# 13 El movimiento armónico

## ACTIVIDADES

**1. Calcula el período y la frecuencia del movimiento circular uniforme de una rueda que gira a razón 160 vueltas en 3 minutos.**

La velocidad angular de la rueda es: $\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{(160 \text{ vueltas})(2\pi \text{ rad vuelta}^{-1})}{(180 \text{ s})} = 1{,}8\pi \text{ rad s}^{-1}$

Su período es: $T = \frac{2\pi \text{ rad}}{\omega} = 1{,}1 \text{ s}$ y su frecuencia: $\nu = \frac{1}{T} = 0{,}91 \text{ Hz}$

**2. Un diapasón para afinar instrumentos de música vibra con una frecuencia de 440 Hz (correspondiente a la nota musical La). Determina el tiempo que tarda en realizar una vibración completa.**

El tiempo en realizar una vibración completa es su período:

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{1}{440 \text{ Hz}} = 2{,}3 \cdot 10^{-3} \text{ s}$$

**3. Calcula cuánto se estira un muelle cuya constante elástica tienen un valor *k* = 25 N m$^{-1}$, cuando se cuelga del muelle una masa de 4,5 kg.**

El muelle se comporta conforme a la ley de Hooke: $F = -k\,x$

La masa de 4,5 kg aplica una fuerza igual a su peso; siendo la gravedad 9,8 ms$^{-2}$: $F = m\,g = 44$ N

Por tanto: $(44 \text{ N}) = (25 \text{ N m}^{-1}) \cdot x \Rightarrow x = 1{,}8 \text{ m}$

**4. Si el anterior muelle con la masa colgada adquiere un *mas* calcula su frecuencia angular. ¿Dependerá dicha frecuencia de la amplitud de la oscilación?**

En un *mas* la frecuencia angular es: $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 2{,}4 \text{ rad s}^{-1}$

No, ya que como se ve en la ecuación superior la velocidad angular depende de la constante de elasticidad y de la masa; pero no de la amplitud.

**5. La frecuencia de un *mas* es 2,0 Hz y su amplitud es 0,10 m. Establece su ecuación en función del seno y del coseno sabiendo que en el instante inicial (*t* = 0 s) el móvil se encuentra en *x* = –0,10 m.**

La ecuación en función del coseno es: $x = A\,\text{sen}\,(\omega t + \phi_0) = 0{,}10 \cos(2\pi \cdot 2{,}0t + \phi_0)$

La fase inicial, $\phi_0$, se determina con las condiciones iniciales: si $t = 0$ s $\Rightarrow x = -0{,}10$ m, por tanto:

$$-0{,}10 = 0{,}10 \cos\phi_0 \Rightarrow \phi_0 = \pi \text{ rad}$$

Lo que nos lleva a la siguiente ecuación:

$$x = 0{,}10 \cos(0{,}4\pi t + \pi)$$

Dado que el seno y el coseno están desfasados $\frac{\pi}{2}$, la expresión en función del primero supone sumar dicha cantidad a la fase inicial: $x = 0{,}10\,\text{sen}\left(0{,}4\pi t + \frac{3\pi}{2}\right)$

**6. La ecuación de un *mas* es $x = 3\cos(5\pi t - \pi)$. Calcula la frecuencia del movimiento y escribe la ecuación en función del seno.**

La frecuencia es: $\nu = \dfrac{\omega}{2\pi} = \dfrac{(5\pi \text{ rad s}^{-1})}{(2\pi \text{ rad})} = 2{,}5$ Hz y la ecuación es $x = 3\,\text{sen}\left(5\pi t - \pi + \dfrac{\pi}{2}\right) = 3\,\text{sen}\left(5\pi t - \dfrac{\pi}{2}\right)$

**7. Una barca es alcanzada por las olas y efectúa un *mas* de 0,20 m de amplitud. Si el tiempo en realizar una vibración completa es 3,0 s, determina:**

**a) La velocidad máxima que adquiere la barca.**

**b) Su velocidad cuando se encuentra en *x* = 0,15 m.**

**a)** La velocidad máxima de un *mas* es: $v_{\text{máx.}} = A\,\omega = (0{,}20 \text{ s})\left(\dfrac{2\pi \text{ rad}}{3{,}0\ s}\right) = 0{,}42 \text{ m s}^{-1}$

**b)** La velocidad en función de la posición es: $v = \omega\sqrt{A^2 - x^2} = \dfrac{2\pi}{3{,}0}\sqrt{0{,}2^2 - 0{,}15^2} = 0{,}28 \text{ m s}^{-1}$

**8. Un móvil con un *mas* posee una aceleración máxima de $6\pi^2$ m s$^{-2}$ y una velocidad máxima de $3\pi$ m s$^{-1}$. Determina:**

**a) Su frecuencia angular.**

**b) Su amplitud.**

**a)** Las expresiones de la velocidad máxima y la aceleración máxima de un *mas* son:

$$\left.\begin{aligned} v_{\text{máx.}} &= A\omega \\ a_{\text{máx.}} &= A\omega^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \omega = \frac{a_{\text{máx.}}}{v_{\text{máx.}}} = \frac{6\pi^2}{3\pi} = 2\pi \text{ rad s}^{-1}$$

**b)** Sustituyendo en la primera ecuación y despejando la amplitud; se obtiene un valor para esta de 1,5 m.

**9. Indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas:**

**a) La aceleración es negativa y decrece en valor absoluto cuando el móvil va desde *x* = –*A* a *x* = 0.**

**b) La velocidad es positiva y decrece cuando el móvil va desde *x* = 0 hasta *x* = +*A*.**

**c) Cuando *x* = 0, *a* = 0 y *v* = 0.**

**a)** Falso, si *x* < 0 entonces *a* > 0.

**b)** Verdadero, el móvil va hacia la derecha y frenando.

**c)** Falso; la velocidad es nula si $x = \pm A$.

**10 Un niño se monta de un salto en el caballito de un parque, que está apoyado sobre un muelle, y efectúa 30 oscilaciones en un minuto, de 20 cm de recorrido cada una, con un *mas*.**

**Establece la ecuación de su movimiento sabiendo que en el instante inicial, el muelle se encuentra completamente estirado.**

