2

BACHILLERATO

SOLUCIONARIO

Física

SERIE **INVESTIGA**

PROYECTO
SABER
HACER

SANTILLANA

PROYECTO SABER HACER

Física

SERIE **INVESTIGA**

SOLUCIONARIO

El Solucionario Física 2, del proyecto Saber hacer, para 2.º curso de Bachillerato, es una obra colectiva concebida, diseñada y creada en el Departamento de Ediciones Educativas de Santillana Educación, S. L., dirigido por **Teresa Grence Ruiz**.

En su elaboración ha participado el siguiente equipo:
María Isabel Siles González
Ana Peña Vidal
María del Carmen Vidal Fernández

EDICIÓN
Laura Muñoz Ceballos

EDITOR EJECUTIVO
David Sánchez Gómez

DIRECCIÓN DEL PROYECTO
Antonio Brandi Fernández

BACHILLERATO 2

SANTILLANA

Índice

1. Campo gravitatorio 5
2. Campo eléctrico 35
3. Campo magnético 65
4. Inducción electromagnética 91
5. Ondas. El sonido 107
6. Ondas electromagnéticas 129
7. Óptica geométrica 145
8. Relatividad 169
9. Física cuántica 181
10. Física nuclear 197
11. Física de partículas 215
12. Historia del universo 229

Sistema periódico de los elementos 242

PROYECTO SABER HACER

1

Campo gravitatorio

SANTILLANA

Campo gravitatorio

1

PARA COMENZAR

- **¿Se anula la fuerza gravitatoria ejercida por el Sol y la Tierra en el punto L2?**

  No, puesto que para ello debería estar situada entre el Sol y la Tierra, y la sonda Gaia está ubicada más allá de la órbita de la Tierra respecto al Sol.

- **¿Y en algún punto situado en la línea que une el Sol y la Tierra?**

  Sí, la fuerza se anula en un punto de la línea que une ambos astros, entre los dos y más cerca de la Tierra que del Sol, puesto que la masa del Sol es mucho mayor que la de la Tierra.

- **¿Entonces, por qué permanecerá estacionaria la sonda Gaia en L2?**

  Porque las fuerzas gravitatorias que ejercen la Tierra y el Sol sobre la sonda Gaia hacen que se mantenga estable en ese punto.

ACTIVIDADES

1. Calcula:

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\right)$$

Respuesta:

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{1}{r^2}$$

2. Calcula:

$$\int_r^{\infty}\frac{1}{r^2}\cdot dr$$

Respuesta:

$$\int_r^{\infty}\frac{1}{r^2}\cdot dr=\left.\frac{-1}{r}\right|_r^{\infty}=\frac{1}{r}$$

3. Una masa de 20 000 kg se encuentra a una distancia de 16 m de otra masa de 60 000 kg. Calcula la fuerza de atracción de dichas masas.

Dato: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg².

Sustituimos los datos en la expresión de la ley de la gravitación universal para calcular el módulo de la fuerza de atracción:

$$F_G=G\cdot\frac{m_1\cdot m_2}{d^2}=6{,}67\cdot10^{-11}\,\frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{kg}^2}\cdot\frac{20\cdot10^3\ \text{kg}\cdot60\cdot10^3\ \text{kg}}{(16\ \text{m})^2}=3{,}13\cdot10^{-4}\ \text{N}$$

4. **¿En qué punto la velocidad de la Tierra es mayor, cuando se encuentra más cerca o más lejos del Sol? Justifica la respuesta.**

La velocidad de la Tierra es mayor cuando se encuentra más cerca del Sol, es decir, en el perihelio. Esto se deduce de la segunda ley de Kepler: los planetas giran con velocidad areolar constante, por lo que barren áreas iguales en tiempos iguales. En el perihelio, como *r* es menor que en el afelio, la velocidad tiene que ser mayor para que se barra la misma área.

5. **Se conoce como satélites galileanos a las lunas más grandes de Júpiter descubiertas por Galileo Galilei en 1610. Ío, el satélite galileano más cercano a Júpiter, posee un periodo orbital de 1,8 días y el radio de su órbita es, aproximadamente, tres veces el diámetro de Júpiter. Asimismo, el periodo orbital de Calisto (el cuarto satélite galileano en cuanto a la distancia a Júpiter) es de 16,7 días. Con esos datos, suponiendo órbitas circulares y que el radio de Júpiter es $7{,}15 \cdot 10^7$ m, calcula el radio de la órbita de Calisto.**

Sustituimos valores en la tercera ley de Kepler:

$$\frac{T^2}{d^3} = \text{cte.} \rightarrow \frac{T_{\text{Ío}}^2}{d_{\text{Ío}}^3} = \frac{T_{\text{Calisto}}^2}{d_{\text{Calisto}}^3} \rightarrow \frac{T_{\text{Ío}}^2}{d_{\text{Ío}}^3} = \frac{T_{\text{Calisto}}^2}{r_{\text{C}}^3} \rightarrow \frac{T_{\text{Ío}}^2}{(3 \cdot 2 \cdot r_{\text{J}})^3} = \frac{T_{\text{Calisto}}^2}{r_{\text{C}}^3} \rightarrow$$

$$\rightarrow r_{\text{C}}^3 = \frac{T_{\text{Calisto}}^2 \cdot (3 \cdot 2 \cdot r_{\text{J}})^3}{T_{\text{Ío}}^2} \rightarrow r_{\text{C}} = (3 \cdot 2 \cdot r_{\text{J}}) \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{T_{\text{Calisto}}}{T_{\text{Ío}}}\right)^2} = (3 \cdot 2 \cdot 7{,}15 \cdot 10^7 \text{ m}) \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{16{,}7 \text{ días}}{1{,}8 \text{ días}}\right)^2} = 1{,}89 \cdot 10^9 \text{ m}$$

6. **Justifica si la siguiente afirmación es verdadera o falsa: «El potencial gravitatorio es nulo en el punto medio del segmento que une dos masas iguales».**

El potencial gravitatorio es el trabajo que deben realizar las fuerzas del campo para llevar la masa unidad desde ese punto hasta el infinito (un punto fuera del campo). Viene dado por el cociente de la energía potencial y la unidad de masa según la expresión:

$$V = \frac{E_{\text{P}}}{m} = -\frac{G \cdot M}{r}$$

Por lo que se deduce que el potencial gravitatorio es negativo en todos los puntos del campo excepto en el infinito, donde es nulo. Por tanto, la afirmación es falsa.

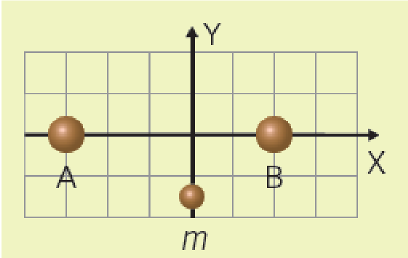
7. **Si nos desplazamos desde un punto situado a gran altura en dirección hacia la superficie de la Tierra, ¿la energía potencial gravitatoria aumentará o disminuirá? Razónalo.**

Al desplazarnos desde un punto situado a gran altura en dirección hacia la superficie terrestre la distancia, *r*, disminuirá. Como la energía potencial es inversamente proporcional a la distancia y de signo negativo, en esta situación la energía potencial disminuiría. Esto es lógico, ya que la energía potencial de un cuerpo coincide con el trabajo que tienen que realizar las fuerzas del campo para llevarlo desde ese punto hasta un punto fuera del campo con velocidad constante. Como la distancia disminuye, el trabajo también y, por tanto, la energía potencial.

8. **Al pie de una montaña un alpinista puede tomar dos rutas diferentes para escalar la misma montaña. Una de las pendientes es suave y la otra, en cambio, es mucho más pronunciada. ¿Crees que el valor del trabajo realizado por la fuerza gravitatoria sobre el cuerpo del montañero depende del camino elegido? Razona la respuesta.**

No. El trabajo realizado por las fuerzas de un campo conservativo, como es el gravitatorio, solo depende del punto inicial y final del desplazamiento, y no del camino elegido.

9. En los puntos A (–30, 0) y B (+20, 0) se encuentran fijas dos masas puntuales de 10^5 kg cada una. En el punto (0, –15) se encuentra una pequeña esfera de 400 g de masa, que puede moverse libremente. Teniendo en cuenta que las distancias están expresadas en metros. Halla:



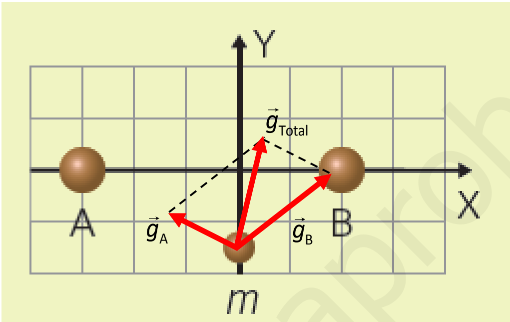
a) La fuerza ejercida (módulo, dirección y sentido) sobre la esfera en su posición inicial.

b) La aceleración que experimentará la esfera justo cuando se encuentre en el punto (0, 0) entre los cuerpos A y B.

c) Enuncia el principio de superposición de campos.

