} = 7{,}73 \times 10^3\ m \cdot s^{-1} : \text{RESULTADO}}$$

Por último, de dicho valor numérico de la velocidad lineal del satélite despejamos su período orbital:

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi (R_T + h)}{T}$$

$$\boxed{T = \frac{2\pi (R_T + h)}{v} = \frac{2\pi \times 6{,}67 \times 10^6}{7{,}73 \times 10^3} = 5{,}42 \times 10^3\ s : \text{RESULTADO}}$$

FÍSICA DE 2º DE BACHILLERATO — MECÁNICA E INTERACCIÓN GRAVITATORIA

Se coloca un satélite meteorológico de 1.000 kg en órbita circular, a 300 km sobre la superficie terrestre. Determine:

a) La velocidad lineal, la aceleración radial y el período en la órbita.

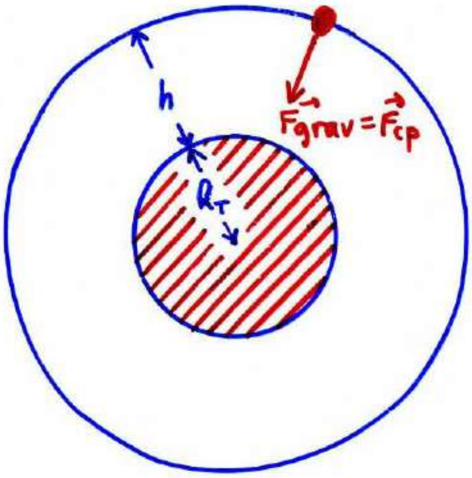
b) El trabajo que se requiere para poner en órbita el satélite.

Datos: Gravedad en la superficie terrestre: $g = 9{,}8\ ms^{-2}$

Radio medio terrestre: $R_T = 6.370$ km.

(*Pruebas de acceso a la Universidad − Madrid, junio 1999*)

SOLUCIÓN:



Recordando que la Tierra se comporta como una partícula de masa la total: m_T, situada en el centro del planeta (teorema de Gauss), e igualando la fuerza gravitatoria a la fuerza centrípeta, necesaria para el movimiento circular uniforme del satélite, tenemos:

$$F_{grav} = F_{cp}\ ;\quad G\frac{m_T m}{(h+R_T)^2} = m a_n\ ;\ \text{de donde:}$$

$$a_n = G\frac{m_T}{(h+R_T)^2} = \frac{G m_T}{R_T^2}\cdot\frac{R_T^2}{(h+R_T)^2} = g_{(sup)}\cdot\frac{R_T^2}{(h+R_T)^2}$$

Sustituyendo:

$$\boxed{a_n = 9{,}8\cdot\left(\frac{6{,}37\times 10^6}{6{,}67\times 10^6}\right)^2 = 8{,}94\, ms^{-2} : \text{RESULTADO}}$$

Con la expresión de la aceleración centrípeta calculamos la velocidad lineal:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{v^2}{h+R_T}\ ;\quad \boxed{v = \sqrt{a_n(h+R_T)} = \sqrt{8{,}94\times(3\times 10^5 + 6{,}37\times 10^6)} = 7.721{,}28\, ms^{-1}}$$

RESULTADO

Considerando una vuelta completa, el período vale:

$$v = \frac{2\pi R}{T}\ ;\quad \boxed{T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi(h+R_T)}{v} = \frac{2\pi(3\times 10^5 + 6{,}37\times 10^6)}{7.721{,}28} = 5.427{,}70\, s}$$

RESULTADO

Las energías del satélite meteorológico son:

- Energía potencial gravitatoria inicial:

$$E_{p_i} = E_{p(sup)} = -G\frac{m_T \cdot m}{R_T} = -\left(G\frac{m_T}{R_T^2}\right) m \cdot R_T =$$

$$= -g_{sup} \cdot m \cdot R_T = -9{,}8 \cdot 10^3 \cdot 6{,}37\times10^6 = -6{,}24\times10^{10}\ \text{J}.$$

- Energía cinética final (en la órbita):

$$E_{c_f} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} 10^3 \cdot 7721{,}28^2 = 2{,}98\times10^{10}\ \text{J}.$$

- Energía potencial gravitatoria final:

$$E_{p_f} = -G\frac{m_T \cdot m}{h+R_T} = -\left(G\frac{m_T}{R_T^2}\right)\frac{m R_T^2}{h+R_T} = -g_{sup}\frac{m \cdot R_T^2}{h+R_T} =$$

$$= -9{,}8\,\frac{10^3 \cdot (6{,}37\times10^6)^2}{(3\times10^5)+(6{,}37\times10^6)} = -5{,}96\times10^{10}\ \text{J} = -2\,E_{c_f}$$

- Energía mecánica final (en la órbita):

$$E_{tot_f} = E_{c_f} + E_{p_f} = 2{,}98\times10^{10} - 5{,}96\times10^{10} =$$

$$= -2{,}98\times10^{10}\ \text{J} = -E_{c_f} = \frac{E_{p_f}}{2}$$

Por consiguiente, para poner en órbita, desde la superficie terrestre, el satélite a 300 km de altura hay que realizar un trabajo:

$$W = \Delta E = E_{tot_f} - E_{tot_i} = -2{,}98\times10^{10} - (-6{,}24\times10^{10})\ \text{J}$$

$$\boxed{W = \Delta E = 3{,}26\times10^{10}\ \text{J} \quad : \quad \text{RESULTADO}}$$

Esta cantidad es la energía que hay que comunicar inicialmente al satélite para llevarlo a su órbita.

Un satélite artificial de 100 kg se mueve en una órbita circular alrededor de la Tierra con una velocidad de 7,5 km/s. Calcule:

a) El radio de la órbita.
b) La energía potencial del satélite.
c) La energía mecánica del satélite.
d) La energía que habría que suministrar al satélite para que describa una órbita circular con radio doble que el de la órbita anterior.

Datos: Constante de Gravitación Universal: $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ Nm^{2}kg^{-2}
Masa de la Tierra: $m_T = 5{,}98 \times 10^{24}$ kg
Radio de la Tierra: $R_T = 6{,}37 \times 10^6$ m.

(Pruebas de acceso a la Universidad – Madrid, septiembre 2008 y septiembre 2010 -Fase General-)

SOLUCIÓN.-

Si el satélite artificial describe un movimiento circular uniforme alrededor de la Tierra es porque la fuerza gravitatoria con que ésta lo atrae es una fuerza centrípeta. Recordando las expresiones de los módulos de ambas y también el de la velocidad lineal del satélite, tenemos:

$$F_{grav} = F_{cpta} \; ; \quad G\frac{m_T m_{sat}}{r^2} = m_{sat}\frac{v_{sat}^2}{r} \; ; \text{ de donde:}$$

$$\boxed{r = \frac{G m_T}{v_{sat}^2} = \frac{6{,}67 \times 10^{-11} \times 5{,}98 \times 10^{24}}{(7{,}5 \times 10^3)^2} = 7{,}09 \times 10^6 \text{ m} : \text{RESULTADO}}$$

La energía potencial gravitatoria del satélite vale:

$$\boxed{E_p = -G\frac{m_T m_{sat}}{r} = -\frac{6{,}67 \times 10^{-11} \times 5{,}98 \times 10^{24} \times 10^2}{7{,}09 \times 10^6} = -5{,}63 \times 10^9 \text{ J}}$$

RESULTADO

La energía mecánica -total- del satélite en esa órbita es la suma de sus energías cinética y potencial gravitatoria:

$$E_c = \frac{1}{2} m_{sat} v^2 = \frac{r}{2} \cdot \frac{m_{sat} v^2}{r} = \frac{r}{2} G \frac{m_{sat} m_T}{r^2} = G \frac{m_T m_{sat}}{2r}$$

$$E_{tot} = E_c + E_p = G \frac{m_T m_{sat}}{2r} - G \frac{m_T m_{sat}}{r} = -G \frac{m_T m_{sat}}{2r}$$

Si $r = 7{,}09 \times 10^6$ m, tenemos:

$$\boxed{E_{tot} = -\frac{6{,}67 \times 10^{-11} \times 5{,}98 \times 10^{24} \times 10^2}{2 \times 7{,}09 \times 10^6} = -2{,}81 \times 10^9 \text{ J} \quad \text{RESULTADO}}$$

Si $r' = 2 \times 7{,}09 \times 10^6 \text{ m} = 1{,}42 \times 10^7$ m, queda:

$$E_{tot}' = -\frac{6{,}67 \times 10^{-11} \times 5{,}98 \times 10^{24} \times 10^2}{2 \times 1{,}42 \times 10^7} = -1{,}41 \times 10^9 \text{ J}.$$

Por consiguiente, para que el satélite, inicialmente en la órbita más baja, pase a girar en torno a la Tierra en otra órbita de doble radio que la primera habría que suministrarle una energía extra:

$$\boxed{\begin{gathered}\Delta E = E_{tot}(r' = 2r) - E_{tot}(r) = (-1{,}41 \times 10^9) - (-2{,}81 \times 10^9) = \\ = 1{,}41 \times 10^9 \text{ J} \quad \text{RESULTADO}\end{gathered}}$$

FÍSICA de 2º de BACHILLERATO **MECÁNICA E INTERACCIÓN GRAVITATORIA**

Una sonda espacial de masa m = 1.000 kg se encuentra situada en una órbita circular alrededor de la Tierra de radio: $r = 2{,}26 \times R_T$, siendo R_T el radio de la Tierra.

a) Calcule la velocidad de la sonda en esa órbita.
b) ¿Cuánto vale su energía potencial?.
c) ¿Cuánto vale su energía mecánica?.
d) ¿Qué energía hay que comunicar a la sonda para alejarla desde dicha órbita hasta el infinito?.

Datos: Masa de la Tierra: $m_T = 5{,}98 \times 10^{24}$ kg
Radio de la Tierra: $R_T = 6{,}37 \times 10^{6}$ m
Constante de Gravitación Universal: $G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ $N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$

(Pruebas de acceso a la Universidad − Madrid, septiembre 2011)

SOLUCIÓN.-

La sonda describe un movimiento circular uniforme alrededor de la Tierra porque la fuerza gravitatoria con que ésta lo atrae es una fuerza centrípeta.

