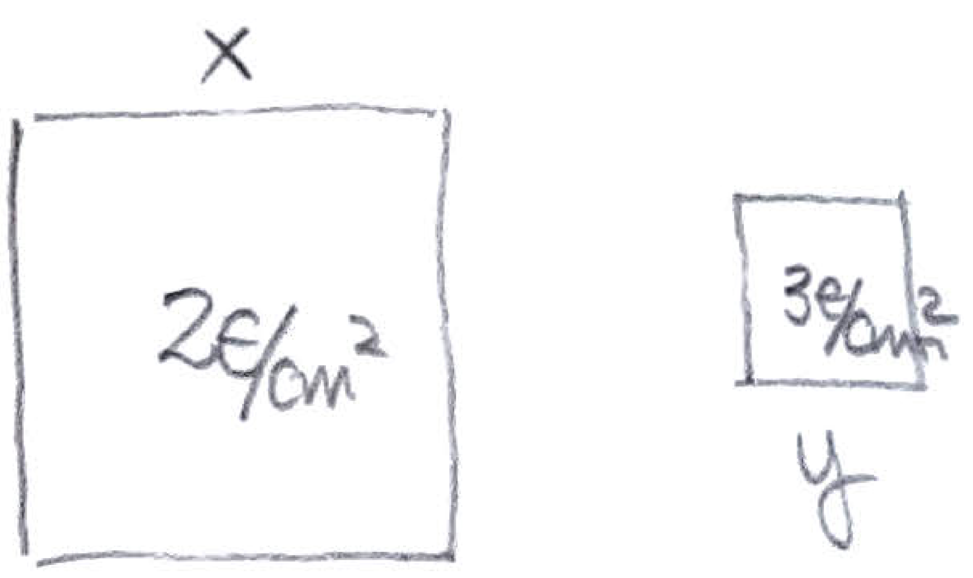
MATEMÁTICAS II (JULIO)

OPCIÓN A

1 Tenemos que hacer dos cuadrados de tela, donde cada cuadrado se hace con una tela diferente. Las dos telas tienen precios de 2 y 3 euros por centímetro cuadrado respectivamente. Como hemos de elegir los lados de los cuadrados si queremos que el coste total sea mínimo y si además nos piden que la suma de los perímetros de los dos cuadrados ha de ser 100cm (2,5 p)



COSTE TOTAL MÍNIMO

$P_1 = 4x$ $\quad P_2 = 4y \quad 100 = P_1 + P_2 \Rightarrow 4x + 4y = 100$

1° Buscamos relación entre las variables x e y

$$4x + 4y = 100 \Rightarrow y = \frac{100-4x}{4} = 25 - x \Rightarrow \underline{y = 25 - x}$$

2° Buscamos la función a optimizar

Area del cuadrado 1 : $A_{C_1} = x^2$ y cuesta $2€/cm^2 \Rightarrow P_{C_1} = 2x^2$

Area del cuadrado 2 : $A_{C_2} = y^2$ y cuesta $3€/cm^2 \Rightarrow P_{C_2} = 3y^2$

$$P = P_{C_1} + P_{C_2} = 2x^2 + 3y^2 \overset{y=25-x}{=} 2x^2 + 3(25-x)^2 = 2x^2 + 3(625 - 50x + x^2) =$$

$$= 2x^2 + 1875 - 150x + 3x^2 = 5x^2 - 150x + 1875$$

La funcion es $f(x) = 5x^2 - 150x + 1875$

3º Calculamos $f'(x)$ y obtenemos los $x \in \mathbb{R} / f'(x)=0$ estos puntos serán los extremos relativos

$f'(x) = 10x - 150$; $f'(x) = 0 \Rightarrow 10x - 150 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 15}$

$x = 15$ e $y = 25 - x = 25 - 15 = 10$ $\boxed{y = 10}$

4º Comprobamos que se trata de un mínimo viendo el signo de $f''(x)$ en $x = 15$ $f''(15)$

$f''(x) = (10x - 150)' = 10 > 0$ MÍNIMO en todo $\mathbb{R}$

$f''(15) > 0$

Obtendremos un precio mínimo con un cuadrado de la tela de 2€/cm² de lado 15cm y otro cuadrado de la otra tela de 3€/cm² de lado 10cm.