Dato: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg².

a) Primero realizamos la representación gráfica:



Luego aplicamos el principio de superposición para calcular el campo gravitatorio en el punto (0, –15), a partir de ahora denominado C.

$$\vec{g}_{\text{Total}} = \vec{g}_{\text{A}} + \vec{g}_{\text{B}} = -\frac{G \cdot m_{\text{A}}}{r_{\text{AC}}^2} \cdot \vec{u}_{\text{r AC}} - \frac{G \cdot m_{\text{B}}}{r_{\text{BC}}^2} \cdot \vec{u}_{\text{rBC}}$$

Calculamos los vectores de posición y los vectores unitarios correspondientes:

$$\vec{r}_{\text{AC}} = (0,-15)-(-30,0) = (30,-15) \rightarrow \vec{u}_{\text{r AC}} = \frac{\vec{r}_{\text{AC}}}{|\vec{r}_{\text{AC}}|} = \frac{30\vec{i}-15\vec{j}}{\sqrt{30^2+(-15)^2}} = \frac{30\vec{i}-15\vec{j}}{\sqrt{1125}} = \frac{30\vec{i}-15\vec{j}}{15\cdot\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{j}$$

$$\vec{r}_{\text{BC}} = (0,-15)-(20,0) = (-20,-15) \rightarrow \vec{u}_{\text{rBC}} = \frac{\vec{r}_{\text{BC}}}{|\vec{r}_{\text{BC}}|} = \frac{-20\vec{i}-15\vec{j}}{\sqrt{(-20)^2+(-15)^2}} = \frac{-20\vec{i}-15\vec{j}}{\sqrt{625}} = \frac{-20\vec{i}-15\vec{j}}{25} = \frac{-4}{5}\vec{i} - \frac{3}{5}\vec{j}$$

Sustituimos valores en la expresión del campo gravitatorio:

$$\vec{g}_{\text{Total}} = -\frac{6{,}67\cdot10^{-11}\,\frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{kg}^2}\cdot10^5\ \text{kg}}{\left(15\cdot\sqrt{5}\ \text{m}\right)^2}\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\vec{i}-\frac{1}{\sqrt{5}}\vec{j}\right) - \frac{6{,}67\cdot10^{-11}\,\frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{kg}^2}\cdot10^5\text{kg}}{(25\,\text{m})^2}\cdot\left(\frac{-4}{5}\vec{i}-\frac{3}{5}\vec{j}\right) =$$

$$= 3{,}23\cdot10^{-9}\,\vec{i} + 9{,}06\cdot10^{-9}\,\vec{j}\ \frac{\text{N}}{\text{kg}}$$

La fuerza gravitatoria ejercida sobre la esfera en el punto C será:

$$\vec{F}_{\text{G}} = m\cdot\vec{g}_{\text{Total}} = 0{,}4\ \text{kg}\cdot\left(3{,}23\cdot10^{-9}\,\vec{i}+9{,}06\cdot10^{-9}\,\vec{j}\right)\frac{\text{N}}{\text{kg}} = 1{,}29\cdot10^{-9}\,\vec{i}+3{,}62\cdot10^{-9}\,\vec{j}\ \text{N}$$

Cuyo módulo será:

$$|\vec{F}_{\text{G}}| = \sqrt{\left(1{,}29\cdot10^{-9}\right)^2+\left(3{,}62\cdot10^{-9}\right)^2}\ \text{N} = 3{,}84\cdot10^{-9}\ \text{N}$$

b) La aceleración que sufrirá la esfera cuando se encuentre en el punto (0, 0), a partir de ahora denominado O, vendrá dada por la intensidad del campo gravitatorio debido a las masas A y B en ese punto:

$$\vec{g}_{\text{Total}} = \vec{g}_{\text{A}} + \vec{g}_{\text{B}} = -\frac{G \cdot m_{\text{A}}}{r_{\text{AO}}^2} \cdot \vec{u}_{\text{r AO}} - \frac{G \cdot m_{\text{B}}}{r_{\text{BO}}^2} \cdot \vec{u}_{\text{rBO}}$$

Calculamos los vectores de posición y los vectores unitarios correspondientes:

$$\vec{r}_{\text{AO}} = (0,\ 0) - (-30,\ 0) = (30,\ 0) \rightarrow \vec{u}_{\text{r AO}} = \frac{\vec{r}_{\text{AO}}}{|\vec{r}_{\text{AO}}|} = \frac{30\,\vec{i}}{\sqrt{30^2}} = \vec{i}$$

$$\vec{r}_{\text{BO}} = (0,\ 0) - (20,\ 0) = (-20,\ 0) \rightarrow \vec{u}_{\text{rBO}} = \frac{\vec{r}_{\text{BO}}}{|\vec{r}_{\text{BO}}|} = \frac{-20\,\vec{i}}{\sqrt{(-20)^2}} = -\vec{i}$$

Sustituimos valores en la expresión del campo gravitatorio:

$$\vec{g}_{\text{Total}} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 10^5\ \text{kg}}{(30\ \text{m})^2} \cdot \vec{i} - \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 10^5\ \text{kg}}{(20\ \text{m})^2} \cdot (-\vec{i}) =$$

$$= -7{,}41 \cdot 10^{-9}\,\vec{i}\,\frac{\text{N}}{\text{kg}} + 1{,}67 \cdot 10^{-8}\,\vec{i}\,\frac{\text{N}}{\text{kg}} = 9{,}29 \cdot 10^{-9}\,\vec{i}\,\frac{\text{N}}{\text{kg}} = 9{,}29 \cdot 10^{-9}\,\vec{i}\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

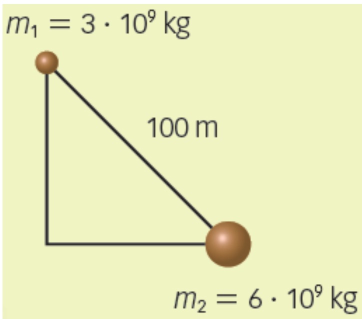
c) El principio de superposición de campos dice que la intensidad del campo gravitatorio creado por un conjunto de masas puntuales en un punto es la suma vectorial de los campos que crearía cada masa si solo estuviese ella en esa región del espacio.

$$\vec{g}_{\text{Total}} = \sum_{\text{i}} \vec{g}_{\text{i}} = \sum_{\text{i}} \left(-\frac{G \cdot M_{\text{i}}}{r_{\text{i}}^2} \right) \cdot \vec{u}_{\text{r i}}$$

10. Explica qué relación existe entre la «fuerza conservativa» y la «energía potencial».

Cuando las fuerzas son conservativas se puede definir una energía potencial asociada que se conserva.

11. Hay dos masas de $3 \cdot 10^9$ y $6 \cdot 10^9$ kg, respectivamente, en los extremos de la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles.



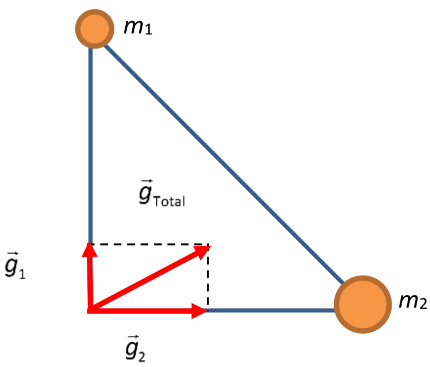
a) Haz un esquema del campo gravitatorio de cada masa y del campo total en el vértice.

b) Si la hipotenusa del triángulo mide 100 m, calcula el módulo del campo gravitatorio en dicho vértice.

c) ¿En qué punto del triángulo el campo gravitatorio será nulo?