Si recordamos que, según el Teorema de Gauss del campo gravitatorio, la Tierra es gravitatoriamente equivalente a una partícula de masa igual a la del planeta y situada en su centro − lo que obliga siempre a tomar distancias respecto al centro del planeta −, tenemos:

• Fuerza: $F = G\dfrac{m_T m}{r^2} = m\dfrac{v^2}{r}$

• **Velocidad -módulo-:**

$$v = \sqrt{\frac{G m_T}{r}} = \sqrt{\frac{6{,}67\times10^{-11} \times 5{,}98\times10^{24}}{2{,}26\times6{,}37\times10^{6}}} = 5{,}26\times10^{3}\ m\cdot s^{-1}$$

RESULTADO

- **Energía potencial gravitatoria:**

$$E_p = -G\frac{m_T m}{r} = -6{,}67\times10^{-11}\,\frac{5{,}98\times10^{24}\times10^3}{2{,}26\times6{,}37\times10^6}\ \text{J}$$

$$\boxed{E_p = -2{,}77\times10^{10}\ \text{J}}$$: RESULTADO

- Energía cinética:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}10^3\cdot(5{,}26\times10^3)^2 = 1{,}39\times10^{10}\ \text{J} = -\frac{E_p}{2}$$

- **Energía mecánica total:**

$$E_{tot} = E_c + E_p = 1{,}39\times10^{10} + (-2{,}77\times10^{10})\ \text{J}$$

$$\boxed{E_{tot} = -1{,}39\times10^{10}\ \text{J} = -E_c}$$: RESULTADO

- A distancia **infinita** de la Tierra, y admitiendo que la sonda llega a ella con la mínima velocidad: **nula**, tenemos:

$$E_{tot}(\infty) = \frac{1}{2}mv_\infty^2 - G\frac{m_T m}{\infty} = 0$$

Dado que partíamos de la energía total calculada en el punto anterior:

Para alejar la sonda desde su órbita hasta el infinito hay que comunicarle: 1,39×10¹⁰ J de energía : RESULTADO

Un satélite de masa 20 kg se coloca en órbita circular sobre el ecuador terrestre de modo que su radio se ajusta para que dé una vuelta a la Tierra cada 24 horas. Así se consigue que siempre se encuentre sobre el mismo punto respecto a la Tierra (satélite geoestacionario).

a) ¿Cuál debe ser el radio de su órbita?.

b) ¿Cuánta energía es necesaria para situarlo en dicha órbita?.

Datos:

Constante de Gravitación Universal: $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ Nm^2kg^{-2}$

Masa de la Tierra: $m_T = 5{,}96 \times 10^{24}$ kg

Radio de la Tierra: $R_T = 6.371$ km.

(Pruebas de acceso a la Universidad − Madrid, septiembre 2007)

Solución.-

El satélite describe un movimiento circular uniforme alrededor de la Tierra porque la fuerza con que ésta lo atrae gravitatoriamente es una fuerza centrípeta. Igualando las expresiones de ambas, y recordando la de la velocidad lineal del satélite, queda:

$$F_{cp} = F_{grav}\ ;\ m\frac{v^2}{r} = m\frac{\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2}{r} = G\frac{m_T m}{r^2}$$

Simplificando por la masa m del satélite y despejando el radio de la órbita: r, obtenemos:

$$r = \sqrt[3]{\frac{G m_T T^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{6{,}67\times10^{-11}\times5{,}96\times10^{24}\times(24\times60\times60)^2}{4\pi^2}}$$

$$\boxed{r = 4{,}22\times10^7\,m\ \ :\ \text{RESULTADO}}$$

La energía mecánica del satélite en la órbita geoestacionaria es:

$$E_f = E_{c,f} + E_{p,f} = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{m_T m}{r} =$$

$$= \frac{1}{2}m\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2 - G\frac{m_T m}{r} =$$

$$= \frac{1}{2}20\left(\frac{2\pi \times 4{,}22\times10^7}{24\times60\times60}\right)^2 - 6{,}67\times10^{-11}\frac{5{,}96\times10^{24}\times20}{4{,}22\times10^7} =$$

$$= -9{,}42\times10^7 \text{ J}.$$

En la superficie terrestre el satélite tiene esta energía mecánica inicial:

$$E_i = E_{p_i} = -G\frac{m_T m}{R_T} =$$

$$= -6{,}67\times10^{-11}\frac{5{,}96\times10^{24}\times20}{6{,}371\times10^6} = -1{,}25\times10^9 \text{ J}.$$

Por consiguiente, la energía necesaria para lanzar el satélite y situarlo en su órbita geoestacionaria es:

$$\boxed{\Delta E = E_f - E_i = (-9{,}42\times10^7) - (-1{,}25\times10^9) = 1{,}15\times10^9 \text{ J}.}$$

RESULTADO

Se pretende colocar un satélite artificial de forma que gire en una órbita circular en el plano del ecuador terrestre y en el sentido de rotación de la Tierra. Si se quiere que el satélite pase periódicamente sobre un punto del ecuador cada dos días, calcule:

a) la altura sobre la superficie terrestre a la que hay que colocar el satélite;

b) la relación entre la energía que hay que comunicar a dicho satélite desde el momento de su lanzamiento en la superficie terrestre para colocarlo en esa órbita y la energía mínima de escape.

Datos:

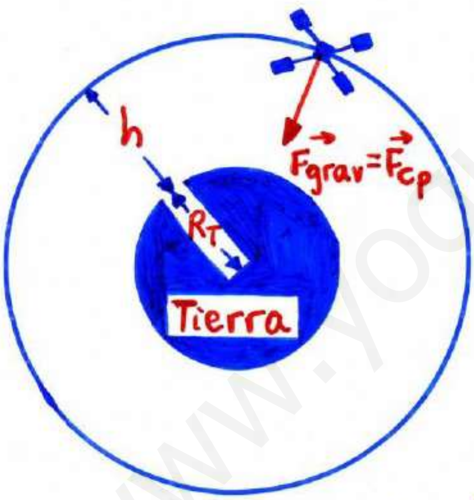
Constante de Gravitación Universal: $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ Nm^2kg^{-2}$

Radio de la Tierra: $R_T = 6.370$ km

Masa de la Tierra: $m_T = 5{,}98 \times 10^{24}$ kg.

(Pruebas de acceso a la Universidad − Madrid, septiembre 2002)

SOLUCIÓN:



El satélite describe un movimiento circular uniforme alrededor de la Tierra dado que la fuerza gravitatoria con que el planeta lo atrae es una fuerza centrípeta.

La velocidad lineal del satélite vale:

$$v = \frac{2\pi(h+R_T)}{T}$$, siendo

T (período) = 2 días = $2 \times 24 \times 60 \times 60\ s = 1{,}73 \times 10^5\ s$.

Igualando las expresiones de las fuerzas gravitatoria y centrípeta, y despejando la altura sobre la superficie terrestre queda:

$$G\frac{m_T m_S}{(h+R_T)^2} = m_S\frac{v^2}{h+R_T} = m_S\frac{\left[\frac{2\pi(h+R_T)}{T}\right]^2}{h+R_T} = \frac{4\pi^2 m_S(h+R_T)}{T^2}$$

$$h = \sqrt[3]{\frac{G m_T T^2}{4\pi^2}} - R_T = \sqrt[3]{\frac{(6{,}67\times10^{-11})\times(5{,}98\times10^{24})\times(1{,}73\times10^{5})^2}{4\pi^2}} - (6{,}37\times10^{6})$$

$$\boxed{h = 6{,}07\times10^{7}\ \text{m} \quad : \text{RESULTADO}}$$

Aplicando el Principio de conservación de la energía mecánica - al ser conservativo el campo gravitatorio - a la salida del satélite (superficie de la Tierra) y en su órbita, y recordando la expresión de la energía potencial gravitatoria, tenemos la energía -cinética- inicial que debemos suministrar al satélite para colocarlo en su órbita:

$$E_{C_{sup}} + E_{P_{sup}} = E_{C_{órbita}} + E_{P_{órbita}}$$

$$E_{C_{sup}} - G\frac{m_S m_T}{R_T} = \frac{1}{2}m_S v^2 - G\frac{m_T m_S}{h+R_T} = \frac{G m_T m_S}{2(h+R_T)} - \frac{G m_T m_S}{h+R_T} \ ;$$

despejando: $E_{C_{sup}} = G\frac{m_T m_S}{R_T} - G\frac{m_T m_S}{2(h+R_T)}$

La energía mínima de escape es la que habría que suministrar inicialmente al satélite a su salida desde la superficie terrestre para que lograse abandonar el campo gravitatorio del planeta (llegase al infinito con velocidad nula).

Aplicando otra vez el Principio de conservación de la energía, sacamos:

$$E_{mín\ esc} + E_{p_{sup}} = E_{c_\infty} + E_{p_\infty}$$

$$E_{mín\ esc} - G\frac{m_T m_S}{R_T} = 0 + 0 = 0$$; de donde:

$$E_{mín\ esc} = G\frac{m_T m_S}{R_T}$$, y comparando las dos:

$$\frac{E_{c\,sup}}{E_{mín\ esc}} = \frac{G\frac{m_T m_S}{R_T} - G\frac{m_T m_S}{2(h+R_T)}}{G\frac{m_T m_S}{R_T}} = 1 - \frac{R_T}{2(h+R_T)}$$

$$\boxed{\frac{E_{c\,sup}}{E_{mín\ esc}} = 1 - \frac{6{,}37\times10^6}{2(6{,}07\times10^7 + 6{,}37\times10^6)} = 0{,}95 \quad (95\%)}$$

RESULTADO

FÍSICA DE 2º DE BACHILLERATO **MECÁNICA E INTERACCIÓN GRAVITATORIA**

Un planeta esférico tiene 3.200 km de radio y la aceleración de la gravedad en su superficie es 6,2 ms^{-2}. Calcule:

a) la densidad media del planeta y la velocidad de escape desde su superficie;

b) la energía que hay que comunicar a un objeto de 50 kg de masa para lanzarlo desde la superficie del planeta y ponerlo en órbita circular alrededor del mismo, de forma que su período sea de 2 horas.

Dato:
Constante de Gravitación Universal: $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ Nm^2kg^{-2}$.