② Determinar una matriz X que verifique la ecuación $A \cdot B - CX = I$, siendo las matrices:

$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Preparamos la ecuación matricial, despejando X.

$A \cdot B - CX = I \Rightarrow -CX = I - A \cdot B \Rightarrow C \cdot X = A B - I$

$\Rightarrow C^{-1}(C \cdot X) = C^{-1}(A \cdot B - I) \Rightarrow (C^{-1} C) \cdot X = C^{-1}(A \cdot B) - C^{-1} I$

$\Rightarrow I \cdot X = C^{-1} \cdot A \cdot B - C^{-1} \cdot I \Rightarrow X = C^{-1} \cdot A \cdot B - C^{-1}$

$X = C^{-1} \cdot A \cdot B - C^{-1}$

Necesitamos calcular C^{-1} y $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $|C| = 2 \neq 0$ luego existe C^{-1}

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$\Rightarrow C^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$. Comprobamos que $C \cdot C^{-1} = I$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ok!}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 6 & 27 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -5/2 \\ 6 & -5/2+27 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & -5/2 \\ 6-\frac{1}{2} & -5/2+27-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & -5/2 \\ \frac{11}{2} & \frac{47}{2} \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -1/2 & -5/2 \\ 11/2 & 47/2 \end{pmatrix}$$

$-\frac{5}{2} + 26 = \frac{-5+52}{2}$ $\quad \begin{array}{r} 52 \\ -\ 5 \\ \hline 47 \end{array}$

3 Estudiar la posición relativa de los planos:

$\alpha: 2x+3y-5z+7=0$

$\beta: 3x+2y+3z-1=0$

$\gamma: 7x+8y-7z+13=0$

$$\begin{cases} 2x+3y-5z=-7 \\ 3x+2y+3z=1 \\ 7x+8y-7z=-13 \end{cases}$$

Veamos si las posiciones relativas agrupando los planos dos a dos:

α y β $\begin{cases} \vec{n_1}(2,3,-5) \\ \vec{n_2}(3,2,3) \end{cases}$ $\frac{2}{3} \neq \frac{3}{2} \neq \frac{-5}{3}$ No son paralelos

β y γ $\begin{cases} \vec{n_2}(3,2,3) \\ \vec{n_3}(7,8,-7) \end{cases}$ $\frac{3}{7} \neq \frac{2}{8} \neq \frac{3}{-7}$ No son paralelos

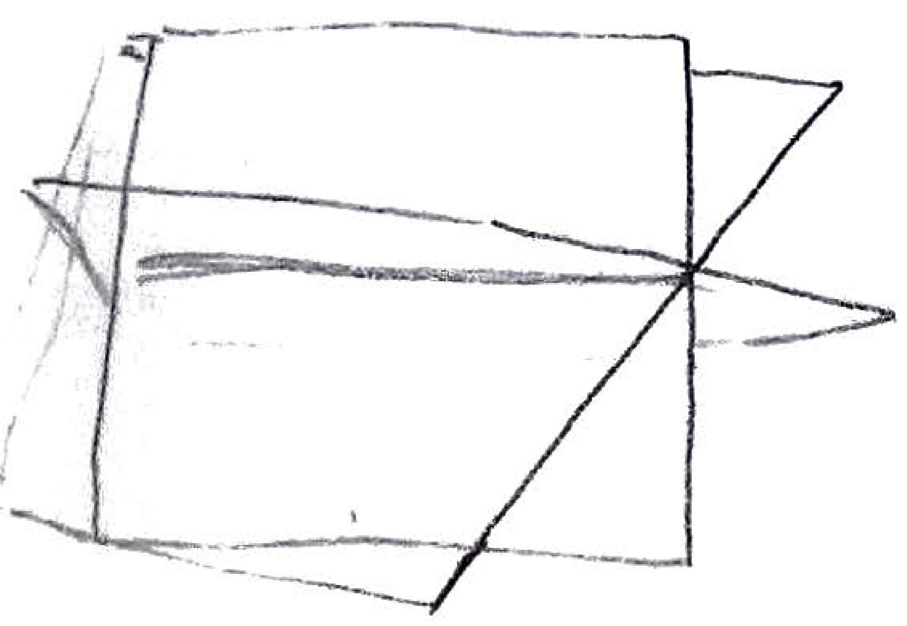
α y γ $\begin{cases} \vec{n_1}(2,3,-5) \\ \vec{n_3}(7,8,-7) \end{cases}$ $\frac{2}{7} \neq \frac{3}{8} \neq \frac{5}{7}$ No son paralelos