La amplitud del movimiento es 10 cm = 0,1 m. Su frecuencia es:

$$\nu = \frac{(30 \text{ oscilaciones})}{(60 \text{ s})} = 0{,}5 \text{ Hz} \Rightarrow \omega = 2\pi\nu = \pi \text{ rad s}^{-1}$$

La ecuación en función del coseno es: $x = A\cos(\omega t + \phi_0) = 0{,}10\cos(\pi t + \phi_0)$

Para calcular la fase inicial, $\phi_0$, se tienen en cuenta las condiciones iniciales:

Si *t* = 0, el muelle está completamente estirado, luego *x* = +*A* = 0,10 m, por tanto: $0{,}10 = 0{,}10\cos\phi_0 \Rightarrow \phi_0 = \pi$ rad

La ecuación del movimiento es: $x = 0{,}10\cos(\pi t + \pi)$

**11 En el ejercicio anterior, calcula:**

**a) La posición y la velocidad del niño al cabo de 0,2 s.**

**b) La máxima velocidad que adquiere el niño.**

**c) La aceleración del niño cuando su velocidad es nula y cuando su velocidad es máxima.**

**a)** Sustituyendo el tiempo por 0,2 s en la ecuación: $x = 0{,}10\cos(\pi t + \pi)$, se obtiene un valor de $x$ = –0,081 m.

Derivando la ecuación de la posición respecto del tiempo, se obtiene la de la velocidad:

$$v = \frac{dx}{dt} = -0{,}10\pi\,\text{sen}(\pi t + \pi)$$

Si $t$ = 0,2 s; $v$ = 0,18 m s$^{-1}$

**b)** $v_{\text{máx.}} = A\omega = (0{,}10\text{ m})(\pi\text{ rad s}^{-1}) = 0{,}1\pi\text{ m s}^{-1}$

**c)** Si la velocidad es máxima, la aceleración es nula y si la velocidad es nula la aceleración es máxima:

$$a_{\text{máx.}} = A\omega^2 = 0{,}99\text{ m s}^{-2}$$

**12 Razona como varia el período de un oscilador armónico si su masa se duplica.**

Como $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$, si la masa se duplica, el período queda multiplicado por $\sqrt{2}$.

**13 ¿Cuál es la constante elástica de un oscilador armónico de 25 kg de masa y 3,5 s de período?**

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow k = \frac{4\pi^2 m}{T^2} = 81\text{ N m}^{-1}$$

**14 Indica cómo variará el período de un oscilador armónico si se mide en el planeta Marte, con una aceleración de la gravedad de 3,7 m s$^{-2}$. ¿Cuál será el período de un péndulo de 1,0 m de longitud?**

El período del oscilador no depende de la gravedad, luego sería el mismo. Para el péndulo, $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = 3{,}3\text{ s}$

**15 Explica cómo se podría medir la aceleración de la gravedad de un lugar utilizando un péndulo. ¿Cómo se podría saber la longitud de un péndulo sin medirla?**

Basta con medir el período y la longitud, ya que $g = \frac{4\pi^2 L}{T^2}$.

Así mismo, conociendo $g$ y $T$, se muede calcular la longitud: $L = \frac{gT^2}{4\pi^2}$

**16 Determina la energía cinética y la energía potencial en la posición $x$ = 0,06 m, de un oscilador armónico de 6,5 kg de masa, y 0,15 m de amplitud si su período de oscilación es de 2 s.**

La energía cinética del oscilador se puede expresar como: $E_c = \frac{1}{2}m\omega^2(A^2 - x^2) = 0{,}61\text{ J}$

La energía potencial del oscilador se puede expresar como: $E_p = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = 0{,}12\text{ J}$

**17 Un oscilador armónico está formado por un muelle de constante elástica $k$ = 1,40 · 10$^4$ N m$^{-1}$ y una masa de 5,00 kg. Calcula.**

**a) El trabajo empleado en comprimir el muelle 5,00 cm.**

**b) Si se suelta el muelle calcula su energía mecánica.**

**a)** El trabajo realizado sobre el muelle, le transfiere una energía que se almacena como energía potencial:

$$W = \Delta E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}\cdot 1{,}40\cdot 10^4\cdot(5{,}00\cdot 10^{-2})^2 = 17{,}5\text{ J}$$

**b)** La energía mecánica es constante: $E_M = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2} \cdot 1{,}40 \cdot 10^4 \cdot \left(5{,}00 \cdot 10^{-2}\right)^2 = 17{,}5$ J

**18 La energía mecánica de un oscilador armónico es de 0,020 J y la fuerza máxima que actúa es de 3,0 N. Escribe la ecuación del movimiento sabiendo que el período de vibración es de 0,50 s y que en *t* = 0 s se encuentra en su máxima elongación positiva.**

La ecuación es del tipo $x = A\cos\left(\omega t + \phi_0\right)$.

De las expresiones $E_M = \frac{1}{2}k\,A^2$ y $F_{max.} = k$, se deduce: $\left.\begin{matrix} 0{,}5 \cdot kA = 0{,}020 \\ kA = 3{,}0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow A = 0{,}013$ m

La ecuación es $x = 0{,}013\cos\left(\frac{2\pi}{0{,}50}t + \phi_0\right)$ y como en $t$ = 0, $x$ = 0,013 m, entonces $\phi_0 = 0$ rad ; ya que está en la máxima elongación positiva. La ecuación es: $x = 0{,}013\cos\left(4\pi t\right)$.

## Cinemática del movimiento armónico simple

**19 Razona sobre la veracidad o falsedad de estas afirmaciones.**

**a) Todos los movimientos oscilatorios son vibratorios.**

**b) Todos los movimientos vibratorios son oscilatorios.**

**c) Todos los movimientos armónicos simples son periódicos.**

**d) Todos los movimientos periódicos son armónicos simples.**

**a)** Falso, un objeto puede oscilar a ambos lados de la posición de equilibrio, pero su aceleración puede no ser proporcional a la posición.