(Pruebas de acceso a la Universidad − Madrid, septiembre 2004)

SOLUCIÓN.-

Recordando que, según el teorema de Gauss, el planeta esférico es gravitatoriamente equivalente a una masa puntual igual a la del planeta y situada en su centro, con las leyes de gravitación universal y fundamental de la Dinámica encontramos el valor de la aceleración de la gravedad en su superficie:

$$F = G\frac{m_P m}{R_P^2} = mg\ ; \quad g = G\frac{m_P}{R_P^2} \quad \left(\begin{array}{l} m_P: \text{masa del planeta} \\ R_P: \text{radio del planeta}\end{array}\right)$$

La densidad media del planeta vale:

$$\rho_m = \frac{m_P}{V_P} = \frac{m_P}{\frac{4}{3}\pi R_P^3} = \frac{G\frac{m_P}{R_P^2}}{G\frac{4}{3}\pi R_p} = \frac{g}{G\frac{4}{3}\pi R_P} = \frac{6{,}20}{6{,}67\times10^{-11}\times\frac{4}{3}\pi\times3{,}20\times10^6}$$

$$\boxed{\rho_m = 6.934{,}69\ kgm^{-3}\ :\ \text{RESULTADO}}$$

La **velocidad de escape** desde la superficie del planeta es la que hay que suministrar a un objeto, de masa m, situado inicialmente en ella, para que logre alejarse hasta una distancia infinita del planeta, llegando allí con velocidad nula.

Aplicando el **Principio de conservación de la energía mecánica** tenemos:

$$E_{c,sup} + E_{p,sup} = E_{c,\infty} + E_{p,\infty}$$

$$\frac{1}{2} m v_{esc}^2 - G\frac{m_P m}{R_P} = \frac{1}{2} m \cdot 0^2 - G\frac{m_P m}{\infty} = 0 .$$

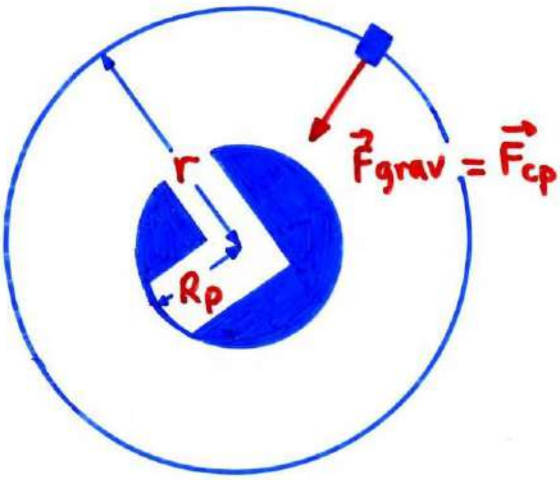
Despejando la velocidad de escape queda:

$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2 G m_P}{R_P}} = \sqrt{2 \frac{G m_P}{R_P^2} R_P} = \sqrt{2 g R_P} .$$

Sustituyendo:

$$\boxed{v_{esc} = \sqrt{2 \times 6{,}2 \times 3{,}2 \times 10^6} = 6.299{,}2 \ ms^{-1}}$$

RESULTADO



Cuando el objeto describe una órbita de radio **r** se debe a que la fuerza gravitatoria ejercida sobre él por el planeta es una fuerza centrípeta. Igualando las expresiones de ambas averiguamos **r**:

$$F = G\frac{m_P m}{r^2} = m\frac{v^2}{r} = m\frac{\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2}{r} = \frac{4\pi^2 m r}{T^2} \;;$$

de donde: $r = \sqrt[3]{\frac{G m_P T^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{G m_P}{R_P^2}\frac{T^2 R_P^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{g\frac{T^2 R_P^2}{4\pi^2}}$

$$r = \sqrt[3]{6{,}2\,\frac{(2\times 60\times 60)^2 \times (3{,}2\times 10^6)^2}{4\pi^2}} = 4{,}37\times 10^6\ \text{m} \;.$$

Las energías del satélite (objeto) en órbita son:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = G\frac{m_P m}{2r} \;;\quad E_p = -G\frac{m_P m}{r}$$

$$E_{órbita} = E_c + E_p = G\frac{m_P m}{2r} - G\frac{m_P m}{r} = -G\frac{m_P m}{2r} =$$

$$= -G\frac{m_P}{R_P^2}\frac{R_P^2 m}{2r} = -g\frac{R_P^2 m}{2r} = -6{,}2\,\frac{(3{,}2\times 10^6)^2 \times 50}{2\times 4{,}37\times 10^6}$$

$$E_{órbita} = -3{,}63\times 10^8\ \text{J} \;.$$

La energía del objeto en la superficie del planeta vale:

$$E_{sup} = E_c + E_p = 0 - G\frac{M_p m}{R_p} = -G\frac{M_p}{R_p^2} R_p m = -g R_p m \, ,$$

es decir: $E_{sup} = -6{,}2 \times 3{,}2 \times 10^6 \times 50 = -9{,}92 \times 10^8 \text{ J}$.

Por consiguiente, la energía que hay que comunicar al objeto para lanzarlo desde la superficie y ponerlo en órbita vale:

$$\Delta E = E_{órbita} - E_{sup} = (-3{,}63 \times 10^8) - (-9{,}92 \times 10^8) \text{ J}$$

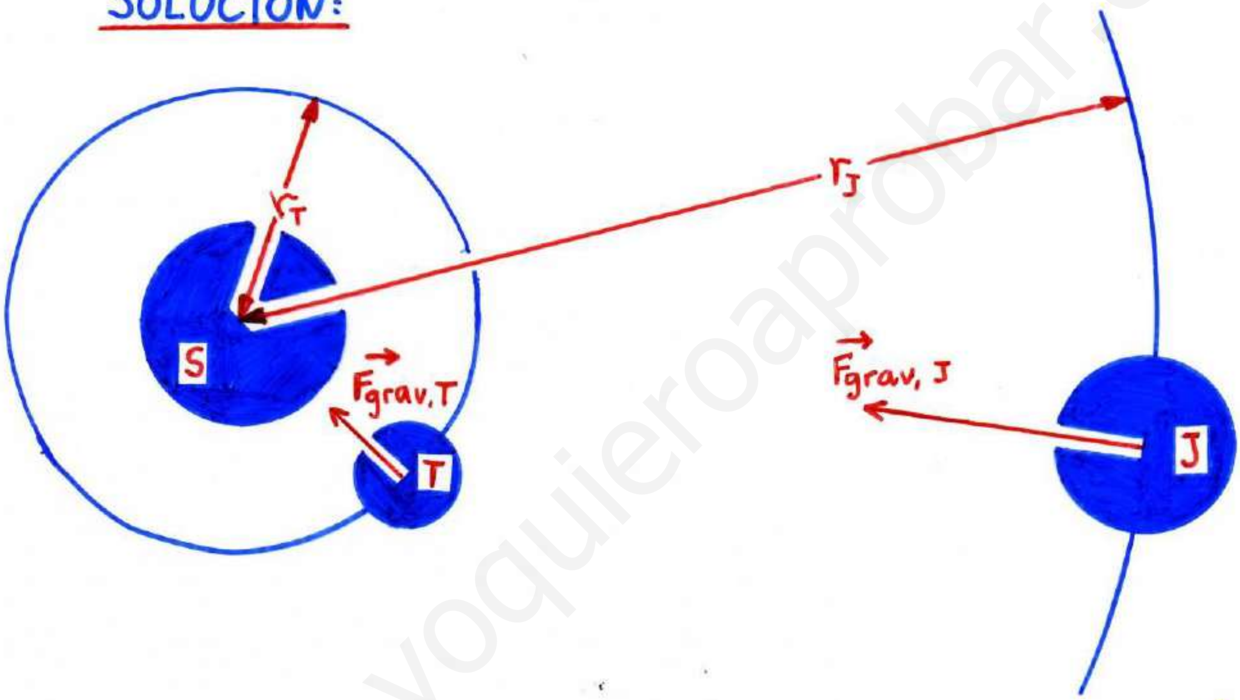
$$\boxed{\Delta E = 6{,}29 \times 10^8 \text{ J} \quad : \quad \text{RESULTADO}}$$

El período de revolución del planeta Júpiter en su órbita alrededor del Sol es aproximadamente doce veces mayor que el de la Tierra en su correspondiente órbita. Considerando circulares las órbitas de los dos planetas, determine:

a) la razón entre los radios de las respectivas órbitas, y
b) la razón entre las aceleraciones de los dos planetas en sus respectivas órbitas.

(Pruebas de acceso a la Universidad − Madrid, modelo 2001)

SOLUCIÓN:



La Tercera ley de Kepler establece que para los diferentes planetas hay una proporcionalidad directa entre los cuadrados de sus períodos de revolución alrededor del Sol y los cubos de los radios medios de sus respectivas órbitas:

$$\frac{T_J^2}{T_T^2} = \frac{r_J^3}{r_T^3}$$; de donde:

$$\boxed{\frac{r_J}{r_T} = \sqrt[3]{\left(\frac{T_J}{T_T}\right)^2} \approx \sqrt[3]{\left(\frac{12\,T_T}{T_T}\right)^2} = \sqrt[3]{12^2} = 5{,}24 \ : \ \text{RESULTADO}}$$

Recordando que tanto el Sol como la Tierra y Júpiter son gravitatoriamente equivalentes a sendas partículas cuya masa sería la total del astro respectivo, y que estaría situada en su centro (teorema de Gauss), la aplicación de las leyes fundamental de la Dinámica y de Gravitación universal nos proporciona las aceleraciones de estos dos planetas y su relación entre sí:

$$\boxed{\frac{a_J}{a_T} = \frac{\dfrac{F_{grav\,J}}{m_J}}{\dfrac{F_{grav\,T}}{m_T}} = \frac{\dfrac{\dfrac{G m_S m_J}{r_J^2}}{m_J}}{\dfrac{\dfrac{G m_S m_T}{r_T^2}}{m_T}} = \frac{r_T^2}{r_J^2} = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{12^2}}\right)^2 = 0{,}04 : \text{RESULTADO}}$$

Las distancias de la Tierra y de Marte al Sol son, respectivamente, $149{,}6 \times 10^6$ km y $228{,}0 \times 10^6$ km. Suponiendo que las órbitas son circulares y que el período de revolución de la Tierra en torno al Sol es de 365 días:

a) ¿Cuál será el período de revolución de Marte?.

b) Si la masa de la Tierra es 9,6 veces la de Marte y sus radios respectivos son: 6.370 km y 3.390 km, ¿cuál será el peso en Marte de una persona de 70 kg?.