Dato: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg².

a) El esquema de la situación es el siguiente:



b) Dada la simetría del problema, podemos calcular los módulos de ambos campos gravitatorios y aplicar el teorema de Pitágoras, pues el módulo del campo total es igual a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los módulos. La distancia a ambas masas también es la misma ($d_1 = d_2 = d$), pues el triángulo es isósceles. Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo ($h = 100$ m):

$$h^2 = d_1^2 + d_2^2 \rightarrow h^2 = 2 \cdot d^2 \rightarrow d = \frac{\sqrt{2} \cdot h}{2}$$

Entonces:

$$g_{\text{Total}} = \sqrt{g_1^2 + g_2^2} = \sqrt{\left(G \cdot \frac{m_1}{d_1^2}\right)^2 + \left(G \cdot \frac{m_2}{d_2^2}\right)^2} = \frac{G}{d^2} \cdot \sqrt{(m_1)^2 + (m_2)^2} =$$

$$= \frac{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2}}{(100\ \text{m})^2} \cdot \sqrt{(3 \cdot 10^9\ \text{kg})^2 + (6 \cdot 10^9\ \text{kg})^2} = 8{,}95 \cdot 10^{-5}\ \text{N/kg}$$

c) Para que el campo gravitatorio sea nulo los dos campos creados por ambas masas deben tener la misma dirección y sentidos opuestos. Esto ocurre en puntos situados sobre la hipotenusa. Como la masa m_2 es mayor que la masa m_1 (dos veces mayor), el punto deberá estar más cerca de la masa m_1. Si llamamos x a la distancia de dicho punto P a la masa m_1, en dicho punto los módulos de los campos son iguales, es decir:

$$g_{\text{Total}} = 0 \rightarrow g_1 = g_2 \rightarrow G \cdot \frac{m_1}{x^2} = G \cdot \frac{m_2}{(100-x)^2} \rightarrow \frac{m_1}{x^2} = \frac{m_2}{(100-x)^2} \rightarrow m_1 \cdot (100-x)^2 = 2 \cdot m_1 \cdot x^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow (100-x)^2 = 2 \cdot x^2 \rightarrow x^2 + 10000 - 200 \cdot x = 2 \cdot x^2 \rightarrow x^2 + 200 \cdot x - 10000 = 0$$

Las soluciones de esta ecuación son:

$$x = \frac{-200 \pm \sqrt{200^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10000)}}{2} \begin{cases} x = 41{,}42\ \text{m} \\ x = -241{,}42\ \text{m} \end{cases}$$

La segunda solución no es válida, pues nos dicen que el punto se encuentra sobre el triángulo.

12. Tenemos dos masas de 4000 y 10 000 kg, respectivamente. La masa 1 se encuentra en el origen de coordenadas, punto (0, 0). A 200 m y a su derecha se encuentra la masa 2, en el punto (200, 0).

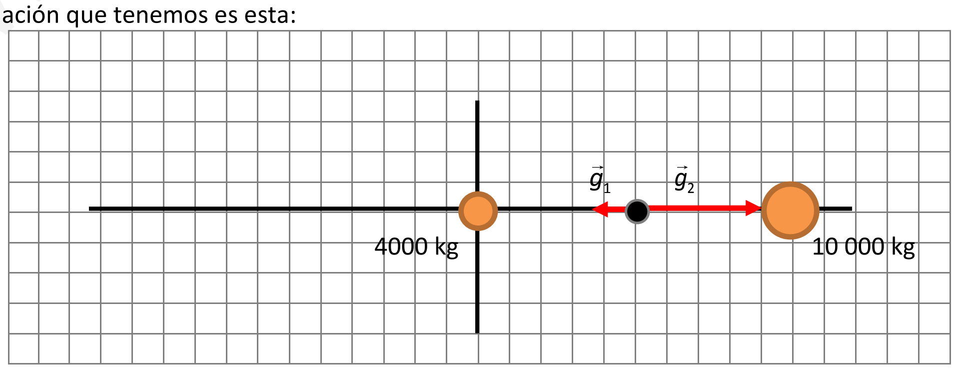
a) Dibuja y calcula el valor del campo gravitatorio en el punto medio C entre ambos.

b) Halla el potencial gravitatorio en el punto C.

c) Halla el trabajo necesario para llevar una masa de 1 kg desde el punto C hasta una distancia de 40 m a la izquierda de la primera masa, punto (–40, 0).

Dato: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg².

a) La situación que tenemos es esta:



Como se ve en el dibujo, los campos apuntan en sentidos opuestos. El campo resultante estará dirigido hacia la carga mayor, es decir, hacia la derecha. El módulo del campo resultante se puede obtener restando los valores de ambos campos:

$$g_{\text{Total}} = g_2 - g_1 = G \cdot \frac{m_2}{d_2^2} - G \cdot \frac{m_1}{d_1^2}$$

Como queremos calcularlo en el punto medio C entre ambos, $d_1 = d_2 = d = 100$ m, por tanto:

$$g_{\text{Total}} = \frac{G}{d^2} \cdot (m_2 - m_1) = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2}}{(100\ \text{m})^2} \cdot (10\,000\ \text{kg} - 4000\ \text{kg}) = 4 \cdot 10^{-11}\ \text{N/kg}$$

Por tanto:

$$\vec{g}_{\text{Total}} = 4 \cdot 10^{-11}\ \vec{\text{i}}\ \text{N/kg}$$

b) El potencial gravitatorio en un punto viene dado por la expresión:

$$V = -G \cdot \frac{m}{d}$$

En el punto C, según el principio de superposición, se calcula sumando las contribuciones de ambas masas:

$$V_{\text{Total}} = V_1 + V_2 = -G \cdot \frac{m_1}{d} - G \cdot \frac{m_2}{d} = -\frac{G}{d} \cdot (m_1 + m_2) =$$

$$= \frac{-6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2}}{100\ \text{m}} \cdot (10\,000\ \text{kg} + 4000\ \text{kg}) = -9{,}34 \cdot 10^{-9}\ \text{J/kg}$$

c) El trabajo necesario será igual a la diferencia de energía potencial entre ambos puntos. La energía potencial de una masa m en un punto P viene dada por la expresión:

$$E_{\text{P}} = -\frac{G \cdot M \cdot m}{r}$$

Por tanto, el trabajo necesario será igual a la energía potencial en el punto final, (–40, 0), menos la energía potencial en el punto inicial, (100, 0):

$$W = E_{\text{P final}} - E_{\text{P inicial}} = \left(-\frac{G \cdot m_1 \cdot m}{r_{\text{fin}1}} - \frac{G \cdot m_2 \cdot m}{r_{\text{fin}2}}\right) - \left(-\frac{G \cdot m_1 \cdot m}{r_{\text{inicio}1}} - \frac{G \cdot m_2 \cdot m}{r_{\text{inicio}2}}\right) =$$

$$= G \cdot m \cdot \left[\left(-\frac{m_1}{r_{\text{fin}1}} - \frac{m_2}{r_{\text{fin}2}}\right) - \left(-\frac{m_1}{r_{\text{inicio}1}} - \frac{m_2}{r_{\text{inicio}2}}\right)\right] =$$

$$= 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 1\ \text{kg} \cdot \left[\left(-\frac{4000}{40\ \text{m}} - \frac{10\,000}{240\ \text{m}}\right) - \left(-\frac{4000}{100\ \text{m}} - \frac{10\,000}{100\ \text{m}}\right)\right] = -1{,}11 \cdot 10^{-10}\ \text{J}$$

El signo negativo del trabajo indica que no lo realizan las fuerzas de campo, sino que actúan fuerzas externas.

13. Si una persona de 75 kg de masa se encuentra en un planeta cuya masa y radio son la cuarta parte de los de la Tierra, ¿cuál sería su peso en dicho planeta?

Dato: $g_{0\ \text{Tierra}} = 9{,}8\ \text{m/s}^2$.

El peso es la fuerza con la que el planeta atrae a la persona. Llamando M y R a la masa y al radio del planeta y m a la masa de la persona:

$$P = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} \rightarrow P = G \cdot \frac{M \cdot m}{R^2}$$

Para resolver el problema relacionamos el radio y la masa del planeta con los valores correspondientes a la Tierra:

$$\frac{P_{\text{Planeta}}}{P_{\text{Tierra}}}=\frac{\cancel{G}\cdot\frac{M\cdot\cancel{m}}{R^2}}{\cancel{G}\cdot\frac{M_{\text{Tierra}}\cdot\cancel{m}}{R^2_{\text{Tierra}}}}=\frac{\frac{M}{R^2}}{\frac{M_{\text{Tierra}}}{R^2_{\text{Tierra}}}}=\frac{M}{M_{\text{Tierra}}}\cdot\left(\frac{R_{\text{Tierra}}}{R}\right)^2=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{4}{1}\right)^2=4$$

Es decir, en el planeta el peso es cuatro veces mayor que en la Tierra. Por tanto:

$$P=m\cdot g=4\cdot m\cdot g_0=4\cdot 75\text{ kg}\cdot 9{,}8\text{ m/s}^2=2940\text{ N}$$

14. La luz del Sol tarda 8 min y 20 s en llegar a la Tierra, y 43 min y 20 s en llegar a Júpiter. Suponiendo que las órbitas son circulares, calcula:

a) El periodo de Júpiter orbitando alrededor del Sol.

b) La velocidad orbital de Júpiter.

c) La masa del Sol.

