EVALUACIÓN DE BACHILLERATO
PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU)
FASE GENERAL
CURSO 2019–2020 JUNIO

Distrito Universitario de Canarias

MATERIA: MATEMÁTICAS II	(3)
Convocatoria:	

Instrucciones:
- Configure su examen con cuatro preguntas seleccionadas libremente de los grupos A o B.
- En caso de presentar más de cuatro preguntas, sólo se corregirán las cuatro primeras.
- En el desarrollo de cada pregunta, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarla. Se califica todo el proceso.
- Se puede utilizar cualquier calculadora científica no programable ni con conexión a Internet.

SE PROPONE UNA SOLUCIÓN CORRECTA. OTRAS SOLUCIONES CORRECTAS TAMBIÉN SE ACEPTAN

GRUPO A

1. Consideremos la función $f(x) = \frac{lnx}{x^2}$, donde ln denota el logaritmo neperiano. Resuelva justificadamente los siguientes apartados:
   a. Presente el dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los posibles extremos relativos de la función $f(x)$.
   b. Calcule el valor de la integral: $\int_1^e f(x)\,dx$

Solución

a) La función $f(x) = \frac{lnx}{x^2}$, tiene problemas en el denominador, cuando x=0 y el lnx, cuando x≤0, por tanto, Dom f = (0, ∞)

Derivada de la función: $f'(x) = \frac{\frac{1}{x}x^2 - lnx.2x}{x^4} = \frac{x-2xlnx}{x^4} = \frac{1-2lnx}{x^3}$

Igualando a cero para buscar los posibles extremos, y dado que x>0:

$$1 - 2lnx = 0 \to 1 = 2lnx \to lnx = 1/2 \to x = e^{1/2}$$

Comprobamos los signos de la derivada:

x<$e^{1/2}$	x>$e^{1/2}$	
+	-	Signo f’
Crece	Decrece	Interpretación f

Crece: $(0, e^{\frac{1}{2}})$

Decrece: $(e^{\frac{1}{2}}, \infty)$

Hay un máximo en x=$e^{\frac{1}{2}}$ $y = \frac{lne^{1/2}}{(e^{1/2})^2} = \frac{1/2}{e} = \frac{1}{2e}$

$$Máximo\ (e^{\frac{1}{2}}, \frac{1}{2e})$$

Otra forma

Para determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento también se podría hbaer hallado la segunda derivada, indicando en cualquier caso los intervalos de crecimiento y decrecimiento:

$$f''(x) = \frac{\frac{-2}{x}\cdot x^3 - 3x^2(1-2lnx)}{x^6} = \frac{-5x^2+6x^2\cdot lnx}{x^6} \to f''\left(e^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{-5e+3e}{e^3} = \frac{-2}{e^2} < 0 \to Máximo\ (e^{\frac{1}{2}}, \frac{1}{2e})$$

Crece: $(0, e^{\frac{1}{2}})$

Decrece: $(e^{\frac{1}{2}}, \infty)$

$b)\ \int_1^e \frac{\ln x}{x^2}\,dx$

Se calculará la integral indefina por partes:

Llamamos $\begin{cases} u = \ln x \Longrightarrow du = \frac{1}{x}dx \\ dv = \frac{dx}{x^2} \Longrightarrow v = \int \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x} \end{cases}$

Luego, aplicando la fórmula de integración por partes, $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v du$
y sustituyendo en ella obtenemos:

