

**MATERIA:** MATEMÁTICAS II

**(3)**

**Convocatoria:**

**Instrucciones:**

- Elija una de las opciones A o B, y conteste a las cuatro cuestiones que componen la opción elegida. Si mezcla preguntas de las dos opciones el tribunal podrá anular su examen.
- En el desarrollo de cada problema, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarlo. Se califica todo.
- Se permite la utilización de calculadora científica, no programable ni con conexión a la red.

**SE PROPONE UNA SOLUCIÓN CORRECTA  
OTRAS SOLUCIONES CORRECTAS TAMBIÉN SE ACEPTAN**

**OPCIÓN A**

1. Dada la función  $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 7$

Calcular los valores de  $a$ ,  $b$  y  $c$  sabiendo que se cumplen las condiciones siguientes:

- Dos de sus extremos relativos se encuentran en los puntos de abscisa  $x = 0$  y  $x = -2$
- La función corta el eje  $OX$  en el punto  $x = 1$

Dar la expresión de la función resultante.

**SOLUCIÓN**

- Dos de sus extremos relativos se encuentran en los puntos de abscisa  $x = 0$  y  $x = -2$

$$\rightarrow f'(0) = 0 \text{ y } f'(-2) = 0$$

Hallamos la primera derivada de la función  $f'(x) = 4x^3 + 3x^2 + 2bx + c$

Evaluamos,

$$f'(0) = c = 0$$

$$f'(-2) = -32 + 12a - 4b = 0 \rightarrow 3a - b = 8 \text{ (I)}$$

- La función corta el eje  $OX$  en el punto

$$x = 1 \rightarrow f(1) = 1 + a + b + 7 = 0 \rightarrow a + b = -8 \text{ (II)}$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones,

$$\begin{cases} 3a - b = 8 \\ a + b = -8 \end{cases} \rightarrow a = 0 \text{ y } b = -8$$

Siendo la función  $f(x) = x^4 - 8x^2 + 7$

2. Dado el sistema:

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 2 \\ 5x + 2y + 4z = -1 \\ 3x + y + k^2z = 3k \end{cases}$$

a) Discutirlo para los distintos valores del parámetro  $k$

b) Resolverlo para  $k = 2$

**SOLUCIÓN**

a) La matriz de los coeficientes y la matriz ampliada son:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & k^2 \end{pmatrix}; \quad A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & k & 3k \end{pmatrix}$$

Calculemos el determinante de  $A$  y los valores de  $a$  que lo anulan.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & k^2 \end{vmatrix} = 1 - k^2, \text{ entonces: } |A| = 0 \Rightarrow k = \pm 1$$

$$\text{Por otro lado: } \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 3k \end{vmatrix} = -3k - 3 \text{ que será } 0 \text{ para } k = -1$$

$$\text{Por otro lado el menor } \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Si  $k \neq \pm 1$ , entonces  $\text{Rang}(A) = 3 = \text{Rang}(A^*) = n^\circ$  de incógnitas = 3

Entonces, por el Teorema de Rouché-Frobenius, el sistema es compatible determinado y tiene una única solución.

Si  $k = 1$ , entonces:  $\text{Rang}(A) = 2 \neq \text{Rang}(A^*) = 3$ , entonces por el Teorema de Rouché-Frobenius, el sistema es incompatible y, por tanto, no tiene solución.

Si  $k = -1$ ,  $\text{Rang}(A) = 2 = \text{Rang}(A^*) < n^\circ$  de incógnitas,

Entonces, por el Teorema de Rouché-Frobenius, el sistema es compatible indeterminado tendrá infinitas soluciones.

b) Para  $k = 2$  tenemos el sistema

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 2 \\ 5x + 2y + 4z = -1 \\ 3x + y + 4z = 6 \end{cases}$$

Como  $|A| = 1 - a^2 = 1 - 4 = -3$ , el sistema es compatible determinado

Resolviendo por la Regla de Cramer (o cualquier otro método)