**b)** Verdadero, todos los *mas* son oscilatorios alrededor de una posición de equilibrio.

**c)** Verdadero, el ser periódico es una de las características del *mas*.

**d)** Falso, por ejemplo, un movimiento circular es periódico pero no es un *mas*.

**20 Las gomas elásticas se alargan cuando se les aplica una fuerza, pero ese alargamiento no cumple la ley de Hooke. Razona si el movimiento producido al colgar un objeto de una goma elástica y separarlo ligeramente de su posición de equilibrio, es un movimiento armónico simple. En cualquier caso califica el movimiento producido.**

Las gomas elásticas no cumplen la ley de Hooke, es decir, $F \neq kx$, luego $a \neq \text{cte} \cdot x$ y el movimiento producido no es armónico simple. En cualquier caso, el movimiento producido es vibratorio.

**21 El extremo de la biela de una máquina describe un movimiento armónico simple horizontal entre los puntos *x* = – 2,0 m y *x* = 2,0 m y tarda 0,50 s en recorrer la distancia entre ambos puntos. Sabiendo que en *t* = 0 s la partícula se encuentra en *x* = 0 y se dirige hacia la derecha.**

**a) Escribe la ecuación de su posición en función del seno y del coseno.**

**b) Escribe la ecuación de su velocidad en función del seno y en función del coseno.**

**c) Escribe la ecuación de su aceleración en función del seno y en función del coseno.**

**a)** Construimos una solución del tipo $x = A\,\text{sen}\left(\omega t + \phi_0\right)$. En este caso $T = 1\text{ s} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{1} = 2\pi\text{ rad s}^{-1}$

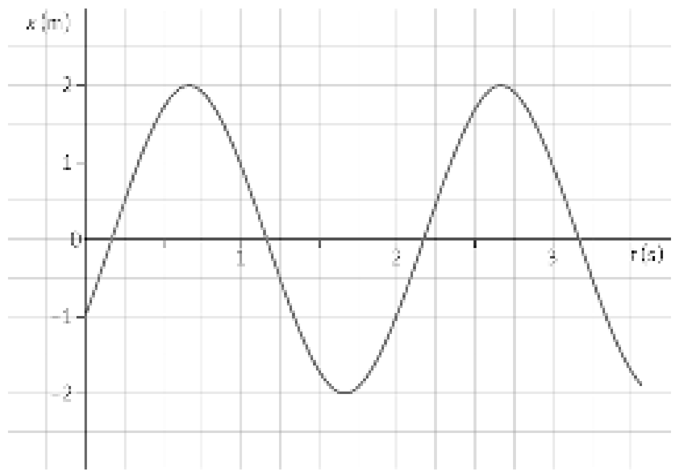
La ecuación es $x = 2\,\text{sen}\left(2\pi t + \phi_0\right)$. Como en $t$ = 0, $x$ = 0 ; lo que da dos valores del ángulo: 0 y π rad.
Al dirigirse hacia la derecha, la velocidad es positiva, por lo que el $\phi_0$ es 0. La ecuación se expresa como:

$$x = 2\,\text{sen}\left(2\pi t\right) \text{ y como } x = 2\cos\left(2\pi t - \frac{\pi}{2}\right)$$

**a)** $v = \frac{dx}{dt} = 4\pi\cos 2\pi t \qquad v = -4\pi\,\text{sen}\left(2\pi t - \frac{\pi}{2}\right)$

**b)** $a = \frac{dv}{dt} = -8\pi^2\,\text{sen}\,2\pi t \qquad a = -8\pi^2\cos\left(2\pi t - \frac{\pi}{2}\right)$

**22 La gráfica de la figura representa la elongación de un movimiento armónico simple en función del tiempo.**




**a) Deduce de la gráfica el valor de la amplitud y la pulsación del movimiento.**

**b) Escribe la ecuación del movimiento en función del seno y en función del coseno.**

**a)** La amplitud es 2 m y el período del movimiento es 2 s luego:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi \text{ rad s}^{-1}$$

**b)** La ecuación será $x = 2\,\text{sen}(\pi t + \phi_0)$. Como en $t$ = 0 s, $x$ = –1 m, se cumple que:

$$-1 = 2\,\text{sen}\,\phi_0 \Rightarrow \phi_0 = \begin{cases} 7\pi/6 \\ 11\pi/6 \end{cases}$$

como su velocidad es positiva se elige $\frac{11\pi}{6}$ rad. Luego la ecuación es:

$$x = 2\,\text{sen}\left(\pi t + \frac{11\pi}{6}\right) \text{ o también } x = 2\cos\left(\pi t + \frac{11\pi}{6} - \frac{\pi}{2}\right) = 2\cos\left(\pi t + \frac{8\pi}{6}\right) = 2\cos\left(\pi t + \frac{4\pi}{3}\right)$$

**23 La biela de un sistema biela-manivela oscila en torno al origen de coordenadas en la dirección del eje *X*, según la expresión $x = 2\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{2}\right)$, donde *x* está expresado en cm y *t* en s. Determina:**

**a) El período de oscilación de la biela.**

**b) La expresión de su velocidad de oscilación en función del tiempo y el valor de dicha velocidad en *t* = 20 s.**

**a)** $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{0{,}25\pi} = 8 \text{ s}$

**b)** $v = \frac{dx}{dt} = 0{,}25\pi \cdot 2\cos\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow v = 0{,}50\pi\cos\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{2}\right)$; en $t$ = 20 s, v = 0 m s$^{-1}$.