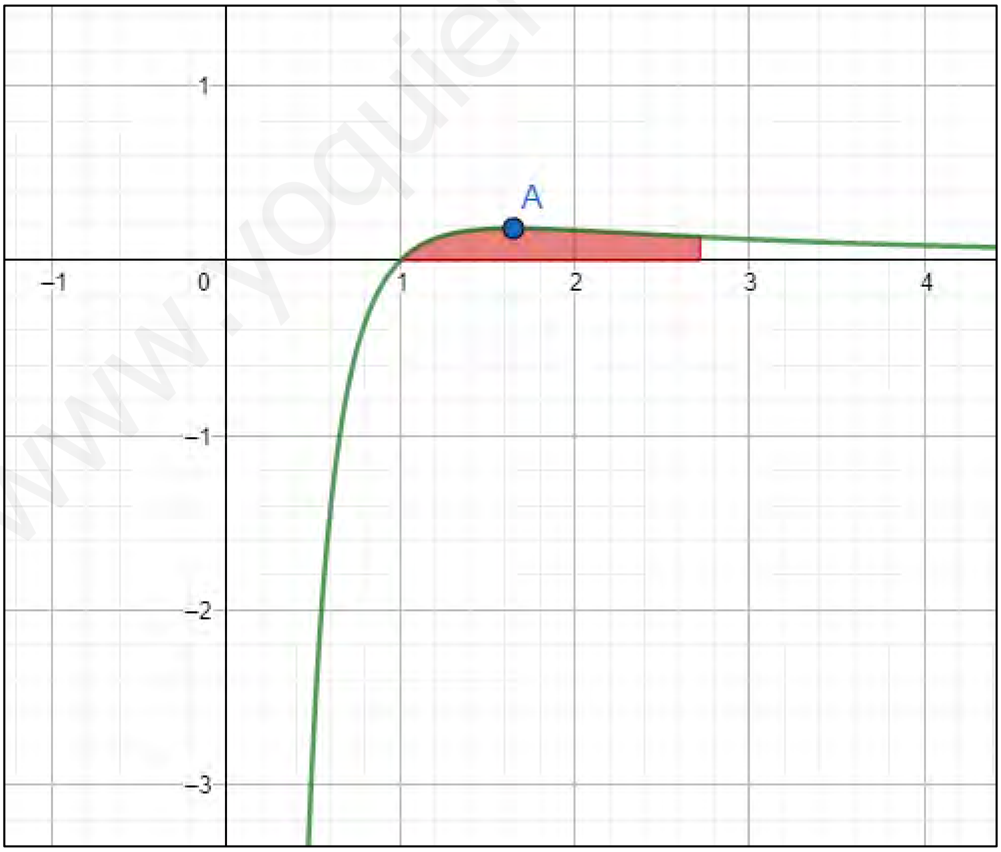
$$\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx = -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C$$

Entonces aplicando teorema fundamental del cálculo: $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

En nuestro caso, los límites de integración tenemos:

$\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}\,dx = \left[-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}\right]_1^e = -\frac{1}{e} - \frac{1}{e} + 1 = \frac{e-2}{e} = 0.264$

Representación de función, punto máximo recinto de área (no solicitados):



2. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} k & 0 & 1 \\ 1 & k-1 & k-1 \\ k & 1 & k-3 \end{pmatrix}$

   a. Halla los valores del parámetro k para los que la matriz A tiene inversa.
   b. Tomando el valor $k = -1$ en la matriz A, calcule la matriz X que verifica que: $A \cdot X = 24 \cdot I_3$, siendo I_3 la identidad de orden 3

Solución

a. $|A| = \begin{vmatrix} k & 0 & 1 \\ 0 & k-1 & k-1 \\ k & 1 & k-3 \end{vmatrix} = k(k-1)(k-3) - k(k-1) - k(k-1)$

$$k(k-1)[k-3-1-1] = k(k-1)(k-5)$$

Para que tenga inversa tiene que ocurrir que k no tome los valores 0, 1 o 5.

b.
$A \cdot X = 24 \cdot I_3 \rightarrow X = 24 \cdot A^{-1} \cdot I_3 = 24 \cdot A^{-1}$
Por tanto, debemos buscar la matriz inversa de A
Sustituimos el valor de k por -1:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

Por lo realizado en el ejercicio anterior, para $k = -1$, existe la matriz inversa de A, y además:

$$|A| = k(k-1)(k-5) = (-1)(-2)(-6) = -12$$

Si no ha resuelto el apartado anterior, puede resolver el determinante de A, cuando k=-1, y obtiene 12. Calculemos A^{-1}:

$$\left.\begin{array}{l} A_{11} = \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 10; \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = 2; \; A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \\ A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = 5; \; A_{23} = -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \\ A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = 2; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2; \; A_{33} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 2 \end{array}\right\} \Longrightarrow Adj(A)$$

$$= \begin{pmatrix} 10 & 2 & -2 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Luego:$\left(Adj(A)\right)^t = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Entonces:$X = 24 \cdot A^{-1} = 24 \cdot \frac{1}{|A|} \cdot \left(Adj(A)\right)^t = 24 \cdot \frac{1}{-12} \begin{pmatrix} 10 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = -2 \cdot \begin{pmatrix} 10 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$X = \begin{pmatrix} -20 & -2 & -4 \\ -4 & -10 & 4 \\ 4 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

3. Dadas las rectas siguientes $r: \begin{cases} x+y-z=4 \\ x+2y=7 \end{cases}$, $s: \begin{cases} x=2 \\ y+5=0 \end{cases}$

   a. Estudiar la posición relativa de r y s.
   b. Halle la ecuación del plano perpendicular a la recta r, y que contiene el punto $A\ (11,-2,5)$

Solución

a.