Datos: Gravedad en la superficie terrestre: $g = 9{,}8\ \text{ms}^{-2}$.

(Pruebas de acceso a la Universidad − Madrid, modelo 1999)

SOLUCIÓN:

Aplicando la tercera ley de Kepler a las órbitas de la Tierra y de Marte alrededor del Sol, queda:

$$\frac{T_T^2}{d_{S-T}^3} = \frac{T_M^2}{d_{S-M}^3} = k \text{ ; despejando :}$$

$$\boxed{T_M = \sqrt{\left(\frac{d_{S-M}}{d_{S-T}}\right)^3 \times T_T^2} = \sqrt{\left(\frac{228{,}0\times10^9}{149{,}6\times10^9}\right)^3 \times (365\times86.400)^2} = 5{,}93\times10^7\,\text{s}}$$

RESULTADO

En la Tierra una persona de 70 kg de masa pesa:

$$P_T = m\left(\frac{Gm_T}{R_T^2}\right) = mg = 70\times9{,}80 = 686\ N \text{ ; } \quad g_T = \frac{Gm_T}{R_T^2} \approx 9{,}80\,\text{ms}^{-2}$$

En Marte tenemos:

$$m_M = \frac{m_T}{9{,}6} \text{ ; } R_M = 3.390\,\text{km} = \frac{6.370\,\text{km}}{1{,}88} = \frac{R_T}{1{,}88}$$

Con estos dos datos calculamos la aceleración de la gravedad en la superficie de Marte, en función de la gravedad terrestre:

$$g_M = \frac{Gm_M}{R_M^2} = \frac{G\,\frac{m_T}{9{,}6}}{\left(\frac{R_T}{1{,}88}\right)^2} = \frac{Gm_T}{R_T^2}\times\left(\frac{1{,}88^2}{9{,}6}\right) = 0{,}37\,g_T \approx 3{,}61\,\text{ms}^{-2}$$

Finalmente, la persona de 70 kg pesa en la superficie marciana:

$$\boxed{P_M = mg_M \approx 70\times3{,}61 = 252{,}56\ N \text{ : RESULTADO}}$$

La sonda espacial Mars Odissey describe una órbita circular en torno a Marte a una altura sobre su superficie de 400 km. Sabiendo que un satélite de Marte describe órbitas circulares de 9.390 km de radio y tarda en cada una de ellas 7,7 h, calcule:

a) el tiempo que tardará la sonda espacial en dar una vuelta completa;

b) la masa de Marte y la aceleración de la gravedad en su superficie.

Datos:

Constante de gravitación universal: $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2kg^{-2}}$

Radio de Marte: $R_M = 3.390$ km.

(Pruebas de acceso a la Universidad − Madrid, modelo 2004)

SOLUCIÓN.-

Tanto la sonda espacial como el satélite describen movimientos circulares uniformes en torno a Marte porque las fuerzas gravitatorias con que éste los atrae respectivamente son fuerzas centrípetas. Igualando en cada caso las expresiones de ambas, tenemos:

$$F(\text{sonda espacial}) = G\frac{m_M m_{sonda}}{r_{sonda}^2} = m_{sonda}\frac{v_{sonda}^2}{r_{sonda}} \quad ;$$

recordando que la velocidad lineal vale:

$$v_{sonda} = \frac{2\pi r_{sonda}}{T_{sonda}} \quad , \text{ queda:}$$

$$G m_M = v_{sonda}^2 r_{sonda} = \frac{4\pi^2 r_{sonda}^3}{T_{sonda}^2} \quad .$$

Análogamente, para el satélite:

$$GM_M = \frac{4\pi^2 r_{sat.}^3}{T_{sat.}^2}$$

Igualando estas dos expresiones y cancelando términos comunes queda:

$$\frac{r_{sonda}^3}{T_{sonda}^2} = \frac{r_{sat.}^3}{T_{sat.}^2},$$

expresión análoga a la tercera ley de Kepler para el movimiento de los planetas alrededor del Sol.

Despejando, el período para la sonda espacial resulta:

$$T_{sonda} = \sqrt{\frac{r_{sonda}^3 \times T_{sat.}^2}{r_{sat.}^3}} = \sqrt{\frac{(3.790\,km)^3 \times (7{,}7\,h)^2}{(9.390\,km)^3}}$$

$$\boxed{T_{sonda} = 1{,}97\,h = 7{,}11 \times 10^3\,s \text{ : RESULTADO}}$$

De la expresión escrita al comienzo de esta página podemos despejar la masa de Marte:

$$GM_M = \frac{4\pi^2 r_{sat.}^3}{T_{sat.}^2}$$

$$\boxed{m_M = \frac{4\pi^2 r_{sat.}^3}{G T_{sat.}^2} = \frac{4\pi^2 (9{,}39 \times 10^6)^3}{6{,}67 \times 10^{-11} \times (7{,}7 \times 3.600)^2} = 6{,}38 \times 10^{23}\,kg}$$

RESULTADO

Para encontrar el valor de la aceleración de la gravedad en la superficie de Marte solo tenemos que igualar las expresiones que dan la ley de gravitación universal y la ley fundamental de la Dinámica para el peso de un objeto situado en dicha superficie:

$$\text{Peso} = G\frac{m_M m}{R_M^2} = m g_M \; ; \quad \text{entonces:}$$

$$\boxed{g_M = G\frac{m_M}{R_M^2} = 6{,}67\times10^{-11}\,\frac{6{,}38\times10^{23}}{(3{,}39\times10^{6})^2} = 3{,}70\ \mathrm{ms^{-2}}}$$

RESULTADO

FÍSICA DE 2° DE BACHILLERATO MECÁNICA E INTERACCIÓN GRAVITATORIA

Júpiter tiene aproximadamente una masa 320 veces mayor que la de la Tierra y un volumen 1.320 veces superior al de la Tierra. Determine:

a) A qué altura *h* sobre la superficie de Júpiter debería encontrarse un satélite, en órbita circular en torno a este planeta, para que tuviera un período de 9 horas 50 minutos.

b) La velocidad del satélite en dicha órbita.

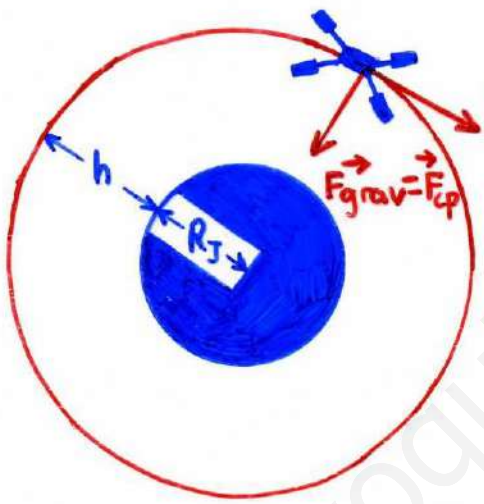
Datos:

Gravedad en la superficie de la Tierra: $g = 9{,}8\ \mathrm{ms^{-2}}$

Radio medio de la Tierra: $R_T = 6{,}37 \times 10^6$ m.

(Pruebas de acceso a la Universidad − Madrid, modelo 2003)

SOLUCIÓN:



Supongamos un objeto en la superficie de la Tierra. Igualando las expresiones de la fuerza peso dadas por las leyes fundamental de la Dinámica y de gravitación universal, podemos expresar la masa terrestre en función del radio y la aceleración de la gravedad en la superficie:

$$m g_T = G \frac{m_T m}{R_T^2} \text{; de donde: } m_T = \frac{g_T R_T^2}{G} .$$

Suponiendo que Júpiter y la Tierra son perfectamente esféricos, comparando sus volúmenes obtenemos la relación entre sus radios medios, en la siguiente página:

$V_J = 1.320\, V_T$; $\frac{4}{3}\pi R_J^3 = 1.320 \times \frac{4}{3}\pi R_T^3$; despejando:

$$R_J = \sqrt[3]{1.320}\, R_T = \sqrt[3]{1.320} \times 6{,}37 \times 10^6 = 6{,}99 \times 10^7\ m\ .$$

Si el satélite describe un movimiento circular uniforme en torno a Júpiter es porque la fuerza gravitatoria con que éste lo atrae es, también, fuerza centrípeta. Igualando las expresiones de ambas, recordando que el módulo de la velocidad del satélite vale:

$$v = \frac{2\pi\,(h + R_J)}{T}$$

y las relaciones obtenidas antes, tenemos:

$$\frac{mv^2}{h+R_J} = G\frac{m_J m}{(h+R_J)^2}\ ;\ v^2 = \frac{4\pi^2 (h+R_J)^2}{T^2} = \frac{G\, m_J}{h+R_J}$$

$$(h+R_J)^3 = \frac{G m_J T^2}{4\pi^2} = \frac{G \times 320\, m_T \times T^2}{4\pi^2} = \frac{G \times 320 \frac{g_T R_T^2}{G} \times T^2}{4\pi^2}$$

$$(h+R_J)^3 = \frac{320 \times g_T R_T^2 T^2}{4\pi^2} = \frac{320 \times 9{,}8 \times (6{,}37 \times 10^6)^2 \times 35.400^2}{4\pi^2}$$

$(T = 9\ h\ 50\ min = 35.400\ s)$

$(h+R_J)^3 = 4{,}04 \times 10^{24}\ m^3$; de donde:

$$\boxed{h = \sqrt[3]{4{,}04 \times 10^{24}} - R_J = \sqrt[3]{4{,}04 \times 10^{24}} - 6{,}99 \times 10^7 = 8{,}94 \times 10^7\ m}$$

RESULTADO

Finalmente, el valor numérico de la velocidad del satélite en su órbita es:

$$\boxed{v = \frac{2\pi(h+R_J)}{T} = \frac{2\pi\left[(8{,}94\times10^{7})+(6{,}99\times10^{7})\right]}{35.400} = 2{,}83\times10^{4}\ \mathrm{m\,s^{-1}}}$$

RESULTADO

FÍSICA DE 2º DE BACHILLERATO MECÁNICA E INTERACCIÓN GRAVITATORIA

La nave espacial Discovery, lanzada en octubre de 1998, describía en torno a la Tierra una órbita circular con una velocidad de 7,62 kms^{-1}.

a) ¿A qué altitud se encontraba?.

b) ¿Cuál era su período?. ¿Cuántos amaneceres contemplaban cada 24 horas los astronautas que viajaban en el interior de la nave?.