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 6 & 1 & 4 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-3}{-3} = 1; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 5 & -1 & 4 \\ 3 & 6 & 4 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{27}{-3} = -9; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-9}{-3} = 3$$

Y la solución es (1, -9, 3)

**3. Hallar la ecuación de la recta que verifica simultáneamente las siguientes condiciones:**

- es paralela a los planos de ecuaciones:  $\pi_1 \equiv x - 3y + z = 0$  y  $\pi_2 \equiv 2x - y + 3z = 5$
- pasa por el punto  $P(2, -1, 5)$

**SOLUCIÓN**

Vector normal al plano  $\pi_1$   $\vec{n}_{\pi_1} = (1, 3, -1)$

Vector normal al plano  $\pi_2$   $\vec{n}_{\pi_2} = (2, -1, 3)$

Si  $r // \pi_1$  y  $r // \pi_2 \rightarrow \vec{v}_r = \vec{n}_{\pi_1} \times \vec{n}_{\pi_2}$

$$\vec{v}_r = \vec{n}_{\pi_1} \times \vec{n}_{\pi_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -8i - j + 5k \rightarrow \vec{v}_r = (-8, -1, 5)$$

La ecuación de la recta que pasa por  $P(2, -1, 5)$  con dirección  $\vec{v}_r = (-8, -1, 5)$  es

$$r \equiv (x, y, z) = (2, -1, 5) + t(-8, -1, 5) \text{ or } \equiv \frac{x-2}{-8} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-5}{5}$$

(solo hallar una ecuación)

**4. En un supermercado se sabe que el 55% de los clientes traen su propia bolsa. El 30% de los que traen su propia bolsa son hombres y el 40% de los que no traen su propia bolsa son mujeres.**

- a) **Construir el árbol de probabilidades descrito en el enunciado.**
- b) **¿Qué proporción de clientes son mujeres?**
- c) **Si un cliente elegido al azar es hombre, ¿qué probabilidad hay de que haya traído su propia bolsa?**

**SOLUCIÓN**

Definimos los eventos

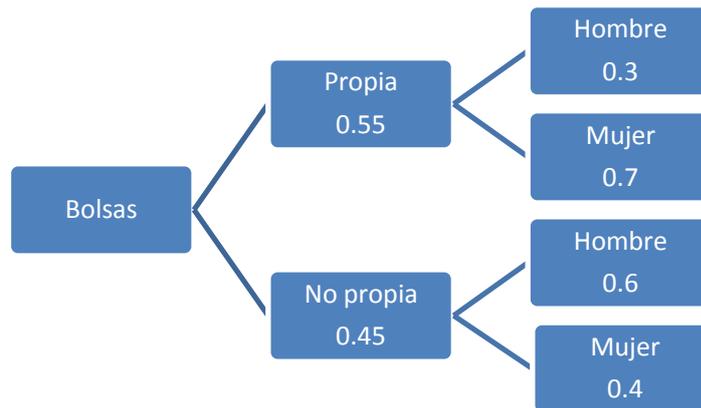
P: Que la bolsa de los clientes es propia

NP: Que la bolsa de los clientes no es propia

M: Que el cliente es mujer

H: Que el cliente es hombre

a) Construir el árbol de probabilidades descrito en el enunciado



b) ¿Qué proporción de clientes son mujeres?

Por el Teorema de la probabilidad total

$$P(M) = P(P)P(M/P) + P(NP)P(M/NP) = (0.55)(0.7) + (0.45)(0.4) = 0.565$$

El 56.5% de los clientes que entran al supermercado traigan o no su propia bolsa son mujeres.

c) Si un cliente elegido al azar es hombre, ¿qué probabilidad hay de que haya traído su propia bolsa?

Aplicando el Teorema de Bayes

$$P(P/H) = \frac{P(P)P(H/P)}{P(H)} = \frac{(0.55)(0.3)}{1 - 0.565} = 0.379$$

Existe un 38% de probabilidades de que un cliente elegido al azar, siendo hombre, haya traído su propia bolsa