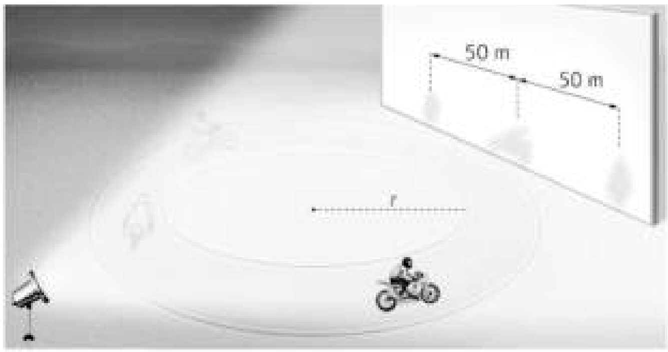
**24 La membrana del tímpano de una persona vibra con un *mas* cuando recibe un sonido. Calcula su período de vibración cuando recibe sonidos en los extremos de las frecuencias audibles: 20 Hz y 20000 Hz.**

Como $T = \frac{1}{\nu}$, los períodos pedidos son:

$$T_1 = \frac{1}{20} = 0{,}05 \text{ s} \;\; \text{y} \;\; T_2 = \frac{1}{20000\text{ s}^{-1}} = 5 \cdot 10^{-5} \text{ s}$$

**25** **Una motocicleta describe un movimiento circular uniforme en una pista de pruebas circular de 50,0 m de radio, situada en un plano horizontal, con una velocidad constante de 12,0 m s$^{-1}$.**

**Un potente foco lateral ilumina al motorista, de forma que su sombra describe un *mas* sobre un muro tangente con el velódromo.**




**Establece la ecuación del *mas* de la sombra en función del coseno, considerando una fase inicial nula.**

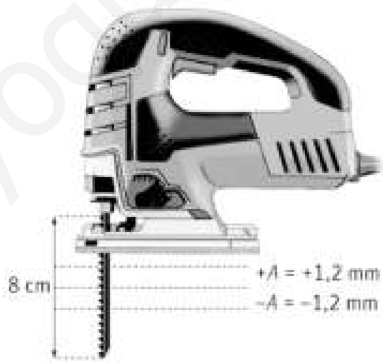
El *mas* aparece al proyectar el movimiento circular sobre uno de sus diámetros u otro eje paralelo a estos. En el caso que nos ocupa, $v$ = 12,0 m s$^{-1}$ luego la velocidad angular del movimiento circular es:

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{\left(12{,}0\ \text{m s}^{-1}\right)}{\left(50{,}0\ \text{m}\right)} = 0{,}24\ \text{rad s}^{-1}$$

La velocidad angular del movimiento circular uniforme coincide con la del *mas* que hay que describir:

$$x = 50{,}0\,\text{sen}\,0{,}24t \Rightarrow x = 50{,}0\cos\left(0{,}24t + \frac{\pi}{2}\right)$$

**26** **La hoja de una sierra de calar mide 8,0 cm de longitud, y realiza un movimiento armónico simple en dirección vertical (eje *Y*), con un periodo de 0,20 s y una amplitud de 12 mm. Se toma como origen de coordenada el centro de oscilación del punto central de la hoja de sierra, y se consideran positivas las posiciones que quedan más arriba que el origen de coordenadas y se mueve hacia arriba. En *t* = 0 s, la sierra comienza a moverse hacia arriba.**




**a)** **Escribe la ecuación del movimiento del punto central de la hoja de sierra.**

**b)** **Escribe la ecuación del movimiento del punto superior de la hoja de sierra.**

**c)** **Calcula el tiempo que tarda el punto central de la hoja en moverse desde el origen hasta un punto cuya posición es y = 6,0 mm.**

**d)** **Calcula el tiempo que tarda el punto central de la hoja en moverse desde y = 6,0 mm hasta y = 12 mm.**

**a)** La ecuación será del tipo $y = A\,\text{sen}(\omega t + \phi_0)$, con A = 0,012 m y $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0{,}20} = 10\pi\ \text{rad s}^{-1}$ luego:

$y = 0{,}012\,\text{sen}(10\pi t + \phi_0)$. En $t$ = 0, $y$ = 0, luego $\text{sen}\phi_0 = 0 \Rightarrow \phi_0 = \begin{cases} 0\ \text{rad} \\ \pi\ \text{rad} \end{cases}$

Como la hoja va hacia arriba, $v$ > 0 y se elige $\phi_0 = 0$. La ecuación es, por lo tanto, $y = 0{,}012\,\text{sen}\,10\pi t$

**b)** El movimiento es solidario con el punto central (ambos llegan al punto superior y al punto inferior a la vez, solo que estos están desplazados 4 cm hacia arriba, por tanto:

$$y = 0{,}04 + 0{,}012\,\text{sen}\,10\pi t$$

**c)** Como en $t = 0$, el punto central de la hoja está en $y = 0$, si $y = 0{,}0060$ m:

$$0{,}0060 = 0{,}012\,\text{sen}\,10\pi t \Rightarrow 10\pi t = \text{arc sen}\frac{0{,}0060}{0{,}012} = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t = \frac{1}{60}\ \text{s}$$

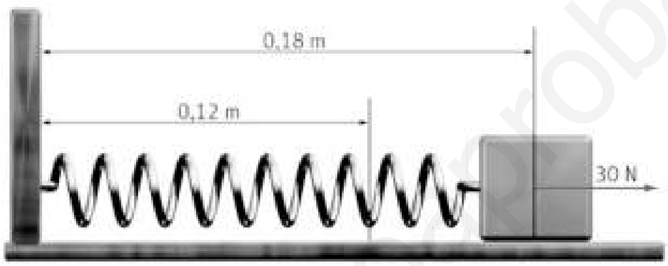
**d)** El punto central tarda en moverse hasta $y = 12$ mm un tiempo:

$$0{,}012 = 0{,}012\,\text{sen}\,10\pi t \Rightarrow 10\pi t = \text{arc sen}\frac{0{,}012}{0{,}012} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{1}{20}\ \text{s}$$

Luego, desde $y = 6{,}0$ mm hasta $y = 0{,}12$ mm ha tardado $t = \frac{1}{30}$ s .