Datos: T_{Tierra} alrededor del Sol = 3,15 · 10⁷ s; c = 3 · 10⁸ m/s; G = 6,67 · 10⁻¹¹ N · m² · kg⁻².

a) Podemos aplicar la tercera ley de Kepler que relaciona el periodo y el radio de la órbita de los planetas del sistema solar:

$$\frac{T^2}{d^3}=\text{cte.}\rightarrow\frac{T_{\text{T}}^2}{d_{\text{T}}^3}=\frac{T_{\text{J}}^2}{d_{\text{J}}^3}\rightarrow\frac{T_{\text{T}}^2}{(c\cdot t_{\text{T}})^3}=\frac{T_{\text{J}}^2}{(c\cdot t_{\text{J}})^3}\rightarrow\left(\frac{t_{\text{J}}}{t_{\text{T}}}\right)^3\cdot T_{\text{T}}^2=T_{\text{J}}^2\rightarrow$$

$$\rightarrow T_{\text{J}}=\sqrt{\left(\frac{t_{\text{J}}}{t_{\text{T}}}\right)^3}\cdot T_{\text{T}}=\sqrt{\left(\frac{43\cdot 60+20}{8\cdot 60+20}\right)^3}\cdot 3{,}15\cdot 10^7\text{ s}=3{,}735\cdot 10^8\text{ s}$$

b) La velocidad de Júpiter se puede conocer a partir del periodo y de la distancia al Sol:

$$v_{\text{J}}=\frac{2\pi\cdot d_{\text{J}}}{T_{\text{J}}}=\frac{2\pi\cdot(c\cdot t_{\text{J}})}{T_{\text{J}}}=\frac{2\pi\cdot\left[3\cdot 10^8\text{ m/s}\cdot(43\cdot 60+20)\text{ s}\right]}{3{,}735\cdot 10^8\text{ s}}=13\,121{,}51\text{ m/s}=1{,}312\cdot 10^4\text{m/s}$$

c) La masa del Sol puede deducirse conociendo la constante de la gravitación de Newton. Identificamos la fuerza gravitatoria con la fuerza centrípeta.

$$F_{\text{G}}=F_{\text{C}}\rightarrow G\cdot\frac{M_{\text{S}}\cdot m_{\text{J}}}{d^2}=\frac{m_{\text{J}}\cdot v_{\text{J}}^2}{d}\rightarrow M_{\text{S}}=\frac{d}{G}\cdot v_{\text{J}}^2=\frac{c\cdot t_{\text{J}}}{G}\cdot v_{\text{J}}^2=$$

$$=\frac{3\cdot 10^8\text{ m/s}\cdot(43\cdot 60+20)\text{ s}}{6{,}67\cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{kg}^2}}\cdot(13\,121{,}51\text{ m/s})^2=2{,}013\cdot 10^{30}\text{ kg}$$

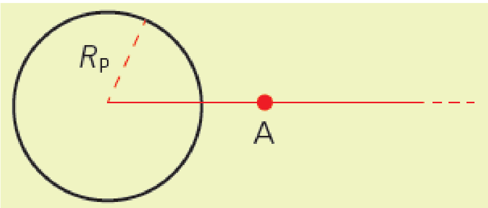
15. Se deja caer libremente un objeto desde una distancia «infinita» de un planeta de radio R_{P}. Calcula:

a) La masa del planeta si la intensidad de la gravedad en la superficie vale g_0.

b) La velocidad al llegar a la superficie del planeta.

c) La velocidad del objeto al pasar por un punto A en el que la gravedad vale g_0/2.

Datos: G = 6,67 · 10⁻¹¹ N · m² · kg⁻²; g_0 = 9,8 m/s²; R_{P} = 6,37 · 10⁶ m.



a) En el planeta el peso de un objeto es igual a la fuerza gravitatoria.

$$P=\cancel{m}\cdot g_0=G\cdot\frac{M_{\text{P}}\cdot\cancel{m}}{R_{\text{P}}^2}\rightarrow M_{\text{P}}=\frac{g_0\cdot R_{\text{P}}^2}{G}=\frac{9{,}8\text{ m/s}^2\cdot(6{,}37\cdot 10^6\text{ m})^2}{6{,}67\cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{kg}^2}}=5{,}96\cdot 10^{24}\text{ kg}$$

b) Si se deja caer desde el infinito, la energía inicial del objeto es cero. Por tanto, en la superficie del planeta la energía total debe seguir siendo cero. Es decir, la suma de la energía cinética y la potencial en la superficie:

$$\frac{1}{2}\cdot \cancel{m}\cdot v^2 - \frac{G\cdot M_P\cdot \cancel{m}}{R_P} = 0 \rightarrow v = \sqrt{\frac{2\cdot G\cdot M_P}{R_P}} = \sqrt{\frac{2\cdot 6{,}67\cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{kg}^2}\cdot 5{,}96\cdot 10^{24}\ \text{kg}}{6{,}37\cdot 10^6\ \text{m}}} = 11\,172{,}01\ \text{m/s}$$

c) En ese punto la energía total debe ser la misma. Calculamos la distancia al planeta:

$$\frac{\cancel{m}\cdot g_0}{2} = G\cdot\frac{M_P\cdot \cancel{m}}{r_P^2} \rightarrow r_P = \sqrt{\frac{2\cdot G\cdot M_P}{g_0}} = \sqrt{\frac{2\cdot 6{,}67\cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{kg}^2}\cdot 5{,}96\cdot 10^{24}\ \text{kg}}{9{,}8\ \text{m/s}^2}} = 9\cdot 10^6\ \text{m}$$

Ahora calculamos la velocidad en dicho punto sabiendo que, de nuevo, la energía total es cero.

$$\frac{1}{2}\cdot \cancel{m}\cdot v^2 - \frac{G\cdot M_P\cdot \cancel{m}}{r_P} = 0 \rightarrow v = \sqrt{\frac{2\cdot G\cdot M_P}{r_P}} = \sqrt{\frac{2\cdot 6{,}67\cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{kg}^2}\cdot 5{,}96\cdot 10^{24}\ \text{kg}}{9\cdot 10^6\ \text{m}}} = 9398{,}96\ \text{m/s}$$

16. Un planeta de 10^{25} kg de masa gira alrededor de una estrella siguiendo una órbita circular de radio $r = 10^8$ km y periodo $T = 2$ años terrestres. Calcula:

a) La masa *M* de la estrella.

b) La energía mecánica del planeta.

c) El módulo del momento angular del planeta respecto al centro de la estrella.

d) La velocidad angular de otro planeta más alejado de la estrella que describe una órbita circular de radio igual al doble del primero, 2*r*.

Datos: $G = 6{,}67\cdot 10^{-11}\ \text{N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{kg}^{-2}$. Consi dera 1 año terrestre = 365 días.

a) La masa puede deducirse identificando la fuerza gravitatoria con la fuerza centrípeta.

$$F_G = F_C \rightarrow G\cdot\frac{M\cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \frac{\cancel{m}\cdot v^2}{\cancel{r}} \rightarrow G\cdot\frac{M}{r} = \left(\frac{2\pi\cdot r}{T}\right)^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow M = \frac{4\pi^2\cdot r^3}{G\cdot T^2} = \frac{4\pi^2\cdot\left(10^{11}\ \text{m}\right)^3}{6{,}67\cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{kg}^2}\cdot\left(2\cdot 365\ \cancel{\text{días}}\cdot\frac{24\ \cancel{\text{h}}}{1\ \cancel{\text{día}}}\cdot\frac{3600\ \text{s}}{1\ \cancel{\text{h}}}\right)^2} = 1{,}488\cdot 10^{29}\ \text{kg}$$

b) La energía mecánica es la suma de la energía cinética del planeta más su energía potencial gravitatoria.

