

Potencia de una matriz

1. Hallar A^n para

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{b) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Calculamos algunas potencias de A :

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Por inducción: } A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}$$

b) Calculamos algunas potencias de A :

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$A^3 = A^2A = IA = A$$

$$A^4 = A^2A^2 = I \cdot I = I$$

$$\text{Por inducción: } A^n = \begin{cases} A & \text{si } n \text{ es impar} \\ I & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

2. Calcula A^n , para $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Por inducción: } A^n = A \cdot \underbrace{\dots}_{n \text{ veces}} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2n & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Demostremos la última igualdad de forma rigurosa:

Para $n = 1$ es cierta.

Hipótesis de inducción: la suponemos cierta para n , es decir, $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2n & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Lo demostramos para $n+1$:

$$A^{n+1} = A^n A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2n & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2n+2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2(n+1) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Calcula A^n , para $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^3 A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

A la vista de los cálculos anteriores, podemos reescribir las potencias como sigue:

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 2^{2-1} & 0 & 2^{2-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{2-1} & 0 & 2^{2-1} \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 2^{3-1} & 0 & 2^{3-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{3-1} & 0 & 2^{3-1} \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 A = \begin{pmatrix} 2^{4-1} & 0 & 2^{4-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{4-1} & 0 & 2^{4-1} \end{pmatrix}$$

$$\text{Por inducción: } A^n = A \cdot \underbrace{\dots}_{n \text{ veces}} \cdot A = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

4. Hallar A^n , $n \in \mathbb{N}$, para:

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^5 = A^4 A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Por inducción:

$$A^n = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{si } n = \text{par} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & \text{si } n = \text{impar} \end{cases}$$

$$\text{b) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1/5 & 1/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos algunas potencias:

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & 1/5 & 1/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/5 & 1/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2/5 & 2/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 1 & 2/5 & 2/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/5 & 1/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3/5 & 3/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 A = \begin{pmatrix} 1 & 3/5 & 3/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/5 & 1/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4/5 & 4/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por inducción:

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n/5 & n/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Calculamos algunas potencias:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 81 \end{pmatrix}$$

Por inducción:

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

$$\text{d) } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{cases} A & \text{si } n = \text{impar} \\ I & \text{si } n = \text{par} \end{cases}$$