Estudiemos el sistema formado por sus ecuaciones

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -5 & -7 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \\ 7 & 8 & -7 & -13 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3=2\cdot F_3-7F_1]{F_2=2F_2-3F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -5 & -7 \\ 0 & -5 & 21 & 23 \\ 0 & -5 & 21 & 23 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3=F_3-F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -5 & -7 \\ 0 & -5 & 21 & 23 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

A, A^*

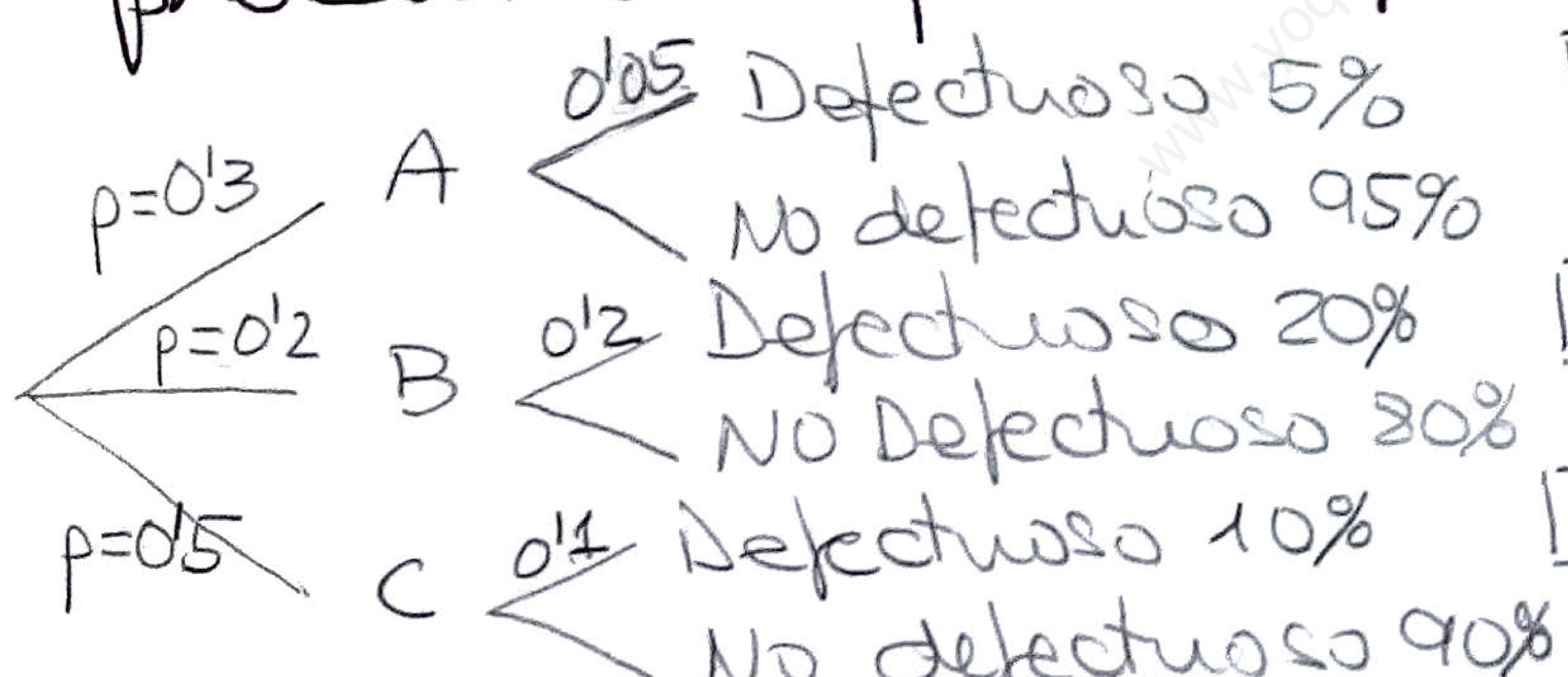
Tenemos $r(A)=r(A^*)=2$ Los tres planos se cortan en una recta.