$$E_M = \frac{1}{2}\cdot m\cdot v^2 - \frac{G\cdot M\cdot m}{r} = \frac{1}{2}\cdot m\cdot\left(\frac{2\pi\cdot r}{T}\right)^2 - \frac{G\cdot M\cdot m}{r} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 10^{25}\ \text{kg}\cdot\left(\frac{2\pi\cdot 10^{11}\ \text{m}}{2\cdot 365\ \cancel{\text{días}}\cdot\frac{24\ \cancel{\text{h}}}{1\ \cancel{\text{día}}}\cdot\frac{3600\ \text{s}}{1\ \cancel{\text{h}}}}\right)^2 - \frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{kg}^2}\cdot 1{,}49\cdot 10^{29}\ \text{kg}\cdot 10^{25}\ \text{kg}}{10^{11}\ \text{m}} = -4{,}962\cdot 10^{32}\ \text{J}$$

c) El momento angular se calcula como el producto vectorial del vector de posición del planeta por su momento lineal. Como la órbita es circular, ambos vectores son perpendiculares y podemos escribir:

$$L = r\cdot p = r\cdot m\cdot v = r\cdot m\cdot\left(\frac{2\pi\cdot r}{T}\right) = m\cdot\frac{2\pi\cdot r^2}{T} = 10^{25}\ \text{kg}\cdot\frac{2\pi\cdot\left(10^{11}\ \text{m}\right)^2}{2\cdot 365\ \cancel{\text{días}}\cdot\frac{24\ \cancel{\text{h}}}{1\ \cancel{\text{día}}}\cdot\frac{3600\ \text{s}}{1\ \cancel{\text{h}}}} = 9{,}96\cdot 10^{39}\ \text{kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-2}$$

d) La velocidad angular puede calcularse a partir de la velocidad lineal y el radio:

$$\omega = \frac{v_2}{r_2} = \frac{\frac{2\pi \cdot r_2}{T_2}}{r_2} = \frac{2\pi}{T_2}$$

Podemos aplicar la tercera ley de Kepler a ambos planetas. El planeta 1 será el que sigue una órbita de radio r, mientras que el planeta 2 sigue una órbita de radio $2r$.

$$\frac{T_1^2}{r_1^3} = \frac{T_2^2}{r_2^3} \rightarrow \frac{T_1^2}{r_1^3} = \frac{T_2^2}{(2r_1)^3} \rightarrow T_1^2 = \frac{T_2^2}{2^3} \rightarrow T_1^2 \cdot 8 = T_2^2 \rightarrow T_2 = T_1 \cdot \sqrt{8}$$

Sustituyendo en la ecuación anterior:

$$\omega = \frac{2\pi}{T_2} = \frac{2\pi}{T_1 \cdot \sqrt{8}} = \frac{2\pi}{2 \cdot 365 \ \cancel{\text{días}} \cdot \frac{24 \ \cancel{\text{h}}}{1 \ \cancel{\text{día}}} \cdot \frac{3600 \text{ s}}{1 \ \cancel{\text{h}}}_{1} \cdot \sqrt{8}} = 3{,}52 \cdot 10^{-8} \text{ rad/s}$$

17. La masa de Marte, su radio y el radio de su órbita alrededor del Sol, referidos a las magnitudes de la Tierra, son, respectivamente: $M_{Marte} = 0{,}107 \cdot M_{Tierra}$, $R_{Marte} = 0{,}532 \cdot R_{Tierra}$, y $r_{Marte} = 1{,}524 \cdot r_{Tierra}$. Determina, en relación con la Tierra:

a) El periodo de rotación alrededor del Sol.

b) El valor de la gravedad y la velocidad de escape en la superficie de Marte en relación con las de la Tierra.

a) El periodo de Marte y el de la Tierra están relacionados por la tercera ley de Kepler:

$$\frac{T_M^2}{r_M^3} = \frac{T_T^2}{r_T^3} \rightarrow \frac{T_M^2}{(1{,}524 \cdot r_T)^3} = \frac{T_T^2}{r_T^3} \rightarrow T_M^2 = \frac{T_T^2}{r_T^3} \cdot (1{,}524 \cdot r_T)^3 \rightarrow$$

$$\rightarrow T_M^2 = \frac{T_T^2}{r_T^3} \cdot 1{,}524^3 \cdot r_T^3 \rightarrow T_M = T_T \cdot \sqrt{1{,}524^3} \rightarrow T_M = 1{,}88 \cdot T_T$$

b) El valor de la gravedad puede calcularse sabiendo que la fuerza peso sobre la superficie de un planeta es la fuerza gravitatoria ejercida por dicho planeta. Es decir:

$$F_G = P \rightarrow G \cdot \frac{M \cdot \cancel{m}}{r^2} = \cancel{m} \cdot g$$

Aplicamos esta expresión a Marte y a la Tierra:

$$G \cdot \frac{M_M}{R_M^2} = g_M \ ; \ G \cdot \frac{M_T}{R_T^2} = g_T$$

Dividiendo ambas expresiones:

$$\frac{G \cdot \frac{M_M}{R_M^2}}{G \cdot \frac{M_T}{R_T^2}} = \frac{g_M}{g_T} \rightarrow \frac{g_M}{g_T} = \frac{M_M \cdot R_T^2}{M_T \cdot R_M^2} = \frac{M_M}{M_T} \cdot \left(\frac{R_T}{R_M}\right)^2 = \frac{0{,}107 \cdot M_T}{M_T} \cdot \left(\frac{R_T}{0{,}532 \cdot R_T}\right)^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{g_M}{g_T} = \frac{0{,}107}{0{,}532^2} \rightarrow g_M = \frac{0{,}107}{0{,}532^2} \cdot g_T \rightarrow g_M = 0{,}378 \cdot g_T$$

Para calcular la velocidad de escape tenemos en cuenta que es aquella que permite a un objeto lanzado escapar del campo gravitatorio. Esto quiere decir que la energía total en el lugar del lanzamiento es cero. Por tanto, podemos escribir la siguiente expresión:

$$E_M = 0 \rightarrow E_C + E_P = 0 \rightarrow \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_{escape}^2 - \frac{G \cdot M \cdot m}{R} = 0$$

Ahora aplicamos esta ecuación a ambos planetas:

$$\frac{1}{2}\cdot v^2_{\text{escape M}} - \frac{G\cdot M_{\text{M}}}{R_{\text{M}}} = 0 \rightarrow \frac{1}{2}\cdot v^2_{\text{escape M}} = \frac{G\cdot M_{\text{M}}}{R_{\text{M}}}$$

$$\frac{1}{2}\cdot v^2_{\text{escape T}} - \frac{G\cdot M_{\text{T}}}{R_{\text{T}}} = 0 \rightarrow \frac{1}{2}\cdot v^2_{\text{escape T}} = \frac{G\cdot M_{\text{T}}}{R_{\text{T}}}$$

Y de nuevo dividiendo una ecuación entre la otra obtenemos la relación entre las velocidades de escape en ambos planetas:

$$\frac{\frac{1}{2}\cdot v^2_{\text{escape M}}}{\frac{1}{2}\cdot v^2_{\text{escape T}}} = \frac{\frac{G\cdot M_{\text{M}}}{R_{\text{M}}}}{\frac{G\cdot M_{\text{T}}}{R_{\text{T}}}} \rightarrow \frac{v^2_{\text{escape M}}}{v^2_{\text{escape T}}} = \frac{M_{\text{M}}\cdot R_{\text{T}}}{M_{\text{T}}\cdot R_{\text{M}}} \rightarrow \frac{v_{\text{escape M}}}{v_{\text{escape T}}} = \sqrt{\frac{M_{\text{M}}}{M_{\text{T}}}\cdot\frac{R_{\text{T}}}{R_{\text{M}}}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{v_{\text{escape M}}}{v_{\text{escape T}}} = \sqrt{\frac{0{,}107}{0{,}532}} \rightarrow v_{\text{escape M}} = 0{,}448\cdot v_{\text{escape T}}$$

18. **Un agujero negro es un objeto tan masivo que tiene una velocidad de escape igual a la velocidad de la luz en el vacío. Determina el radio, denominado radio de Schwarzschild, para un agujero negro, a partir de la gravitación universal de Newton.**

a) Con una masa 10 veces la del Sol.

b) Con una masa de 1 kg.