Datos: Constante de Gravitación: $G = 6,67 \times 10^{-11}\ Nm^2kg^{-2}$
Masa de la Tierra: $m_T = 5,98 \times 10^{24}$ kg
Radio medio de la Tierra: $R_T = 6.370$ km.

(Pruebas de acceso a la Universidad − Madrid, septiembre 1999)

SOLUCIÓN:

Si la nave describe un movimiento circular uniforme en torno a la Tierra, que equivale a una partícula de masa la total: m_T, situada en el centro del planeta (teorema de Gauss), es debido a la identidad entre las fuerzas gravitatoria y centrípeta. Recordando las expresiones de ambas e igualando:

$$F_{grav} = F_{cp}\ ;\quad G\frac{m_T m}{(h+R_T)^2} = m\frac{v^2}{h+R_T} \quad (h+R_T: \text{distancia al centro terrestre})$$

Despejando, la altitud h -sobre la superficie terrestre- queda:

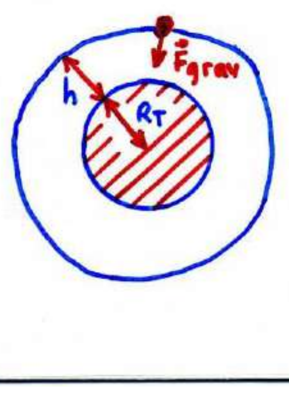
$$\boxed{h = \frac{Gm_T}{v^2} - R_T = \frac{6,67\times10^{-11}\cdot 5,98\times10^{24}}{7.620^2} - 6,37\times10^{6} = 4,99\times10^{5}\,m : \text{RESULTADO}}$$

Tomando la velocidad lineal para una vuelta completa y despejando el período, T, resulta:

$$v = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2\pi(h+R_T)}{T}\ ;\quad \boxed{T = \frac{2\pi(h+R_T)}{v} = \frac{2\pi(4,99\times10^5 + 6,37\times10^6)}{7,62\times10^3} = 5.663,94\,s \quad \text{RESULTADO}}$$

Los astronautas contemplan un amanecer cada vez que dan una vuelta en torno a la Tierra. En 24 horas (86.400 s) el número de vueltas, y de amaneceres, es:

$$\boxed{\frac{86.400\ s}{5.663,94\ s/vuelta} = 15,25\ \text{vueltas} = 15(,25)\ \text{amaneceres} \quad \text{RESULTADO}}$$



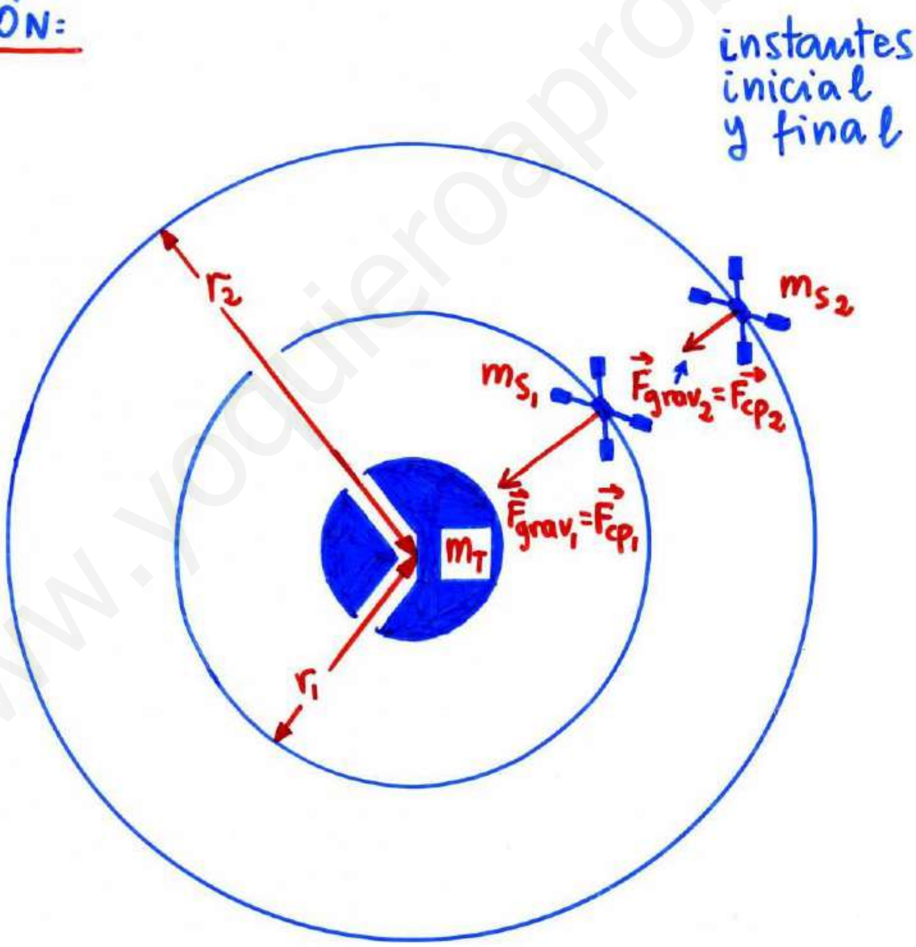
Dos satélites artificiales de la Tierra S_1 y S_2 describen en un sistema de referencia geocéntrico dos órbitas circulares, contenidas en un mismo plano, de radios $r_1 = 8.000$ km y $r_2 = 9.034$ km, respectivamente. En un instante inicial dado, los satélites están alineados con el centro de la Tierra y situados del mismo lado.

a) ¿Qué relación existe entre las velocidades orbitales de ambos satélites?.

b) ¿Qué relación existe entre los períodos orbitales de los satélites?. ¿Qué posición ocupará el satélite S_2 cuando el satélite S_1 haya completado seis vueltas, desde el instante inicial?.

(Pruebas de acceso a la Universidad − Madrid, junio 2001)

SOLUCIÓN:



Si cada satélite describe un movimiento circular uniforme en torno a la Tierra ello se debe a que la fuerza gravitatoria con que el planeta atrae a cada uno es una fuerza centrípeta. Recordando las expresiones de ambas fuerzas, así como de la velocidad lineal en el movimiento circular uniforme, tenemos:

$$F_{grav} = F_{cp} \; ; \quad G\frac{m_T m_S}{r^2} = m_S \frac{v_S^2}{r} \; ; \text{ de donde:}$$

$$v_S = \sqrt{G\frac{m_T}{r}}$$ y comparando queda:

$$\boxed{\frac{v_{S_1}}{v_{S_2}} = \frac{\sqrt{G\frac{m_T}{r_1}}}{\sqrt{G\frac{m_T}{r_2}}} = \sqrt{\frac{r_2}{r_1}} = \sqrt{\frac{9.034\,\text{km}}{8.000\,\text{km}}} = 1{,}06 \; : \text{ RESULTADO}}$$

De la expresión de la velocidad lineal:

$v = \frac{2\pi r}{T}$, obtenemos la del período: $T = \frac{2\pi r}{v}$

y comparando para los dos satélites sacamos:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\frac{2\pi r_1}{v_1}}{\frac{2\pi r_2}{v_2}} = \frac{v_2}{v_1}\cdot\frac{r_1}{r_2} = \sqrt{\frac{r_1}{r_2}}\cdot\frac{r_1}{r_2} = \sqrt{\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3} = \sqrt{\left(\frac{8.000\,\text{km}}{9.034\,\text{km}}\right)^3}$$

$$\boxed{\frac{T_{S_1}}{T_{S_2}} = 0{,}83 \; : \text{ RESULTADO}}$$

Dado que el período en un movimiento circular uniforme es el tiempo invertido en dar una vuelta, el tiempo t_1 que ha gastado el satélite S_1 en dar seis vueltas alrededor de la Tierra ha sido:

$$t_1 = 6T_{S_1} \quad ;$$

como, evidentemente, este tiempo ha sido el mismo para el satélite S_2, con la relación que acabamos de obtener entre ambos períodos encontramos:

$$t_2 = xT_{S_2} = t_1 = 6T_{S_1} \; ; \quad x = 6\,\frac{T_{S_1}}{T_{S_2}} = 6 \times 0{,}83 = 5 \quad ;$$

es decir, en el mismo tiempo en que el satélite S_1 ha cubierto seis vueltas completas en torno a la Tierra, el satélite S_2 ha cubierto cinco vueltas completas, y dado que en el instante inicial los dos satélites estaban alineados con el centro de la Tierra, y situados del mismo lado:

$$\boxed{\text{al cabo del tiempo anteriormente mostrado los dos satélites vuelven a estar alineados con el centro de la Tierra, y situados también del mismo lado : RESULTADO}}$$

El vehículo espacial Apolo VIII estuvo en órbita circular alrededor de la Luna, 113 km por encima de su superficie. Calcular:

a) El período del movimiento.

b) Las velocidades lineal y angular del vehículo.

c) La velocidad de escape a la atracción lunar desde esa posición.

Datos: Constante de Gravitación: $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2kg^{-2}}$

Masa de la Luna: $m_L = 7{,}36 \times 10^{22}$ kg

Radio medio lunar: $R_L = 1.740$ km.