4) Tres fábricas A, B y C producen respectivamente 30%, 20% y 50% de los motores agrícolas que se demandan en la industria. Los inspectores de calidad saben que son defectuosos el 5% de los motores producidos por la fábrica A, el 20% de los producidos por la fábrica B y el 10% de los que se fabrican en la C

a) Un inspector de calidad elige un motor al azar. ¿Cual es la probabilidad de que esté defectuoso?

b) Si el inspector comprueba que el motor agrícola que elige está defectuoso, ¿Cual es la probabilidad de que no haya sido producido por la fábrica C

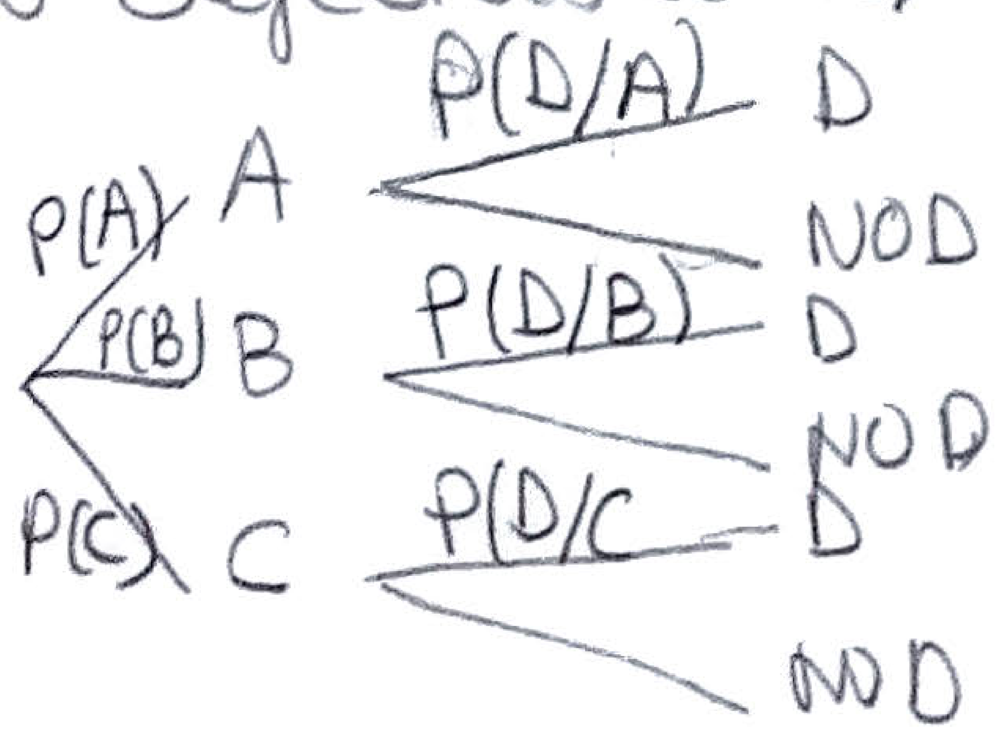


$\boxed{0'3 \cdot 0'05}$

$\boxed{0'2 \cdot 0'2}$

$\boxed{0'5 \cdot 0'1}$

Recordar



$$\boxed{P(D) = P(A) \cdot P(D/A) + P(B) \cdot P(D/B) + P(C) \cdot P(D/C)}$$

a) $P(D) = 0'3 \cdot 0'05 + 0'2 \cdot 0'2 + 0'5 \cdot 0'1 = 0'105$

0'105 es la probabilidad de que el inspector al elegir un motor al azar, este sea defectuoso.

b) La probabilidad de que no haya sido producido por la fábrica C será 1-(probabilidad de que haya sido producido por la fábrica C)

$\rightsquigarrow P(\bar{C}/D) = 1 - P(C/D)$

Por el teorema de Bayes:

$$P(C/D) = \frac{P(C) \cdot P(D/C)}{P(A) \cdot P(D/A) + P(B) \cdot P(D/B) + P(C) \cdot P(D/C)} =$$

$$= \frac{0'5 \cdot 0'1}{0'105} = 0'476$$

La probabilidad de que no haya sido producido por la fábrica C es:

$$1 - 0'476 = 0'524$$