Datos: $v_{\text{luz vacío}} = 3{,}00\cdot10^8$ m/s; $G = 6{,}67\cdot10^{-11}$ N · m²/kg²; $M_{\text{Sol}} = 1{,}99\cdot10^{30}$ kg.

a) La velocidad de escape es aquella que hace que la energía total en el momento del lanzamiento es nula. Por tanto:

$$E_{\text{M}} = 0 \rightarrow E_{\text{C}} + E_{\text{P}} = 0 \rightarrow \frac{1}{2}\cdot m\cdot v^2_{\text{escape}} - \frac{G\cdot M\cdot m}{R} = 0 \rightarrow \frac{1}{2}\cdot m\cdot v^2_{\text{escape}} = \frac{G\cdot M\cdot m}{R} \rightarrow$$

$$\rightarrow R = \frac{2\cdot G\cdot M}{v^2_{\text{escape}}} = \frac{2\cdot 6{,}67\cdot10^{-11}\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{kg}^2}\cdot 10\cdot 1{,}99\cdot10^{30}\ \text{kg}}{\left(3\cdot10^8\ \text{m/s}\right)^2} = 29\,496\ \text{m} \approx 29{,}5\ \text{km}$$

Como se aprecia, el agujero negro es un objeto muy, muy compacto. Tiene una masa diez veces mayor que el Sol concentrada en un radio de unos 30 km.

b) En el apartado anterior vemos que el radio del agujero negro es directamente proporcional a la masa. Por tanto, si la masa es menor que antes el radio del agujero negro será también menor que antes. El factor de relación entre ambos es la relación entre las masas. Es decir:

$$\frac{R_{1\ \text{kg}}}{R_{10\cdot M_{\text{Sol}}}} = \frac{1\ \text{kg}}{10\cdot 1{,}99\cdot10^{30}\ \text{kg}} \rightarrow$$

$$\rightarrow R_{1\ \text{kg}} = \frac{1\ \text{kg}}{10\cdot 1{,}99\cdot10^{30}\ \text{kg}}\cdot R_{10\cdot M_{\text{Sol}}} = \frac{1\ \text{kg}}{10\cdot 1{,}99\cdot10^{30}\ \text{kg}}\cdot 29{,}5\ \text{km} = 1{,}48\cdot10^{-30}\ \text{km} = 1{,}48\cdot10^{-27}\ \text{m}$$

19. **En febrero de 2013, la Agencia Espacial Europea colocó un nuevo satélite, Amazonas 3, en órbita circular alrededor de la Tierra. Calcula la altura *h* a la que se encuentra desde la superficie terrestre (en kilómetros) y su periodo (en horas) si la velocidad del satélite es de 3074 m/s.**

Datos: $G = 6{,}67\cdot10^{-11}$ N · m²/kg²; $M_{\text{T}} = 5{,}98\cdot10^{24}$ kg; $R_{\text{T}} = 6370$ km.

En este caso la fuerza centrípeta que hace girar al satélite es la fuerza gravitatoria con que la Tierra lo atrae. Entonces podemos escribir:

$$F_C = F_G \rightarrow \frac{\cancel{m}\cdot v^2}{\cancel{r}} = \frac{G\cdot M_T\cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} \rightarrow r = \frac{G\cdot M_T}{v^2} = \frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{kg}^2}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}\ \text{kg}}{(3074\ \text{m/s})^2} = 4{,}22\cdot 10^7\ \text{m}$$

Esta distancia *r* es la distancia hasta el centro de la Tierra. La altura pedida será entonces:

$$h = r - R_T = 4{,}22\cdot 10^7\ \text{m} - 6370\cdot 10^3\ \text{m} = 3{,}583\cdot 10^7\ \text{m} = 35\,830\ \text{km}$$

El periodo puede calcularse a partir del radio de la órbita y de la velocidad:

$$v = \frac{2\pi\cdot r}{T} \rightarrow T = \frac{2\pi\cdot r}{v} = \frac{2\pi\cdot 4{,}22\cdot 10^7\ \text{m}}{3074\ \text{m/s}} = 86\,255{,}83\ \text{s} = 23{,}96\ \text{h}$$

Es decir, se trata de un satélite geoestacionario, puesto que su periodo coincide con el periodo de rotación de la Tierra. Esto quiere decir que el satélite está siempre situado sobre el mismo punto de la superficie terrestre.

20. Un satélite artificial gira en una órbita circular a 300 km de altura sobre la superficie terrestre.

a) Halla la velocidad del satélite.

b) Halla su periodo orbital.

Datos: $G = 6{,}67\cdot 10^{-11}$ N · m² · kg⁻²; $M_T = 5{,}98\cdot 10^{24}$ kg; $R_T = 6370$ km.

a) La fuerza gravitatoria es responsable del giro del satélite. Igualamos la fuerza centrípeta con la fuerza gravitatoria con que la Tierra atrae al satélite:

$$F_C = F_G \rightarrow \frac{\cancel{m}\cdot v^2}{r} = \frac{G\cdot M_T\cdot \cancel{m}}{r^2} \rightarrow v = \sqrt{\frac{G\cdot M_T}{r}} = \sqrt{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{kg}^2}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}\ \text{kg}}{(6370+300)\cdot 10^3\ \text{m}}} = 7733{,}05\ \text{m/s}$$

b) El periodo orbital se calcula a partir de la velocidad y del radio de la órbita:

$$v = \frac{2\pi\cdot r}{T} \rightarrow T = \frac{2\pi\cdot r}{v} = \frac{2\pi\cdot(6370+300)\cdot 10^3\ \text{m}}{7733{,}05\ \text{m/s}} = 5419{,}45\ \text{s} = 1\ \text{h}\ 30\ \text{min}\ 19{,}45\ \text{s}$$

21. Con el fin de recoger información acerca del planeta rojo se quiere enviar tres naves a Marte para hacer de satélites «marte-estacionarios». Determina:

a) Qué tipo de órbita tendrían los satélites.

b) A qué altura sobre la superficie de Marte se encontrarían.

Datos: $G = 6{,}67\cdot 10^{-11}$ N · m²/kg²; $M_{Marte} = 6{,}42\cdot 10^{23}$ kg; $R_{Marte} = 3397$ km; $T_{Marte} = 5{,}93\cdot 10^7$ s.

a) Los satélites siguen una órbita cerrada. El periodo de los satélites debe coincidir con el periodo de rotación de Marte, de tal modo que cada satélite se encuentre siempre sobre el mismo punto de Marte.

El radio de la órbita puede calcularse teniendo en cuenta que la fuerza gravitatoria es la que hace girar a los satélites:

$$F_C = F_G \rightarrow \frac{\cancel{m}\cdot v^2}{\cancel{r}} = \frac{G\cdot M_M\cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} \rightarrow v^2 = \frac{G\cdot M_M}{r} \rightarrow \left(\frac{2\pi\cdot r}{T}\right)^2 = \frac{G\cdot M_M}{r} \rightarrow \frac{4\pi^2\cdot r^2}{T^2} = \frac{G\cdot M_M}{r} \rightarrow$$

$$\rightarrow r^3 = \frac{G\cdot M_M\cdot T^2}{4\pi^2} \rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{G\cdot M_M\cdot T^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{kg}^2}\cdot 6{,}42\cdot 10^{23}\ \text{kg}\cdot(5{,}93\cdot 10^7\ \text{s})^2}{4\pi^2}} = 1{,}59\cdot 10^9\ \text{m}$$

22. El satélite de la NASA Terra está diseñado para recoger información sobre la superficie de la Tierra, los océanos y la atmósfera. Con estos datos conseguimos estudiar la interrelación entre los distintos medios y los sistemas biológicos existentes.

El satélite sigue una órbita circular en el plano que pasa por los polos a una altura de 760 km de la superficie de la Tierra (circumpolar). Sabiendo que la masa del satélite es de 4,86 · 10³ kg, calcula:

a) El periodo del movimiento del satélite en su órbita alrededor de la Tierra.

b) La energía necesaria, que hay que suministrar, para lanzar el satélite desde la superficie de la Tierra a su órbita.

Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m² · kg⁻²; $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg; $R_T = 6370$ km.

a) La fuerza gravitatoria que ejerce la Tierra sobre el satélite es la responsable del giro del satélite alrededor de nuestro planeta. Por tanto, podemos escribir:

$$F_C = F_G \to \frac{\cancel{m} \cdot v^2}{\cancel{r}} = \frac{G \cdot M_T \cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} \to v^2 = \frac{G \cdot M_T}{r} \to \left(\frac{2\pi \cdot r}{T}\right)^2 = \frac{G \cdot M_T}{r} \to \frac{4\pi^2 \cdot r^2}{T^2} = \frac{G \cdot M_T}{r} \to$$

$$\to T^2 = \frac{4\pi^2 \cdot r^3}{G \cdot M_T} \to T = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot r^3}{G \cdot M_T}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot \left[(6370+760) \cdot 10^3\ \text{m}\right]^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \dfrac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}\ \text{kg}}} = 5989{,}64\ \text{s}$$

b) La energía necesaria para lanzar el satélite es igual a la energía mecánica total del satélite en su órbita menos la energía del satélite en la superficie antes de lanzarlo.

$$E = \Delta E_M = E_{M\ \text{órbita}} - E_{M\ \text{superficie}}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 - \frac{G \cdot M \cdot m}{r}}_{E_{M\ \text{órbita}}} - \underbrace{\left(-\frac{G \cdot M \cdot m}{R_T}\right)}_{E_{M\ \text{superficie}}} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \left(\frac{2\pi \cdot r}{T}\right)^2 - \frac{G \cdot M \cdot m}{r} + \frac{G \cdot M \cdot m}{R_T} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot m \cdot \frac{4\pi^2 \cdot r^2}{T^2} + G \cdot M \cdot m \cdot \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{r}\right) = \frac{1}{2} \cdot 4{,}86 \cdot 10^3 \cdot \frac{4\pi^2 \cdot \left[(6370+760) \cdot 10^3\ \text{m}\right]^2}{(5989{,}64\ \text{s})^2} +$$

$$+ 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}\ \text{kg} \cdot 4{,}86 \cdot 10^3 \cdot \left(\frac{1}{6370 \cdot 10^3\ \text{m}} - \frac{1}{(6370+760) \cdot 10^3\ \text{m}}\right) = 3{,}24 \cdot 10^{10}\ \text{J}$$

23. Una lanzadera espacial pasa de una órbita circular a 200 km a otra a 520 km de altura sobre la superficie de la Tierra. Si la masa de la lanzadera es de 55 000 kg.

a) Calcula el periodo y la velocidad de la lanzadera en su órbita inicial.

b) ¿Qué energía necesita la lanzadera para desplazarse a la nueva órbita?

