

**Examen de Matemáticas II – 2º de Bachillerato**

1. Dada la función $f(x) = \frac{e^x}{x-1}$, se pide:
- [0,5 puntos]** Halla su asíntota vertical, y la tendencia de la función hacia la izquierda y derecha de esta.
 - [0,5 puntos]** Calcular $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x-1}$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x-1}$. ¿Tiene asíntotas horizontales?
 - [1,5 puntos]** Calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los puntos de la función donde se alcance un máximo o un mínimo.
 - [0,5 puntos]** Con los datos anteriores realizar una representación gráfica aproximada de la función.
2. **[1,5 puntos]** Calcula la siguiente integral indefinida: $\int \frac{x^2+1}{x^3-4x^2+5x-2} dx$.
3. Dadas las funciones $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = 1 - x$:
- [1 punto]** Dibujar el recinto limitado por las gráficas de ambas funciones.
 - [1 punto]** Calcular el área de dicho recinto.
4. **[2 puntos]** Discutir, según los valores de $m \in \mathbb{R}$, el sistema
$$\begin{cases} 3x + my + z = m - 2 \\ x + y + 2z = 0 \\ mx + y - z = m - 2 \end{cases}$$
 y resolverlo, si es posible, para $m = -1$.
5. **[1,5 puntos]** Dada la recta $r \equiv \begin{cases} y + z + 1 = 0 \\ x - y + 2 = 0 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv x = 2$, calcular la ecuación de una recta s que pase por el origen de coordenadas, sea perpendicular a r y paralela al plano π .



Soluciones

1. Dada la función $f(x) = \frac{e^x}{x-1}$, se pide:

a) **[0,5 puntos]** Halla su asíntota vertical, y la tendencia de la función hacia la izquierda y derecha de esta.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x}{x-1} = \left[\frac{1}{0} \right] = \begin{cases} -\infty & \text{si } x \rightarrow 1^- \\ +\infty & \text{si } x \rightarrow 1^+ \end{cases} \Rightarrow x=1 \text{ es una asíntota vertical.}$$

b) **[0,5 puntos]** Calcular $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x-1}$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x-1}$. ¿Tiene asíntotas horizontales?

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x-1} = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{x-1} = \frac{e^{-\infty}}{-\infty} = \frac{0}{-\infty} = 0.$$

De lo anterior se deduce que la función tiene una asíntota horizontal en $y=0$ (eje X).

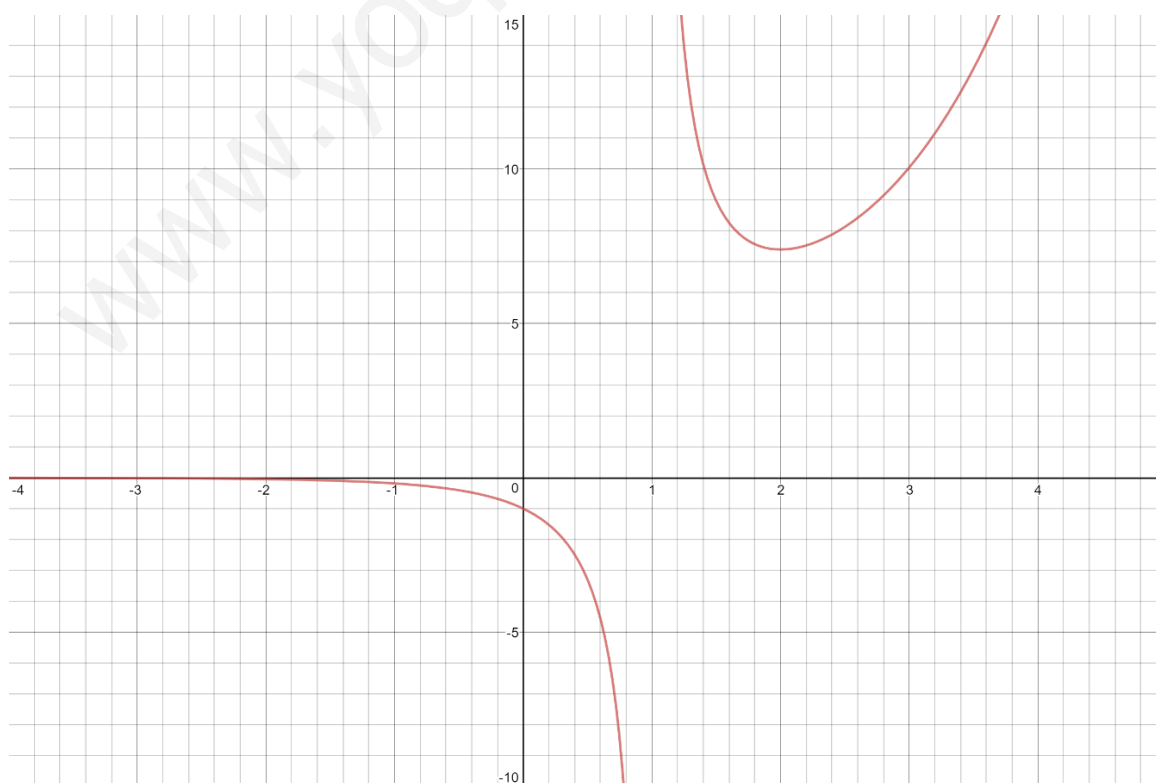
c) **[1,5 puntos]** Calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los puntos de la función donde se alcance un máximo o un mínimo.