(*Pruebas de acceso a la Universidad − Madrid, septiembre 1996*)

SOLUCIÓN:

Si el vehículo espacial describe un movimiento circular uniforme en torno a la Luna, que equivale a una partícula de masa la total: m_L, situada en el centro del astro (teorema de Gauss), es debido a la identidad entre las fuerzas gravitatoria y centrípeta. Recordando las expresiones de ambas e igualando:

$$F_{grav} = F_{cp};\quad G\frac{m_L m}{(h+R_L)^2} = m\frac{v^2}{h+R_L}$$ ($h+R_L$: distancia al centro lunar)

Despejando la velocidad lineal:

$$\boxed{v=\sqrt{\frac{Gm_L}{h+R_L}}=\sqrt{\frac{6{,}67\times10^{-11}\times7{,}36\times10^{22}}{1{,}853\times10^6}} = 1.627{,}66\ \mathrm{ms^{-1}} : \text{RESULTADO}}$$

Recordando que: velocidad lineal = velocidad angular × radio:

$$\boxed{\omega = \frac{v}{h+R_L} = \frac{1.627{,}66}{1{,}853\times10^6} = 8{,}78\times10^{-4}\ \mathrm{rad\ s^{-1}} : \text{RESULTADO}}$$

Con la relación entre velocidad angular y período (vuelta completa):

$$\omega = \frac{2\pi}{T};\quad \boxed{T=\frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{8{,}78\times10^{-4}} = 7.153{,}06\ \mathrm{s} : \text{RESULTADO}}$$

La velocidad de escape es la que comunica a la nave la energía cinética necesaria para contrarrestar la energía total −que es negativa− que tiene la nave en su órbita, a fin de que la energía total final sea, al menos, igual a 0:

$$\underbrace{\frac{1}{2}mv_i^2 - G\frac{m_L m}{h+R_L}}_{E_{tot\ inicial}} + \frac{1}{2}mv_{esc}^2 = 0;\quad v_{esc} = \sqrt{\frac{2Gm_L}{h+R_L} - v_i^2}$$; sustituyendo:

$$\boxed{v_{esc} = \sqrt{\frac{2\times6{,}67\times10^{-11}\times7{,}36\times10^{22}}{1{,}853\times10^6} - 1.627{,}66^2} = 1.627{,}66\ \mathrm{ms^{-1}} : \text{RESULTADO}}$$

La nave espacial Lunar Prospector permanece en órbita circular alrededor de la Luna a una altura de 100 km sobre su superficie. Determine:

a) La velocidad lineal de la nave y el período del movimiento.

b) La velocidad de escape a la atracción lunar desde esa órbita.

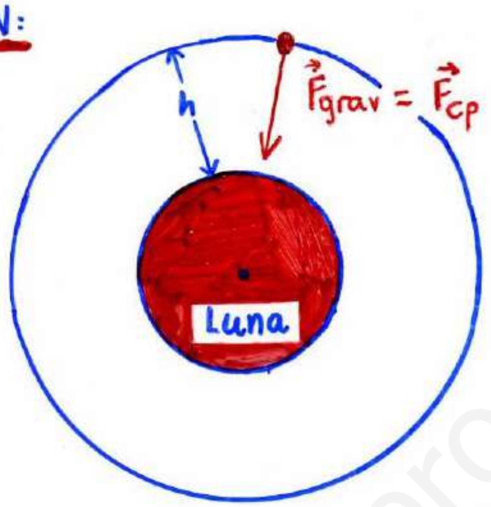
Datos: Constante de Gravitación: $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2kg^{-2}}$

Masa de la Luna: $m_L = 7{,}36 \times 10^{22}$ kg

Radio medio lunar: $R_L = 1.740$ km.

(*Pruebas de acceso a la Universidad − Madrid, junio 1998*)

SOLUCIÓN:



Si el vehículo espacial describe un movimiento circular uniforme en torno a la Luna, que equivale a una partícula de masa la total: m_L, situada en el centro del astro (teorema de Gauss), es debido a la identidad entre las fuerzas gravitatoria y centrípeta.

Recordando las expresiones de ambas e igualando:

$F_{grav} = F_{cp}$; $\dfrac{G m_L m}{(h+R_L)^2} = m\dfrac{v^2}{h+R_L}$; despejando la velocidad lineal:

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{G m_L}{h+R_L}} = \sqrt{\frac{6{,}67\times10^{-11}\times 7{,}36\times10^{22}}{1{,}84\times10^{6}}} = 1.633{,}40\ ms^{-1} : \text{RESULTADO}}$$

Considerando una órbita completa, el período vale:

$v = \dfrac{2\pi R}{T}$; $\boxed{T = \dfrac{2\pi R}{v} = \dfrac{2\pi(h+R_L)}{v} = \dfrac{2\pi\cdot 1{,}84\times10^6}{1.633{,}40} = 7.077{,}91\ s : \text{RESULTADO}}$

La velocidad de escape es la que comunica a la nave la energía cinética necesaria para contrarrestar la energía total que tiene esa nave en su órbita −energía total negativa−, a fin de que la energía total final sea, al menos, igual a 0:

$\underbrace{\frac{1}{2}mv_i^2 - G\frac{m_L m}{h+R_L}}_{E_{tot\ inicial}} + \frac{1}{2}mv_{esc}^2 = 0$; $v_{esc} = \sqrt{\dfrac{2Gm_L}{h+R_L} - v_i^2}$; sustituyendo:

$$\boxed{v_{esc} = \sqrt{\frac{2\times 6{,}67\times10^{-11}\times 7{,}36\times10^{22}}{1{,}84\times10^{6}} - 1.633{,}40^2} = 1.633{,}40\ ms^{-1}\ \text{RESULTADO}}$$

Se pone en órbita en satélite artificial de 600 kg a una altura de 1.200 km sobre la superficie de la Tierra. Si el lanzamiento se ha realizado desde el nivel del mar, calcule:

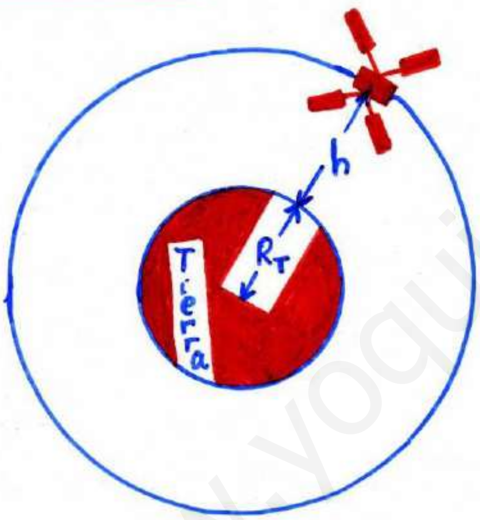
a) cuánto ha aumentado la energía potencial gravitatoria del satélite;

b) qué energía adicional hay que suministrar al satélite para que escape a la acción del campo gravitatorio terrestre desde esa órbita.

Datos: Constante de Gravitación: $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ Nm^2kg^{-2}$
Masa de la Tierra: $m_T = 5{,}98 \times 10^{24}$ kg
Radio medio de la Tierra: $R_T = 6{,}37 \times 10^6$ m.

(Pruebas de acceso a la Universidad − Madrid, junio 2000)

SOLUCIÓN:



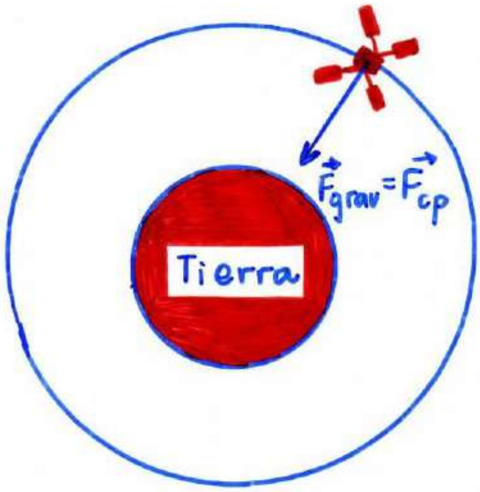
La Tierra se comporta a nivel gravitatorio como una partícula de masa m_T situada en el centro del planeta, por lo que debemos siempre tomar distancias respecto a dicho punto central (teorema de Gauss).

Recordando la expresión de la energía potencial gravitatoria, tenemos:

$$\Delta E_p = E_{p\,\acute{o}rbita} - E_{p\,sup} = -\frac{Gm_Tm}{R_T+h} - \left(-\frac{Gm_Tm}{R_T}\right) =$$

$$= Gm_Tm\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_T+h}\right) = 6{,}67\times10^{-11}\times5{,}98\times10^{24}\times600\left(\frac{1}{6{,}37\times10^6} - \frac{1}{7{,}57\times10^6}\right)$$

$$\boxed{\Delta E_p = 5{,}96\times10^9\ J \quad : \text{RESULTADO}}$$



Si el satélite describe un movimiento circular uniforme alrededor de la Tierra, es debido a que la fuerza con que ésta lo atrae gravitatoriamente es una fuerza centrípeta. Recordando la expresión de ambas e igualando, tenemos:

$$F_{grav}=F_{cp}\ ; \quad G\frac{m_T m}{(R_T+h)^2}=m\frac{v^2}{R_T+h}\ ; \text{ de donde:}$$

$$\frac{G m_T m}{2(R_T+h)}=\frac{1}{2}mv^2=\text{Energía cinética del satélite, en órbita.}$$

La energía mecánica -total- del satélite en órbita vale, entonces:

$$E_{tot}=E_c+E_p=\frac{G m_T m}{2(R_T+h)}-\frac{G m_T m}{R_T+h}=-\frac{G m_T m}{2(R_T+h)}=$$

$$=-\frac{6{,}67\times10^{-11}\times5{,}98\times10^{24}\times600}{2(6{,}37\times10^6+1{,}20\times10^6)}=-1{,}58\times10^{10}\ \text{J}$$

Para que el satélite logre escapar del campo gravitatorio terrestre su energía mecánica ha de ser, como mínimo, 0 J, es decir,

hay que dar al satélite en órbita una energía adicional de, al menos: $1{,}58\times10^{10}$ J para que escape del campo gravitatorio de la Tierra : RESULTADO

FÍSICA DE 2º DE BACHILLERATO MECÁNICA E INTERACCIÓN GRAVITATORIA

Un satélite artificial de 200 kg describe una órbita circular alrededor de la Tierra. La velocidad de escape a la atracción terrestre desde esa órbita es la mitad que la velocidad de escape desde la superficie terrestre.

a) Calcule la fuerza de atracción gravitatoria entre la Tierra y el satélite.

b) Calcule el potencial gravitatorio en la órbita del satélite.

c) Calcule la energía mecánica del satélite en la órbita.

d) ¿Se trata de un satélite geoestacionario?. Justifique la respuesta.

Datos:

Constante de Gravitación Universal: $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ Nm^2kg^{-2}$

Masa de la Tierra: $m_T = 5{,}98 \times 10^{24}$ kg

Radio de la Tierra: $R_T = 6{,}37 \times 10^6$ m.

(Pruebas de acceso a la Universidad − Madrid, modelo 2008)

SOLUCIÓN.-

Para encontrar las magnitudes pedidas debemos hallar antes el radio de la órbita descrita por el satélite.