Datos: $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg; $R_T = 6370$ km.

a) La fuerza gravitatoria que ejerce la Tierra sobre la lanzadera es responsable del giro de la aeronave alrededor de la Tierra. En la órbita inicial:

$$F_C = F_G \to \frac{\cancel{m} \cdot v^2}{\cancel{r}} = \frac{G \cdot M_T \cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} \to v^2 = \frac{G \cdot M_T}{r} \to \left(\frac{2\pi \cdot r}{T}\right)^2 = \frac{G \cdot M_T}{r} \to \frac{4\pi^2 \cdot r^2}{T^2} = \frac{G \cdot M_T}{r} \to$$

$$\to T^2 = \frac{4\pi^2 \cdot r^3}{G \cdot M_T} \to T = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot r^3}{G \cdot M_T}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot \left[(6370+200) \cdot 10^3\ \text{m}\right]^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \dfrac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}\ \text{kg}}} = 5298\ \text{s}$$

La velocidad se calcula partiendo de la igualdad anterior:

$$F_C = F_G \to \frac{\cancel{m} \cdot v^2}{r} = \frac{G \cdot M_T \cdot \cancel{m}}{r^2} \to v = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \dfrac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}\ \text{kg}}{(6370+200) \cdot 10^3\ \text{m}}} = 7791{,}67\ \text{m/s}$$

b) Para pasar de una órbita a otra necesita una energía que será igual a la diferencia de energía mecánica de la lanzadera en ambas órbitas.

La energía mecánica viene dada por la expresión:

$$E_M = E_C + E_P = \frac{1}{2}\cdot m\cdot v^2 - \frac{G\cdot M\cdot m}{r}$$

Para la lanzadera la fuerza centrípeta es la fuerza gravitatoria:

$$F_C = F_G \rightarrow \frac{m\cdot v^2}{r} = \frac{G\cdot M_T\cdot m}{r^2} \rightarrow m\cdot v^2 = \frac{G\cdot M_T\cdot m}{r}$$

Entonces podemos sustituir esta expresión en la de la energía mecánica:

$$E_M = E_C + E_P = \frac{1}{2}\cdot m\cdot v^2 - \frac{G\cdot M_T\cdot m}{r} = \frac{1}{2}\cdot\frac{G\cdot M_T\cdot m}{r} - \frac{G\cdot M_T\cdot m}{r} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{G\cdot M_T\cdot m}{r}$$

Para calcular la energía pedida hay que hacer la diferencia entre la energía final y la energía inicial:

$$\Delta E_M = E_{M\text{ final}} - E_{M\text{ inicial}} = \left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{G\cdot M_T\cdot m}{r_{\text{final}}}\right) - \left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{G\cdot M_T\cdot m}{r_{\text{inicial}}}\right) = \frac{1}{2}\cdot G\cdot M_T\cdot m\cdot\left(\frac{1}{r_{\text{inicial}}} - \frac{1}{r_{\text{final}}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 6{,}67\cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{kg}^2}\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}\ \text{kg}\cdot 55\,000\ \text{kg}\cdot\left(\frac{1}{(6370+200)\cdot 10^3\ \text{m}} - \frac{1}{(6370+520)\cdot 10^3\ \text{m}}\right) = 7{,}75\cdot 10^{10}\ \text{J}$$

24. En un planeta esférico de radio 2200 km, la aceleración de la gravedad en la superficie es g_0 = 5,2 m · s⁻².

a) Determina la masa del planeta y la velocidad de escape desde su superficie.

b) ¿A qué altura *h* debe orbitar un satélite de 400 kg de masa que describa una órbita circular en un día?

Datos: G = 6,67 · 10⁻¹¹ N · m²/kg².

a) La masa puede calcularse sabiendo que la fuerza peso sobre la superficie de un planeta es la fuerza gravitatoria ejercida por dicho planeta. Es decir:

$$F_G = P \rightarrow G\cdot\frac{M\cdot \cancel{m}}{R^2} = \cancel{m}\cdot g_0 \rightarrow M = \frac{g_0\cdot R^2}{G} = \frac{5{,}2\ \text{m/s}^2\cdot\left(2200\cdot 10^3\ \text{m}\right)^2}{6{,}67\cdot 10^{-11}\ \dfrac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{kg}^2}} = 3{,}77\cdot 10^{23}\ \text{kg}$$

Para calcular la velocidad de escape hemos de considerar que es aquella que permite a un objeto lanzado escapar del campo gravitatorio. Esto quiere decir que la energía total en el lugar del lanzamiento es cero. Por tanto, escribimos la siguiente expresión:

$$E_M = 0 \rightarrow E_C + E_P = 0 \rightarrow \frac{1}{2}\cdot\cancel{m}\cdot v_{\text{escape}}^2 - \frac{G\cdot M\cdot\cancel{m}}{R} = 0 \rightarrow v_{\text{escape}}^2 = \frac{2\cdot G\cdot M}{R} \rightarrow$$

$$\rightarrow v_{\text{escape}} = \sqrt{\frac{2\cdot 6{,}67\cdot 10^{-11}\ \dfrac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{kg}^2}\cdot 3{,}77\cdot 10^{23}\ \text{kg}}{2200\cdot 10^3\ \text{m}}} = 4781{,}2\ \text{m/s}$$

b) Para calcular la altura partimos de la igualdad entre la fuerza centrípeta y la fuerza gravitatoria:

$$F_C = F_G \rightarrow \frac{\cancel{m}\cdot v^2}{r} = \frac{G\cdot M\cdot\cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} \rightarrow v^2 = \frac{G\cdot M}{r} \rightarrow \left(\frac{2\pi\cdot r}{T}\right)^2 = \frac{G\cdot M}{r} \rightarrow \frac{4\pi^2\cdot r^2}{T^2} = \frac{G\cdot M}{r} \rightarrow$$

$$\rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{G\cdot M\cdot T^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\ \dfrac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{kg}^2}\cdot 3{,}77\cdot 10^{23}\ \text{kg}\cdot\left(24\ \cancel{\text{h}}\cdot\dfrac{3600\ \text{s}}{1\ \cancel{\text{h}}}\right)^2}{4\pi^2}} = 1{,}681\cdot 10^7\ \text{m}$$

Como el radio del planeta es de 2200 km:

$$h = r - R = 1{,}681\cdot 10^7\ \text{m} - 2200\cdot 10^3\ \text{m} = 1{,}462\cdot 10^7\ \text{m}$$

Como se puede observar, la altura a la que debe orbitar el satélite es independiente de su masa.

25. **Un proyectil es lanzado desde el nivel del mar hasta una altura de $1{,}2 \cdot 10^6$ m sobre la superficie de la Tierra. Si la masa del proyectil es de 600 kg, calcula:**

a) Cuánto ha aumentado la energía potencial gravitatoria del proyectil.

b) Qué energía hay que suministrar al proyectil para que escape a la acción del campo gravitatorio terrestre desde esa altura.

Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m² · kg⁻²; $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg; $R_T = 6370$ km.

a) La energía potencial del cohete en un punto situado a una distancia r del centro de la Tierra es:

$$E_P = -\frac{G \cdot M \cdot m}{r}$$

Donde M es la masa de la Tierra y m la masa del cohete.