## Dinámica del movimiento armónico simple

**27 Un muelle de 12,0 cm de longitud, de masa despreciable, tiene uno de sus extremos fijo en la pared vertical mientras que otro está unido a una masa que descansa en una superficie horizontal sin rozamiento.**




**Si recibe una fuerza de 30,0 N, se estira hasta una longitud de 18,0 cm. En esta posición se suelta para que oscile libremente con una frecuencia angular de $\pi$ rad s$^{-1}$. Calcula**

**a) La constante recuperadora del resorte.**

**b) La masa que oscila.**

**c) La ecuación del *mas* resultante.**

**a)** Conforme a la ley de Hooke:

$$F = k\Delta x;\ 30{,}0 = k(18{,}0 - 12{,}0) \Rightarrow k = \frac{(30{,}0\ \text{N})}{(6{,}0\ \text{cm})} = 5{,}0\ \text{N}\,\text{cm}^{-1} = 5{,}0 \cdot 10^2\ \text{N}\,\text{m}^{-1}$$

**b)** $m = \dfrac{k}{\omega^2} = \dfrac{(5{,}0 \cdot 10^2\ \text{N}\,\text{m}^{-1})}{(\pi\ \text{s})^2} = 50{,}7\ \text{kg}$

**c)** Es del tipo $x = A\,\text{sen}(\omega t + \phi_0)$ por tanto: $x = 0{,}18\,\text{sen}(\pi t + \phi_0)$.

Se cumple que en $t = 0$, $x = 0{,}18$ m:

$$0{,}18 = 0{,}18\,\text{sen}\,\phi_0 \Rightarrow \phi_0 = \frac{\pi}{2}\ \text{rad}$$

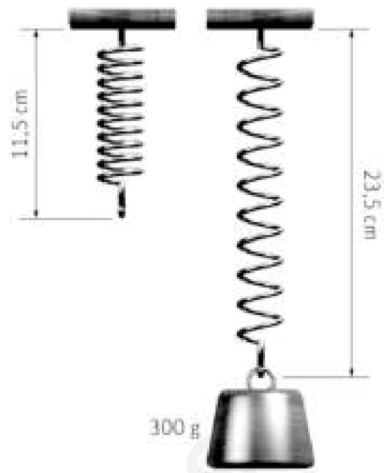
La ecuación completa es: $x = 0{,}18\,\text{sen}\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$

**28 Un muelle de masa despreciable, suspendido de su extremo superior, mide 11,5 cm. Al colgar una masa de 300 g en el extremo libre, el muelle se estira hasta una posición de equilibrio en la cual su nueva longitud es de 23,5 cm.**

**a) Calcula la constante elástica del muelle a partir de la deformación descrita.**

**b) Empujamos la masa 5,0 cm hacia arriba comprimiendo el muelle, y la soltamos. Medimos 10 oscilaciones en 7,0 s. Determina la expresión para la posición de la masa en función del tiempo.**

**c) Calcula de nuevo la constante del muelle a partir del valor del período de oscilación.**




**a)** Ahora la fuerza aplicada al muelle es el peso del objeto colgado:

$$F = k\Delta x;\ (0{,}3\ \text{kg})(9{,}8\ \text{m s}^{-2}) = k(23{,}5 - 11{,}5)\,\text{cm}$$

$$k = \frac{(2{,}9\ \text{N})}{(12{,}0\ \text{cm})} = 0{,}245\ \text{N cm}^{-1} = 24{,}2\ \text{N m}^{-1}$$

**b)** La frecuencia del *mas* producido es $\nu = \dfrac{(10\ \text{osc.})}{(7{,}0\ \text{s})} = 1{,}4\ \text{Hz}$ luego la frecuencia angular es: $\omega = 2\pi\nu = 2{,}8\pi\ \text{s}^{-1}$

La ecuación del movimiento es del tipo $y = A\,\text{sen}(\omega t + \phi_0)$ es decir: $y = 0{,}050\,\text{sen}(2{,}8\pi t + \phi_0)$

En $t$ = 0, $y$ = +0,050 m luego $\text{sen}\,\phi_0 = 1 \Rightarrow \phi_0 = \dfrac{\pi}{2}$ rad, por tanto, la ecuación es $y = 0{,}050\,\text{sen}(2{,}8\pi t + \pi/2)$

**c)** $k = \dfrac{4\pi^2 m}{T^2} = \dfrac{4\pi^2 \cdot (0{,}30\ \text{kg})}{(0{,}7\ \text{s})^2} = 24{,}2\ \text{N m}^{-1}$

**29. Un péndulo simple tiene un período de oscilación de 455 ms en un punto donde la aceleración de la gravedad vale 9,81 m s$^{-2}$.**

**a) Determina la longitud del péndulo.**

**b) ¿Cuál debería ser la nueva longitud del péndulo para que oscile con el doble de frecuencia?**

**a)** Como $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}} \Rightarrow L = \dfrac{gT^2}{4\pi^2} = \dfrac{(9{,}81\ \text{m s}^{-2})(0{,}455\ \text{s})^2}{4\pi^2} = 5{,}14\cdot 10^{-2}\ \text{m} = 5{,}14\ \text{cm}$.

**b)** Si la frecuencia de duplica, el período de hace la mitad. Con este período, la longitud del péndulo es:

$$L' = \frac{gT'^2}{4\pi^2} = \frac{g\left(\frac{T}{2}\right)^2}{4\pi^2} = \frac{L}{4} = 1{,}29\cdot 10^{-2}\ \text{m} = 1{,}29\ \text{cm}$$

**30. Un columpio realiza oscilaciones pequeñas con una frecuencia de 0,25 Hz:**

**a) Considerando que se puede asimilar a un péndulo simple y que existe una aceleración de la gravedad de 9,8 m s$^{-2}$, determina la longitud del columpio.**

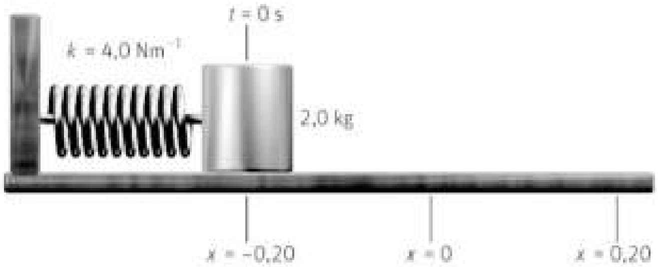
**b) Indica cuál sería su nueva frecuencia de oscilación en Marte, con una aceleración de la gravedad de 3,7 m s$^{-2}$.**

**a)** Dado que $\nu = 0{,}25\ \text{Hz} \Rightarrow T = \dfrac{1}{\nu} = 4{,}0\ \text{s}$. La longitud del péndulo se relaciona con el período:

$$L = \frac{gT^2}{4\pi^2} = \frac{(9{,}8\ \text{m s}^{-2})(4{,}0\ \text{s})^2}{4\pi^2} = 4{,}0\ \text{m}$$