El satélite describe un movimiento circular uniforme alrededor de la Tierra porque la fuerza gravitatoria con que ésta lo atrae es una fuerza centrípeta. Igualando los módulos de ambas, tenemos:

$$F_{grav} = F_{cp} \ ; \quad G\frac{m_T m}{r^2} = m\frac{v^2}{r} .$$

La energía mecánica del satélite en órbita vale:

$$E_{tot} = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{m_T m}{r} = G\frac{m_T m}{2r} - G\frac{m_T m}{r} = -G\frac{m_T m}{2r} .$$

La velocidad de escape es la que proporciona la energía cinética mínima para que al final la energía mecánica valga:

$$E_{tot_f} = \frac{1}{2} m \cdot 0^2 - G \frac{m_T m}{\infty} = 0 \quad .$$

Por tanto, desde la órbita del satélite la velocidad de escape es:

$$E_{tot} + E_{c,esc} = 0; \quad -G \frac{m_T m}{2r} + \frac{1}{2} m v_{esc,orb}^2 = 0$$

y entonces: $$v_{esc,orb} = \sqrt{\frac{G m_T}{r}} \quad .$$

Por otra parte, la velocidad de escape desde la superficie terrestre la obtendríamos así:

$$E_{tot,sup} = E_{p,sup} = -G \frac{m_T m}{R_T}$$

$$E_{tot} + E_{c,esc} = 0; \quad -G \frac{m_T m}{R_T} + \frac{1}{2} m v_{esc,sup}^2 = 0$$

por lo cual: $$v_{esc,sup} = \sqrt{\frac{2 G m_T}{R_T}} \quad .$$

Comparando las dos velocidades de escape anteriores, resulta:

$$v_{esc,sup} = 2 v_{esc,orb}; \quad \sqrt{\frac{2 G m_T}{R_T}} = 2 \sqrt{\frac{G m_T}{r}} \ ;$$

$$\sqrt{\frac{4 G m_T}{2 R_T}} = \sqrt{\frac{4 G m_T}{r}} \ ; \text{ de donde: } r = 2 R_T \ .$$

La fuerza de atracción gravitatoria entre la tierra y el satélite vale, numéricamente:

$$F = G\frac{m_T m}{r^2} = G\frac{m_T m}{4R_T^2} = \frac{6{,}67\times10^{-11}\times5{,}98\times10^{24}\times200}{4(6{,}37\times10^6)^2}$$

$$\boxed{F = 491{,}49\ N : \text{RESULTADO}}$$

El potencial gravitatorio en la órbita descrita por el satélite vale:

$$\boxed{V = -G\frac{m_T}{r} = -\frac{6{,}67\times10^{-11}\times5{,}98\times10^{24}}{2\times6{,}37\times10^6} = -3{,}13\times10^7\ J\,kg^{-1} \quad \text{RESULTADO}}$$

Según obtuvimos antes, la energía mecánica del satélite en esa órbita vale:

$$E_{tot} = -G\frac{m_T m}{2r} = -\frac{6{,}67\times10^{-11}\times5{,}98\times10^{24}\times200}{4\times6{,}37\times10^6}$$

$$\boxed{E_{tot} = -3{,}13\times10^9\ J : \text{RESULTADO}}$$

El período orbital del satélite vale:

$$F = m\frac{v^2}{r} = m\frac{\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2}{r} = \frac{m4\pi^2 r}{T^2} \quad ;$$

$$T = \sqrt{\frac{m4\pi^2 r}{F}} = \sqrt{\frac{200\times4\times\pi^2\times2\times6{,}37\times10^6}{491{,}49}} = 14.306{,}08\ s\ .$$

Si el satélite fuese geoestacionario estaría siempre en la vertical sobre el mismo punto de la superficie terrestre, por lo que su período orbital tendría que ser:

$T_{geoestacionario} = 24\,h = 86.400\ s$.

Comprobamos, pues, que:

$$\boxed{\text{Este satélite no es geoestacionario.}}$$

RESULTADO

Si se considera que la Tierra tiene forma esférica, con un radio aproximado de 6.400 km, determine:

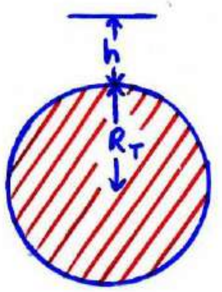
a) La relación existente entre las intensidades del campo gravitatorio sobre la superficie terrestre y a una altura de 144 km por encima de la misma.

b) La variación de energía cinética de un cuerpo de 100 kg de masa al caer libremente desde la altura de 144 km hasta 72 km por encima de la superficie terrestre.

Datos: Constante de Gravitación: $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2kg^{-2}}$
Masa de la Tierra: $m_T = 5{,}98 \times 10^{24}$ kg.

(*Pruebas de acceso a la Universidad − Madrid, septiembre 1998*)

SOLUCIÓN:



Según el teorema de Gauss, la Tierra es gravitatoriamente equivalente a una partícula, de masa la total: m_T, situada en el centro del planeta, debiendo siempre tomar distancias respecto a este punto central.

Recordando que la intensidad de campo gravitatorio es la fuerza gravitatoria newtoniana por unidad de masa, queda:

$$\boxed{\frac{g_{sup}}{g_h} = \frac{G\frac{m_T}{R_T^2}}{G\frac{m_T}{(h+R_T)^2}} = \left(\frac{h+R_T}{R_T}\right)^2 \approx \left(\frac{6{,}544\times10^6}{6{,}400\times10^6}\right)^2 = 1{,}0455 \text{ : RESULTADO}}$$

De acuerdo con el Principio de conservación de la energía mecánica total, el aumento de la energía cinética del cuerpo al caer es igual a la disminución de energía potencial gravitatoria. Recordando la expresión de ésta:

$$\Delta E_c = E_{c_f} - E_{c_i} = -\Delta E_p = E_{p_i} - E_{p_f} = -G\frac{m_T m}{h_i+R_T} - \left(-G\frac{m_T m}{h_f+R_T}\right)$$

$$\Delta E_c = -\Delta E_p = G m_T m\left(\frac{1}{h_f+R_T} - \frac{1}{h_i+R_T}\right) \approx 6{,}67\times10^{-11}\times5{,}98\times10^{24}\times10^2\left(\frac{1}{6{,}472\times10^6} - \frac{1}{6{,}544\times10^6}\right)$$

$$\boxed{\Delta E_c \approx 6{,}78\times10^7\ \mathrm{J} \text{ : RESULTADO}}$$

(Calculando la variación de energía cinética así nos evitamos determinar previamente las velocidades inicial y final.)

Se lanza una nave de masa m = 5×10^3 kg desde la superficie de un planeta de radio $R_1 = 6 \times 10^3$ km y masa $M_1 = 4 \times 10^{24}$ kg, con una velocidad inicial $v_0 = 2 \times 10^4$ m/s, en dirección hacia otro planeta del mismo radio $R_2 = R_1$ y masa $M_2 = 2\ M_1$, siguiendo la línea recta que une los centros de ambos planetas. Si la distancia entre dichos centros es $D = 4{,}83 \times 10^{10}$ m, determine:

a) la posición del punto P en el que la fuerza neta sobre la nave es cero;

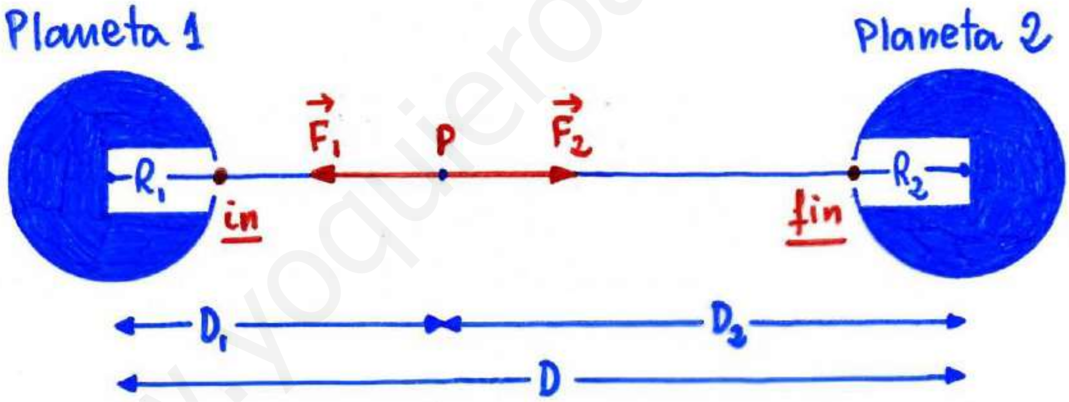
b) la energía cinética con la que llegará la nave a la superficie del segundo planeta.

Dato:

Constante de Gravitación Universal: $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ Nm^2kg^{-2}$.

(Pruebas de acceso a la Universidad − Madrid, modelo 2006)

SOLUCIÓN.-



En el punto P la fuerza neta sobre la nave será nula porque se contrarrestarán las fuerzas con que los dos planetas atraen gravitatoriamente a la nave. Recordando que cada planeta es gravitatoriamente equivalente a una partícula de masa la total situada en su centro (teorema de Gauss), tenemos:

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 \ ; \quad F_1 = F_2 \ ; \quad \begin{cases} G\dfrac{M_1 m}{D_1^2} = G\dfrac{M_2 m}{D_2^2} \\ D_1 + D_2 = D \end{cases}$$

Sustituyendo, simplificando y resolviendo este sistema obtenemos:

$$\begin{cases} G\dfrac{M_1 m}{D_1^2} = G\dfrac{2M_1 m}{D_2^2} \\ D_1 + D_2 = D \end{cases} \ ; \quad \begin{cases} \dfrac{1}{D_1^2} = \dfrac{2}{D_2^2} \\ D_1 + D_2 = 4{,}83\times10^{10} \end{cases}$$

La solución es: $D_1 = 2\times10^{10}$ m ; $D_2 = 2{,}83\times10^{10}$ m.