$$f'(x) = \frac{e^x(x-1) - e^x}{(x-1)^2} = \frac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}. \text{ Entonces } f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x-2 = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

	$(-\infty, 1)$	$(1, 2)$	$(2, +\infty)$
Signo f'	-	-	+
Monotonía	Decreciente	Decreciente	Creciente

Por tanto f es decreciente en $(-\infty, 1) \cup (1, 2)$ y creciente en $(2, +\infty)$. Además, f alcanza un mínimo en el punto de abscisa $x=2$. Como $f(2) = \frac{e^2}{2-1} = e^2$, el mínimo es el punto $(2, e^2)$.

d) **[0,5 puntos]** Con los datos anteriores realizar una representación gráfica aproximada de la función.





2. **[1,5 puntos]** Calcula la siguiente integral indefinida: $\int \frac{x^2+1}{x^3-4x^2+5x-2} dx$.

$x^3-4x^2+5x-2=(x-1)^2(x-2)$. Entonces:

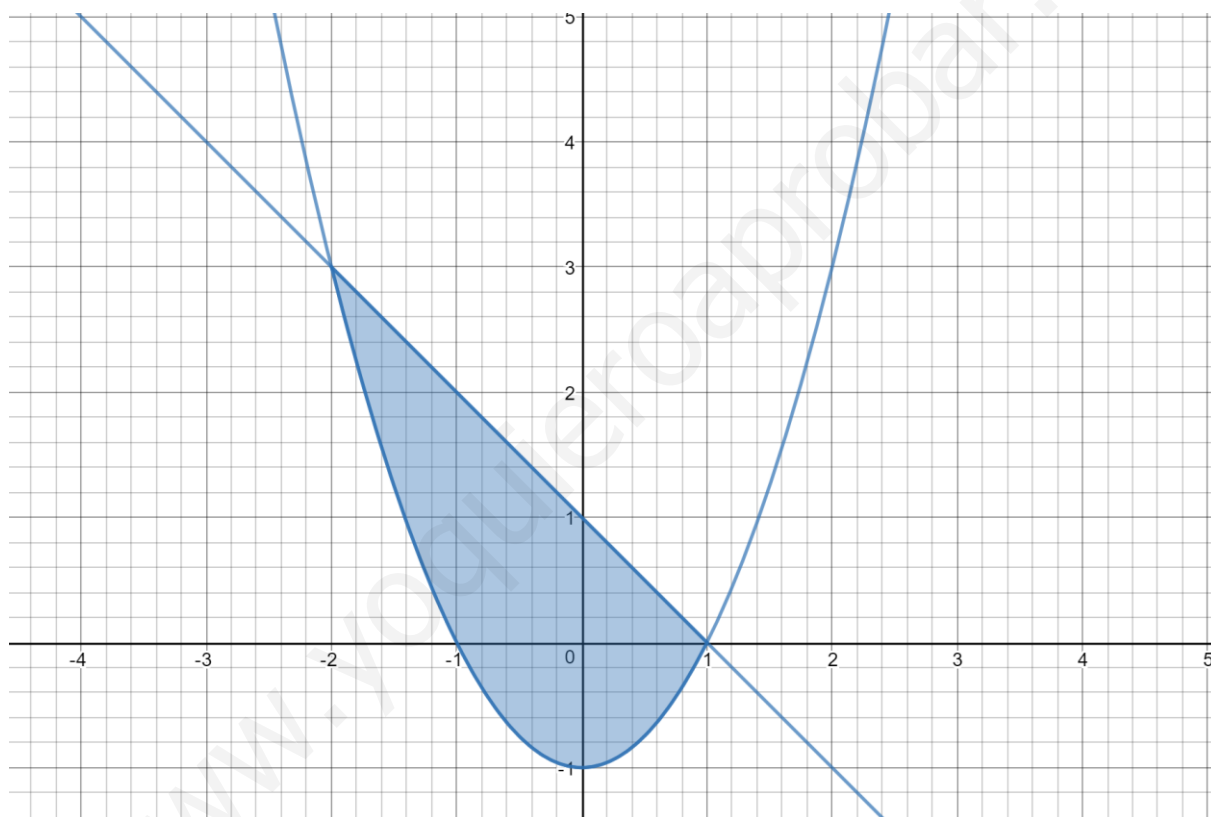
$$\frac{x^2+1}{x^3-4x^2+5x-2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-2} = \frac{A(x-1)(x-2)+B(x-2)+C(x-1)^2}{(x-1)^2(x-2)}.$$
 Hallemos A, B y C:

Si $x=1$, $-B=2 \Rightarrow B=-2$. Si $x=2$, $C=5$. Si $x=0$, $2A+4+5=1 \Rightarrow 2A=-8 \Rightarrow A=-4$. Por tanto:

$$\int \frac{x^2+1}{x^3-4x^2+5x-2} dx = \int \frac{-4}{x-1} dx + \int \frac{-2}{(x-1)^2} dx + \int \frac{5}{x-2} dx = -4\ln(x-1) + \frac{2}{x-1} + 5\ln(x-2) + C.$$

3. Dadas las funciones $f(x)=x^2-1$ y $g(x)=1-x$:

a) **[1 punto]** Dibujar el recinto limitado por las gráficas de ambas funciones.



b) **[1 punto]** Calcular el área de dicho recinto.

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^1 \left((1-x) - (x^2-1) \right) dx = \int_{-2}^1 (-x^2 - x + 2) dx = \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-2}^1 = \\ &= \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 \right) - \left(\frac{8}{3} - 2 - 4 \right) = \frac{-2-3+12}{6} - \frac{8-6-12}{3} = \frac{7}{6} + \frac{10}{3} = \frac{7}{6} + \frac{20}{6} = \frac{27}{6} \text{ uds}^2 \end{aligned}$$



4. [2 puntos] Discutir, según los valores de $m \in \mathbb{R}$, el sistema
$$\begin{cases} 3x + my + z = m - 2 \\ x + y + 2z = 0 \\ mx + y - z = m - 2 \end{cases}$$
 y resolverlo, si es posible, para $m = -1$.

La matriz de los coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 3 & m & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ m & 1 & -1 \end{pmatrix}$. $|A| = (-3 + 2m^2 + 1) - (m - m + 6) = 2m^2 - 8$. Por tanto

$$|A| = 0 \Leftrightarrow 2m^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 \\ m = 2 \end{cases}. \text{ Podemos distinguir pues tres casos.}$$

Si $m \neq -2$ y $m \neq 2$ tenemos que $r(A) = r(A|b) = 3 = n$, y el sistema es compatible determinado.

Si $m = -2$, $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, cuyo rango es claramente 2. Además $A|b = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & -4 \end{pmatrix}$, cuyo

rango es 3 porque $\begin{vmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = (-12 - 4) - (8 + 16) = -16 - 24 = -40 \neq 0$. Por tanto, si $m = -2$ el

sistema es incompatible (carece de soluciones).

Si $m = 2$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, cuyo rango también es claramente 2. Además $A|b = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, cuyo

rango es también dos pues añadir una columna de ceros no aumenta el rango de una matriz. Por tanto, si $m = 2$ el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones). Si eliminamos la última ecuación y

llamamos $z = \lambda$, el sistema queda del siguiente modo $\begin{cases} 3x + 2y = -\lambda \\ x + y = -2\lambda \end{cases}$. Multiplicando la segunda

ecuación por -2 y sumando: $x = 3\lambda$. Sustituyendo en la última ecuación $3\lambda + y = -2\lambda \Rightarrow y = -5\lambda$. Así, las infinitas soluciones son $(x, y, z) = (3\lambda, -5\lambda, \lambda)$.

5. [1,5 puntos] Dada la recta $r \equiv \begin{cases} y + z + 1 = 0 \\ x - y + 2 = 0 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv x = 2$, calcular la ecuación de una recta s que pase por el origen de coordenadas, sea perpendicular a r y paralela al plano π .

Es fácil deducir que las ecuaciones paramétricas de r son $r \equiv \begin{cases} x = -2 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 - \lambda \end{cases}$. Por tanto un vector director

suyo será $\vec{v} = (1, 1, -1)$. Como r y s han de ser perpendiculares, este vector será perpendicular a s . Un vector perpendicular al plano π es $\vec{u} = (1, 0, 0)$. Como s y π han de ser paralelos, el vector $\vec{u}$ también será perpendicular a la recta s . Por tanto un vector director de r será el producto vectorial de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} j & k \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -j - k = (0, -1, -1) \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = -\lambda \\ z = -\lambda \end{cases}.$$