**b)** En Marte, el péndulo oscilaría con una frecuencia $\nu = \dfrac{1}{T} = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{g}{L}} = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{(3{,}7\ \text{m s}^{-2})}{(4{,}0\ \text{m})}} = 0{,}15\ \text{Hz}$

**31. Un oscilador armónico consta de una masa de 2,0 kg sujeta al extremo de un muelle y situada sobre una mesa horizontal sin rozamiento. La constante del muelle es $k$ = 4,0 N m$^{-1}$ y el oscilador se separa de la posición de equilibrio un máximo de 0,20 m. En el instante $t$ = 0 s el oscilador se encuentra en la posición $x$ = –0,20 m.**

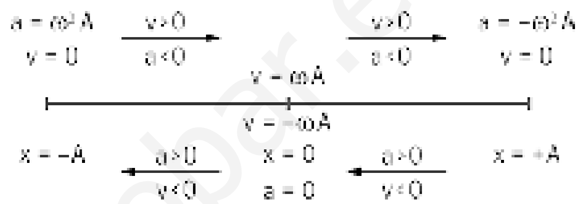



**a) Indica el signo de su velocidad y su aceleración en los distintos tramos del movimiento.**

**b) Determina la ecuación del movimiento del oscilador en función del seno y del coseno.**

**c) Calcula su velocidad y su aceleración cuando su posición es $x$ = 0 m.**

a) En la posición de equilibrio (punto central), la aceleración es nula y la velocidad máxima. Lo contrario sucede en los extremos ( $x = \pm A$ ); aquí, la aceleración es máxima y la velocidad nula. Por otro lado, como se ve en el esquema inferior, al moverse hacia la derecha se cumple que $v < 0$ y $a > 0$ , mientras que al hacerlo hacia la izquierda, $v > 0$ y $a < 0$ .




b) La ecuación del movimiento es del tipo $x = A\,\text{sen}(\omega t + \phi_0)$. En este caso, $A$ = 0,20 m y la pulsación es:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{(4{,}0\ \text{Nm}^{-1})}{(2{,}0\ \text{kg})}} = \sqrt{2}\ \text{rad}\,\text{s}^{-1}$$

En la ecuación $x = 0{,}020\ \text{sen}\left(\sqrt{2}t + \phi_0\right)$, si $t$ = 0, $x$ = –0,20 m, luego, $\text{sen}\phi_0 = -1 \Rightarrow \phi_0 = -\frac{\pi}{2}$ rad .

La ecuación es: $x = 0{,}20\ \text{sen}\left(\sqrt{2}t - \frac{\pi}{2}\right)$ o $y = 0{,}20\ \cos(\sqrt{2}t - \pi)$

c) En $x$ = 0 m la velocidad es la máxima: $v = \pm\omega A = 0{,}20 \cdot \sqrt{2} = \pm 0{,}28\ \text{m}\,\text{s}^{-1}$ y $a$ = 0 m s$^{-2}$.

**32. Determina la ecuación de un *mas* sabiendo que corresponde a un oscilador armónico de 2 kg de masa, sujeto al extremo de un muelle de constante $k$ = 2 N m$^{-1}$ y situado sobre una mesa horizontal sin rozamiento. La masa se ha separado 0,20 m de la posición de equilibrio y se ha soltado. Se ha empezado a contar el tiempo cuando el oscilador se encuentra en la posición $x$ = 0,10 m y se mueve hacia la derecha.**

Para una solución del tipo $y = A\ \cos(\omega t + \phi_0)$, en este caso, $A$ = 0,20 m y $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{(2\,\text{Nm}^{-1})}{(2\ \text{kg})}} = 1\ \text{s}^{-1}$

Por lo tanto, $x = 0{,}20\ \cos(t + \phi_0)$

En $t$ = 0 s, $x$ = 0,10 m, luego $\cos\phi_0 = 0{,}5 \Rightarrow \phi_0 = \begin{cases} \frac{\pi}{3}\ \text{rad} \\ -\frac{\pi}{3}\ \text{rad} \end{cases}$

Como el oscilador se dirige a la derecha, su velocidad inicial es positiva, y para ello, $\phi_0 = -\frac{\pi}{3}$ rad .

La ecuación es: $y = 0{,}20\ \cos\left(t - \frac{\pi}{3}\right)$

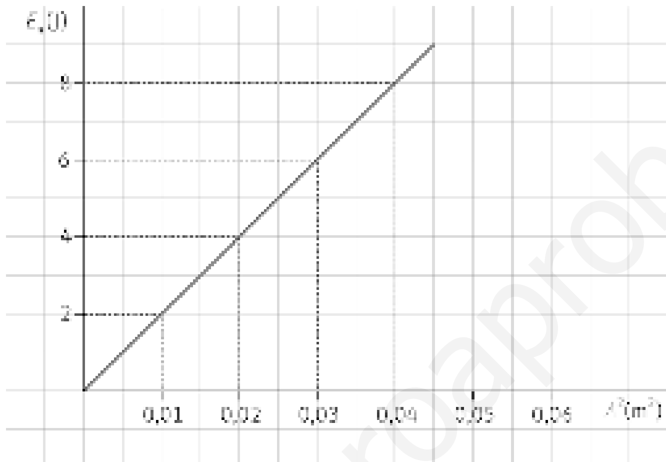
**33. Se sabe que el peso de un cuerpo depende de la gravedad del lugar, y que en caída libre no es práctico ponerse sobre una báscula (porque indicaría cero). Razona como podría medir su masa un astronauta en órbita.**

Se puede colgar al astronauta de un muelle de constante conocida y medir su período de oscilación. A continuación se calcula su masa con la expresión derivada de la fórmula del período del oscilador:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow m = \frac{kT^2}{4\pi^2}$$

## Energía del oscilador armónico

**34. Una masa de 0,500 kg unida al extremo de un muelle de masa despreciable y situada sobre una superficie horizontal sin rozamiento, describe varios movimientos armónicos. En la gráfica siguiente se relaciona el valor de la energía mecánica del muelle con el cuadrado de la amplitud de oscilación de los distintos movimientos armónicos.**