Es decir:

el punto P está a 2×10^{10} m del centro del planeta 1 : RESULTADO

Dado que el campo gravitatorio es conservativo, aplicando el Principio de conservación de la energía mecánica encontramos la energía cinética final de la nave:

- Energía cinética inicial:

$$E_{c,in} = \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} 5\times10^3 (2\times10^4)^2 = 10^{12}\ J\ .$$

- Energía potencial gravitatoria inicial, debida al planeta 1:

$$E_{p,in,1} = -G\frac{M_1 m}{R_1} = -6{,}67\times10^{-11}\frac{4\times10^{24}\times5\times10^3}{6\times10^6} = -2{,}22\times10^{11}\ J.$$

- Energía potencial gravitatoria inicial, debida al planeta 2:

$$E_{p,in,2} = -G\frac{M_2 m}{D-R_1} = -6{,}67\times10^{-11}\frac{8\times10^{24}\times5\times10^3}{4{,}83\times10^{10}-6\times10^6} = -5{,}52\times10^7\ J.$$

- Energía cinética final: $E_{c,fin}$.
- Energía potencial gravitatoria final, debida al planeta 1:

$$E_{p,fin,1} = -G\frac{M_1 m}{D-R_2} = -6{,}67\times10^{-11}\frac{4\times10^{24}\times5\times10^3}{4{,}83\times10^{10}-6\times10^6} = -2{,}76\times10^7\ J.$$

- Energía potencial gravitatoria final, debida al planeta 2:

$$E_{p,fin,2} = -G\frac{M_2 m}{R_2} = -6{,}67\times10^{-11}\frac{8\times10^{24}\times5\times10^3}{6\times10^6} = -4{,}45\times10^{11}\ J.$$

Entonces: $E_{c,in} + E_{p,in,1} + E_{p,in,2} = E_{c,fin} + E_{p,fin,1} + E_{p,fin,2}$

$$E_{c,fin} = E_{c,in} + E_{p,in,1} + E_{p,in,2} - E_{p,fin,1} - E_{p,fin,2}$$

$$E_{c,fin} = 10^{12} - 2{,}22\times10^{11} - 5{,}52\times10^7 + 2{,}76\times10^7 + 4{,}45\times10^{11}\ J$$

$$\boxed{E_{c,fin} = 1{,}22\times10^{12}\ J\ :\ \text{RESULTADO}}$$

Sabiendo que el período de revolución lunar es de 27,32 días y que el radio de la órbita es: $R_L = 3,84 \times 10^8$ m, calcule:

a) La constante de gravitación universal: G (obtener su valor a partir de los datos del problema).

b) La fuerza que la Luna ejerce sobre la Tierra y la de la Tierra sobre la Luna.

c) El trabajo necesario para llevar un objeto de 5.000 kg desde la Tierra hasta la Luna. (Despreciar los radios de la Tierra y de la Luna, en comparación con su distancia).

d) Si un satélite se sitúa entre la Tierra y la Luna, a una distancia de la Tierra de $R_L/4$, ¿cuál es la relación de fuerzas debidas a la Tierra y a la Luna?.

Datos:
- Masa de la Tierra: $m_T = 5,98 \times 10^{24}$ kg
- Masa de la Luna: $m_L = 7,35 \times 10^{22}$ kg
- Radio de la Tierra: $= 6,37 \times 10^6$ m
- Radio de la Luna: $= 1,74 \times 10^6$ m .

(Pruebas de acceso a la Universidad – Madrid, junio 2011)

SOLUCIÓN.-

Consideramos que la luna describe un movimiento circular uniforme alrededor de la Tierra. Ello se debe a que la fuerza gravitatoria con que ésta la atrae es una fuerza centrípeta. Igualando las expresiones de los módulos de ambas, y recordando también la expresión de la velocidad lineal de la Luna, tenemos:

$$F_{grav} = F_{cpta} \ ; \quad G\frac{m_T m_L}{R_L^2} = m_L\frac{v^2}{R_L} = m_L\frac{\left(\frac{2\pi R_L}{T}\right)^2}{R_L} = \frac{4\pi^2 m_L R_L}{T^2}$$

despejando la constante de gravitación: G queda:

$$\boxed{G = \frac{4\pi^2 R_L^3}{m_T \cdot T^2} = \frac{4\pi^2 \cdot (3,84\times10^8)^3}{5,98\times10^{24} \cdot (27,32\times24\times60\times60)^2} = 6,71\times10^{-11}\ \frac{N\cdot m^2}{kg^2}}$$

RESULTADO

Las fuerzas gravitatorias con que la Tierra y la Luna se atraen mutuamente son iguales y contrarias, y sus módulos respectivos valen:

$$F_{grav\,T\text{-}L} = F_{grav\,L\text{-}T} = G\frac{m_T m_L}{R_L^2} = \frac{6{,}71\times10^{-11}\times5{,}98\times10^{24}\times7{,}35\times10^{22}}{(3{,}84\times10^8)^2}$$

$$\boxed{F_{grav\,T\text{-}L} = F_{grav\,L\text{-}T} = 2{,}00\times10^{20}\ N}$$: RESULTADO

El campo gravitatorio -conjunto de la Tierra y la Luna- es conservativo. Podemos, entonces, calcular el trabajo implicado en el traslado de un objeto desde la superficie de la Tierra a la superficie de la Luna mediante la variación de energía potencial gravitatoria. Si, como sugiere el enunciado, despreciamos los radios de la Tierra y de la Luna frente a la distancia Tierra-Luna, tenemos:

- Energía potencial del objeto en la superficie de la Tierra debida a la Tierra:

$$E_{p\,grav\,i,T} = -G\frac{m_T\cdot m}{r_T} = -6{,}71\times10^{-11}\,\frac{5{,}98\times10^{24}\times5\times10^3}{6{,}37\times10^6} = -3{,}15\times10^{11}\ J.$$

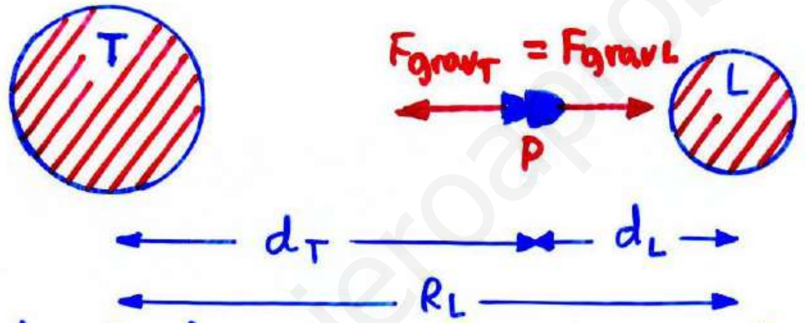
- Energía potencial del objeto en la superficie de la Tierra debida a la Luna:

$$E_{p\,grav\,i,L} = -G\frac{m_L\cdot m}{R_L} = -6{,}71\times10^{-11}\,\frac{7{,}35\times10^{22}\times5\times10^3}{3{,}84\times10^8} = -6{,}42\times10^7\ J.$$

• Energía potencial gravitatoria del objeto en la superficie de la Tierra -inicial-:

$$E_{p\,grav,i} = E_{p\,grav\,i,T} + E_{p\,grav\,i,L} =$$
$$= -3{,}15\times10^{11} - 6{,}42\times10^{7} = -3{,}15\times10^{11}\ \text{J}.$$

En su viaje de la Tierra a la Luna el objeto pasa por un punto P, donde se equilibran las fuerzas gravitatorias ejercidas sobre él por la Tierra y por la Luna:



Igualando los módulos de ambas fuerzas gravitatorias en dicho punto P, tenemos:

$$\begin{cases} G\dfrac{m_T m}{d_T^2} = G\dfrac{m_L m}{d_L^2} \\ d_T + d_L = R_L \end{cases}$$; simplificando y sustituyendo:

$$\begin{cases} \dfrac{5{,}98\times10^{24}}{d_T^2} = \dfrac{7{,}35\times10^{22}}{d_L^2} \\ d_T + d_L = 3{,}84\times10^{8} \end{cases}$$; la solución de este sistema es:

$d_T = 3{,}46\times10^{8}\ \text{m}$

$d_L = 3{,}83\times10^{7}\ \text{m}$

Las energías potenciales del objeto, debidas a la Tierra y a la Luna, en este punto P valen, respectivamente:

- Energía potencial gravitatoria en el punto P, debida a la Tierra:

$$E_{p\,grav\,P,T} = -G\frac{m_T m}{d_T} = -6{,}71\times10^{-11}\frac{5{,}98\times10^{24}\times5\times10^{3}}{3{,}46\times10^{8}} =$$
$$= -5{,}80\times10^{9}\ J$$

- Energía potencial gravitatoria en el punto P, debida a la Luna:

$$E_{p\,grav\,P,L} = -G\frac{M_L m}{d_L} = -6{,}71\times10^{-11}\frac{7{,}35\times10^{22}\times5\times10^{3}}{3{,}83\times10^{7}} =$$
$$= -6{,}43\times10^{8}\ J$$

- Energía potencial gravitatoria del objeto en el punto P:

$$E_{p\,grav,P} = E_{p\,grav,P,T} + E_{p\,grav,P,L} =$$
$$= -5{,}80\times10^{9} - 6{,}43\times10^{8} = -6{,}45\times10^{9}\ J$$

Si el objeto consigue llegar al punto P, y lo traspasa, la fuerza gravitatoria lunar ya supera a la terrestre, y el objeto acelera hasta que llega a la superficie lunar con una velocidad, y, en consecuencia, con energía cinética.

El trabajo -mínimo- necesario para llevar el objeto desde la superficie terrestre a la superficie lunar es el requerido para trasladarlo hasta dicho punto P, y vale la diferencia de energías potenciales totales:

$$W = -\Delta E_{p\,grav} = E_{p\,grav,i} - E_{p\,grav,P} =$$
$$= -3{,}15\times10^{11} - (-6{,}45\times10^{9}) = -3{,}09\times10^{11}\ J$$

El signo negativo indica que hemos de realizar este trabajo contra el campo gravitatorio: al objeto hay que suministrarle una energía adicional de: $3{,}09\times10^{11}$ J para que llegue al punto P y, tras ello, a la superficie lunar.

RESULTADO

Por último, la relación entre los módulos de las fuerzas gravitatorias ejercidas por la Tierra y la Luna sobre un satélite artificial situado a distancia: $\frac{R_L}{4}$ de la Tierra - y, por tanto, a: $\frac{3R_L}{4}$ de la Luna - vale:

$$\frac{F_T}{F_L} = \frac{G\frac{m_T m}{\left(\frac{R_L}{4}\right)^2}}{G\frac{m_L m}{\left(\frac{3R_L}{4}\right)^2}} = 9\frac{m_T}{m_L} = 9\,\frac{5{,}98\times10^{24}}{7{,}35\times10^{22}} = 732{,}24 : \text{RESULTADO}$$