Punto de la recta *r*, para *y* = 0 ; P (7,0,3)

Vector director de *r* $\quad \overrightarrow{v_r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2i - j + k \rightarrow v_r = (2,-1,1)$

Punto de la recta *s*, Q (2,-5,0)

Vector director de *s* $\quad \overrightarrow{v_s} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = k \rightarrow v_s = (0,0,1)$

Con un punto de la recta *r*, (para *y* = 0); P (7,0,3) y otro punto de la recta *s*, Q (2,-5,0), hallamos el vector $\overrightarrow{\mathrm{QP}}$=(5,5,3) y comprobamos que forman un sistema de vectores linealmente independientes,

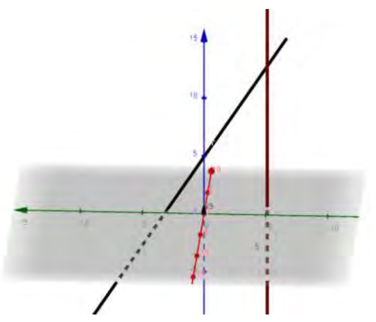
$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -15 \neq 0$ Concluimos que las rectas se cruzan

Otra forma:

$$r \cap s \equiv \begin{cases} x+y-z=4 \\ x+2y=7 \\ x=2 \\ y=-5 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A/b = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Rang (*A*) = 3 pues $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$

Rang(*A/b*)= 4 pues $|A/b| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \end{vmatrix} = -15 \neq 0$



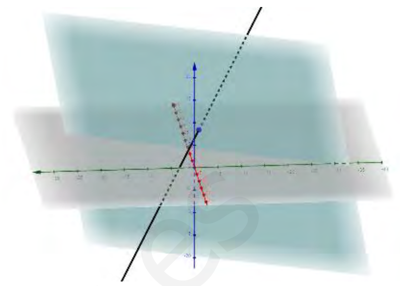
Teorema de Rouché-Frobenius:
$\mathrm{Rang}(A) = 3 \neq \mathrm{Rang}(A/b) = 4 \Rightarrow$ sistema incompatible, las rectas se cruzan.

b) Halle la ecuación del plano perpendicular a la recta *r* y que pasa por punto A (11,-2,5)

Sea el plano *π* perpendicular a la recta *r*, entonces el vector normal al plano *π* viene dado por el vector director de la recta *r*

Hallamos el vector director de la recta *r*

$$\overrightarrow{v_r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2i - j + k \rightarrow v_r = (2,-1,1)$$



Ecuación del plano *π* que pasa por el punto (11,-2,5) es,

$2x - y + z + d = 0$

$2 \cdot 11 + 2 + 5 + d = 0$

d = -29

$2x - y + z - 29 = 0$

4. El tiempo que transcurre hasta la primera avería de una unidad de cierta marca de impresoras de chorro de tinta viene dado, aproximadamente, por una distribución normal con un promedio de 1500 horas y una desviación típica de 200 horas.
    c. ¿Qué porcentaje de esas impresoras fallarán antes de 1000 horas de funcionamiento?
    d. ¿Qué porcentaje de esas impresoras tendrán la primera avería entre las 1000 y 2000 horas de uso?

Solución

Se define la variable normal *X* :"tiempo en horas hasta la primera avería de una unidad de cierta marca de impresoras de chorro de tinta"

X ~*N*(1500, 200)

a.

$$P(X < 1000) = P\left(Z < \frac{1000 - 1500}{200}\right) = P(Z < -2.5) = P(Z > 2.5) = 1 - P(z \leq 2.5)$$

$$P(X < 1000) = 1 - 0.9938 = 0.0062$$

Fallarán un 0.62% de las impresoras antes de 1000 horas de funcionamiento.

b)$P(1000 < X < 2000) = P\left(\frac{1000-1500}{200} < X < \frac{2000-1500}{200}\right) = P(-2.5 < Z < 2.5) = 0.9876$

El 98.7% de las impresoras tendrá su primera avería entre 1000 y 2000 horas.