**a) Calcula el valor de la frecuencia de oscilación.**

**b) El valor de la velocidad máxima de la masa cuando la amplitud de la oscilación del movimiento es 0,1414 m.**

a) De la gráfica se obtiene la relación entre la energía mecánica y el cuadrado de la amplitud.

$$\text{pendiente} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(2\ \text{J})}{\left(0{,}01\ \text{m}^2\right)} = 200\ \text{J}\,\text{m}^{-2}$$

Con ello, la ecuación es: $E_M = 200A^2$ J. Comparando esta expresión con la de la energía mecánica del oscilador armónico:

$E_M = \frac{1}{2}m\omega^2A^2$, se deduce que $0{,}5 \cdot m\omega^2 = 200 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{400}{0{,}500}} = 28{,}3\ \text{rad}\,\text{s}^{-1}$

b) $v_{\text{máx.}} = \omega A = \left(28{,}3\ \text{rad}\,\text{s}^{-1}\right)\left(0{,}1414\ \text{m}\right) = 4{,}00\ \text{m}\,\text{s}^{-1}$

**35. Un cuerpo de masa 250 g unido a un muelle realiza un movimiento armónico simple con una frecuencia de 5,0 Hz. La energía total de este oscilador armónico es 10,0 J.**

**a) ¿Cuál es la constante elástica del muelle?**

**b) ¿Cuál es la amplitud del movimiento?**

a) La constante elástica del muelle es: $k = m\,\omega^2 = m\left(2\pi\upsilon\right)^2 = \left(0{,}25\ \text{kg}\right)\left(2\pi \cdot 5{,}0\ \text{Hz}\right)^2 = 247\ \text{N}\text{m}^{-1}$

b) De la expresión $E_M = \frac{1}{2}kA^2$ se deduce que $A = \sqrt{\frac{2E_M}{k}} = \sqrt{\frac{2 \cdot (10{,}0\ \text{J})}{(247\ \text{N}\text{m}^{-1})}} = 0{,}285\ \text{m}$

**36. Un martillo neumático de 25 kg efectúa un mas con una frecuencia de 30 Hz y una amplitud de 4 cm.**

**a) Calcula sus energías, cinética, potencial y mecánica en *x* = +2 cm.**

**b) Determina la aceleración máxima que experimentan las manos del operario y da tu opinión sobre las posibles repercusiones en su salud.**

**a)** Considerando al martillo como un oscilador armónico, la energía cinética es:

$$E_C = \frac{1}{2}m\omega^2\left(A^2 - x^2\right) = 0{,}5 \cdot 25 \cdot (2\pi \cdot 30)^2 \cdot \left(0{,}04^2 - 0{,}02^2\right) = 533 \text{ J}$$

La energía potencial es:

$$E_p = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = 0{,}5 \cdot 25 \cdot (2\pi \cdot 30)^2 \cdot 0{,}02^2 = 178 \text{ J}$$

La energía mecánica es la suma: $E_M = E_c + E_p = (533 + 178)\text{ J} = 711 \text{ J}$

**b)** $a_{\text{máx.}} = \omega^2 A = (60\pi \text{ rad s}^{-1})^2 \cdot (0{,}04 \text{ m}) = 1{,}4 \cdot 10^3 \text{ m s}^{-2}$. Una aceleración tan grande es debida a fuerzas de inercia muy grandes sobre el operario, con repercusiones negativas sobre su salud.

**37. En un movimiento armónico simple , determina los puntos de su trayectoria en los que:**

**a) Su energía cinética es cero.**

**b) Su energía potencial es cero.**

**c) Su energía cinética es igual a su energía potencial.**

**a)** La energía cinética es nula cuando la velocidad sea nula: $x = \pm A$

**b)** La energía potencial es nula cuando $x = 0$.

**c)** Si la energía cinética es igual a la potencial:

$$\frac{1}{2}m\omega^2\left(A^2 - x^2\right) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \Rightarrow x = \pm\frac{A}{\sqrt{2}}$$

**38. Sobre un oscilador armónico de 0,50 kg actúa una fuerza máxima de 0,30 N y su energía total es 0,60 J. Determina.**

**a) La amplitud del oscilador.**

**b) El período de oscilación.**

**c) Sus energías cinética y potencial, cuando el oscilador se encuentra en x = 2,0 m.**

**a)** La expresiones de la fuerza máxima y la energía total forman un sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} F_{\text{máx.}} &= kA \\ E_M &= \frac{1}{2}kA^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow A = \frac{2E_M}{F_{\text{máx.}}} = \frac{2 \cdot (0{,}60 \text{ J})}{(0{,}30 \text{ N})} = 4{,}0 \text{ m}$$

**b)** La constante es:

$$k = \frac{F_{\text{máx.}}}{A} = \frac{(0{,}30 \text{ N})}{(4{,}0 \text{ m})} = 0{,}075 \text{ Nm}^{-1}$$

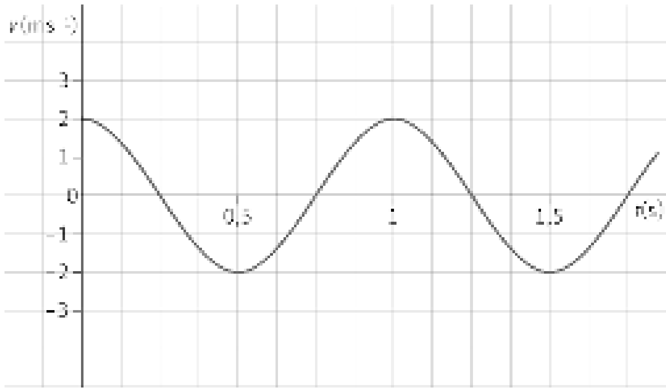
El período es:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{(0{,}50 \text{ kg})}{(0{,}075 \text{ Nm}^{-1})}} = 16 \text{ s}$$

**c)** La energía potencial es: $E_p = \frac{1}{2}kx^2 = 0{,}5 \cdot (0{,}075 \text{ Nm}^{-1}) \cdot (2{,}0 \text{ m})^2 = 0{,}15 \text{ J}$ y la cinética es:

$$E_c = E_M - E_p = (0{,}60 - 0{,}15)\text{ J} = 0{,}45 \text{ J}$$

**39. Un cuerpo de masa *m* = 0,10 kg oscila armónicamente a lo largo del eje *X*. En la figura se representa su velocidad en función del tiempo.**



**a) Determina y representa gráficamente la posición (elongación) de la partícula en función del tiempo.**

**b) Calcula las energías cinética y potencial de la partícula en el instante *t* = 0,050 s.**

**c) ¿Qué energías cinética y potencial, posee la partícula en la posición *x* = 0, 020 m?**

**a)** La gráfica de la velocidad tiene el mismo período que la gráfica de la posición: $T$ = 1 s. Además, la velocidad máxima es 2 m s$^{-1}$, por tanto:

$$v_{\text{máx.}} = \omega A \Rightarrow A = \frac{v_{\text{máx.}}}{\omega} = \frac{(2\text{ m s}^{-1})}{(2\pi\text{ rad s}^{-1})} = 0,32\text{ m}$$

Por tanto, la ecuación de la posición es:

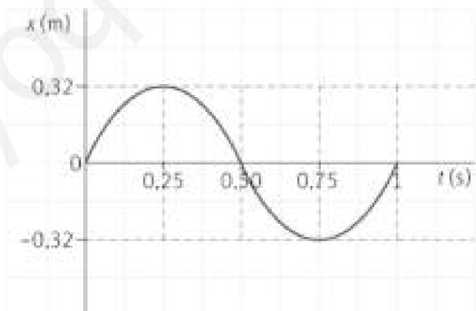
$$x = A\,\text{sen}(\omega t + \phi_0) = 0,32\,\text{sen}(2\pi t + \phi_0)$$

En el instante inicial, $t$ = 0, el cuerpo está en $x$ = 0 (punto de velocidad máxima) y se dirige hacia la derecha (velocidad positiva y disminuyendo), por tanto:

$sen\,\phi_0 = 0 \Rightarrow \phi_0 = \begin{cases} 0\text{ rad} \\ \pi\text{ rad} \end{cases}$. Como la velocidad inicial es positiva, $\phi_0 = 0$ y la ecuación queda $x = 0,32\,\text{sen}\,2\pi t$

Para hacer la representación gráfica se dan valores en la ecuación:

| ***t*(s)** | 0 | 0,25 | 0,5 | 0,75 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| ***x*(m)** | 0 | 0,32 | 0 | –0,32 | 0 |



**b)** En $t$ = 0,05 s la posición es $x$ = 0,1 m, y las energías del oscilador son:

$$E_C = \frac{1}{2}m\omega^2\left(A^2 - x^2\right) = 0,5 \cdot 0,10 \cdot (2\pi)^2\left(0,32^2 – 0,10^2\right) = 0,18\text{ J}$$

$$E_P = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = 0,5 \cdot 0,10 \cdot (2\pi)^2 \cdot 0,10^2 = 0,02\text{ J}$$

**c)** $$E_C = \frac{1}{2}m\omega^2\left(A^2 - x^2\right) = 0,5 \cdot 0,10 \cdot (2\pi)^2\left(0,32^2 – 0,20^2\right) = 0,12\text{ J}$$

$$E_P = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = 0,5 \cdot 0,10 \cdot (2\pi)^2 \cdot 0,20^2 = 0,079\text{ J}$$

**40. Actividad smSaviadigital.com RESUELVE**

## La física y… la amortiguación de los vehículos

1. **Describe el comportamiento de los amortiguadores delanteros de una motocicleta cuando esta frena con una trayectoria rectilínea.**

   La inercia de la moto comprime el muelle. El amortiguador impide que la moto realice un *mas* peligroso para la estabilidad.

2. **¿Qué sucede en un vehículo cuando los amortiguadores pierden eficacia al cabo del tiempo? ¿Cómo lo nota el conductor?**

   El muelle sigue actuando pero el amortiguador pierde eficacia. La carrocería balancea demasiado.

3. **Existen amortiguadores que, en lugar de aceites, contienen gas en su interior. Explica cómo es posible que el gas genere fuerzas al igual que otros fluidos más viscosos**

   Además de gas, el amortiguador también lleva un fluido viscoso. El gas a presión complementa la acción del fluido.

4. **Señala algunos otros usos de los amortiguadores al margen de la automoción.**

   Hoy en día, llevan amortiguadores, los barcos para mejorar el confort de los pasajeros, e incluso los edificios, para prevenir el riesgo sísmico.

## Autoevaluación

1. **El movimiento de un objeto colgado de una goma elástica que se ha separado de su posición de equilibrio es:**

   **a) Armónico simple.**

   **b) No periódico.**

   **c) Vibratorio.**

   **d) No oscilatorio.**

   La respuesta correcta es la c.

2. **Para un *mas* cuya pulsación es $\pi\,s^{-1}$:**

   **a) La aceleración vale siempre $\pi^2$ m s$^{-2}$**

   **b) La velocidad vale siempre $\pi$ m s$^{-1}$**

   **c) La aceleración vale $\pi^2 A$ en x = –*A***

   **d) La velocidad vale $\pi$ en *x* = –*A*.**

   La respuesta correcta es la c

3. **Si la masa de un oscilador armónico se duplica:**

   **a) Su período se duplica.**

   **b) Su período no cambia.**

   **c) Su período se multiplica por $\sqrt{2}$ .**

   **d) Su período se divide por $\sqrt{2}$ .**

   La respuesta correcta es la c.

4. **El péndulo simple:**

   **a) Describe un *mas* siempre.**

   **b) Describe un *mas* solo para oscilaciones grandes.**

   **c) Tiene un período que no depende de su longitud.**

   **d) Se mueve en un plano.**

   La respuesta correcta es la d.

5. **En un oscilador armónico:**

   **a) La energía mecánica no depende de la amplitud.**

   **b) El período no depende de la amplitud.**

   **c) La energía cinética no depende de la posición.**

   **d) La energía potencial no depende de la posición.**

   La respuesta correcta es la b.

6. **En un oscilador armónico:**

   **a) La energía mecánica es nula en *x* = 0.**

   **b) La energía potencial es nula en *x* = 0.**

   **c) La energía cinética es nula en *x* = 0.**

   **d) La pulsación es nula en *x* = 0.**

   La respuesta correcta es la b.