Por tanto, la diferencia entre la energía potencial final y la inicial es lo que ha aumentado la energía potencial del cohete:

$$\Delta E_P = E_{P\text{ final}} - E_{P\text{ inicial}} = \left(-\frac{G \cdot M \cdot m}{R+h}\right) - \left(-\frac{G \cdot M \cdot m}{R}\right) = G \cdot M \cdot m \cdot \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+h}\right) =$$

$$= 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}\ \text{kg} \cdot 600\ \text{kg} \cdot \left[\frac{1}{6370 \cdot 10^3\ \text{m}} - \frac{1}{(6370+1200) \cdot 10^3\ \text{m}}\right] = 5{,}976 \cdot 10^9\ \text{J}$$

b) Para escapar de la acción del campo gravitatorio terrestre la energía total debe ser cero. En la órbita inicial:

$$E_M = E_C + E_P = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 - \frac{G \cdot M \cdot m}{r}$$

La fuerza centrípeta es la fuerza gravitatoria:

$$F_C = F_G \rightarrow \frac{m \cdot v^2}{r} = \frac{G \cdot M \cdot m}{r^2} \rightarrow m \cdot v^2 = \frac{G \cdot M \cdot m}{r}$$

Entonces podemos sustituir esta expresión en la de la energía mecánica:

$$E_M = E_C + E_P = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 - \frac{G \cdot M \cdot m}{r} = \frac{1}{2} \cdot \frac{G \cdot M \cdot m}{r} - \frac{G \cdot M \cdot m}{r} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{G \cdot M \cdot m}{r}$$

Para hallar la energía pedida hay que calcular la energía mecánica.

$$E_M = -\frac{1}{2} \cdot \frac{G \cdot M \cdot m}{r} = -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}\ \text{kg} \cdot 600\ \text{kg}}{(6370+1200) \cdot 10^3\ \text{m}}\right) = -1{,}586 \cdot 10^{10}\ \text{J}$$

Por tanto, hay que comunicarle una energía de $1{,}586 \cdot 10^{10}$ J, pues de esta forma la energía total será nula y escapará de la atracción terrestre.

26. **Responde las siguientes cuestiones. Justifica las respuestas.**

a) ¿Cuál es la velocidad de un satélite en órbita circular en torno a la Tierra? Deduce su expresión.

b) ¿Cómo varía la velocidad de escape de un cuerpo si cambia su altura sobre la superficie terrestre de 2 R_T a 3 R_T?

a) El satélite gira alrededor de la Tierra porque existe una fuerza centrípeta: la fuerza de atracción gravitatoria. Cuanto más cerca de la Tierra orbite el satélite, mayor será su velocidad orbital y menor será su periodo.

La velocidad orbital puede calcularse en función de la distancia al centro de la Tierra:

$$F_C = F_G \rightarrow \frac{m \cdot v^2}{r} = \frac{G \cdot M_T \cdot m}{r^2} \rightarrow v = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r}}$$

b) La velocidad de escape es aquella que se necesita comunicar a un objeto para que escape de la atracción gravitatoria de la Tierra. Es decir, la velocidad necesaria para que la energía total sea cero.

$$E_M = 0 \rightarrow E_C + E_P = 0 \rightarrow \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2_{\text{escape}} - \frac{G \cdot M \cdot m}{R} = 0 \rightarrow v^2_{\text{escape}} = \frac{2 \cdot G \cdot M}{R}$$

Si la altura varía, la velocidad de escape también cambiará:

$$v^2_{\text{escape } 2R} = \frac{2 \cdot G \cdot M}{2 \cdot R}\ ;\ v^2_{\text{escape } 3R} = \frac{2 \cdot G \cdot M}{3 \cdot R}$$

Dividiendo ambas ecuaciones:

$$\frac{v^2_{\text{escape } 2R}}{v^2_{\text{escape } 3R}} = \frac{\dfrac{\cancel{2 \cdot G \cdot M}}{2 \cdot \cancel{R}}}{\dfrac{\cancel{2 \cdot G \cdot M}}{3 \cdot \cancel{R}}} = \frac{3}{2} \rightarrow \frac{v_{\text{escape } 2R}}{v_{\text{escape } 3R}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

Por lo tanto al aumentar la altura a la que se encuentra un cuerpo orbitando, la velocidad de escape disminuye.

27. Indica qué dimensiones tiene la intensidad del campo gravitatorio en el sistema internacional.

Podemos emplear la expresión que identifica el peso con la fuerza gravitatoria:

$$F_G = P \rightarrow G \cdot \frac{M \cdot m}{R^2} = m \cdot g \rightarrow g = G \cdot \frac{M}{R^2} \rightarrow [g] = \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{\text{kg}}{\text{m}^2} = \frac{\text{N}}{\text{kg}} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}}{\text{kg}} \rightarrow [g] = \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$$

28. Razona si es verdadera o falsa la siguiente afirmación y justifica la respuesta: «Si en un punto de un campo creado por varias masas la intensidad del campo es nula, también lo será el potencial gravitatorio».

La afirmación es falsa. El campo gravitatorio es una magnitud vectorial, y puede tener intensidad nula aunque haya varias masas creando el campo. Sin embargo, el potencial gravitatorio es una magnitud escalar, y las contribuciones de varias masas se suman, por lo que puede no anularse aunque sea nula la intensidad del campo gravitatorio.

Un ejemplo: si nos situamos en medio de dos masas iguales, el campo gravitatorio será nulo, mientras que el potencial total será la suma de los dos potenciales debidos a ambas masas en dicho punto.

29. Considera dos masas puntuales tales que $m_1 = m_2$. Situamos una tercera masa puntual entre ellas: m_3. ¿En qué punto entre las masas sería nula la fuerza? ¿Cuál sería la energía potencial de m_3 en esa posición?

La fuerza sería nula justo en el punto medio del segmento que une ambas masas iguales.

La energía potencial en esa posición sería:

$$E_P(m_3) = -\frac{G \cdot m_1 \cdot m_3}{r_{13}} - \frac{G \cdot m_2 \cdot m_3}{r_{23}} = -\frac{G \cdot m_1 \cdot m_3}{r} - \frac{G \cdot m_1 \cdot m_3}{r} = -2 \cdot \frac{G \cdot m_1 \cdot m_3}{r}$$

Donde r es la distancia de m_3 a m_1 y a m_2.

30. Una partícula se desplaza bajo la acción de una fuerza conservativa. ¿Aumenta o disminuye su energía potencial? ¿Y su energía cinética? Razona la respuesta.

Si la fuerza es conservativa, su energía potencial puede aumentar o disminuir en función del sentido de su desplazamiento en relación con la variación del campo. La energía cinética disminuirá o aumentará de manera inversa a como lo haga la energía potencial por el principio de conservación de la energía.

Por ejemplo, si un objeto cae, su energía potencial va disminuyendo, mientras que al mismo tiempo la energía cinética va aumentando.

31. Dos cuerpos de 2500 kg y 1500 kg, respectivamente, se encuentran separados una distancia de 4 m. Calcula:

a) El módulo de la fuerza de atracción entre ambos.

b) El valor del campo gravitatorio total en el punto medio de la recta que los une.

Dato: G = 6,67 · 10^{-11} N · m^2/kg^2.

a) La fuerza entre ambos se calcula aplicando la ley de la gravitación universal:

$$F_G = G\cdot\frac{m_1\cdot m_2}{r^2} = 6{,}67\cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{kg}^2}\cdot\frac{2500\ \text{kg}\cdot 1500\ \text{kg}}{(4\ \text{m})^2} = 1{,}56\cdot 10^{-5}\ \text{N}$$

b) El campo gravitatorio es la suma vectorial de ambos casos. En este caso los dos campos tienen la misma dirección y sentidos opuestos. El módulo del campo total será igual al módulo del campo que crea la masa mayor menos el módulo del campo que crea la masa menor. Vectorialmente sería:

$$\vec{g}_{\text{Total}} = \vec{g}_A + \vec{g}_B = -\frac{G\cdot m_A}{r_A^2}\cdot\vec{u}_{rA} - \frac{G\cdot m_B}{r_B^2}\cdot\vec{u}_{rB}$$

Donde $\vec{u}_{rA}$ y $\vec{u}_{rB}$ son los vectores unitarios dirigidos desde la masa correspondiente hasta el punto medio de la recta que los une.

Como los campos tienen sentidos opuestos, los vectores son opuestos, y como el cálculo se realiza en el punto medio, las distancias son iguales. Po tanto, podemos escribir:

$$\vec{g}_{\text{Total}} = \vec{g}_A + \vec{g}_B = -\frac{G\cdot m_A}{r_A^2}\cdot\vec{u}_{rA} - \frac{G\cdot m_B}{r_B^2}\cdot(-\vec{u}_{rA}) = -\frac{G\cdot m_A}{r_A^2}\cdot\vec{u}_{rA} + \frac{G\cdot m_B}{r_A^2}\cdot\vec{u}_{rA} = \frac{G}{r_A^2}\cdot(-m_A + m_B)\cdot\vec{u}_{rA} =$$

$$= \frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{kg}^2}}{(2\ \text{m})^2}\cdot(-2500\ \text{kg} + 1500\ \text{kg})\cdot\vec{u}_{rA} = -1{,}67\cdot 10^{-8}\ \vec{u}_{rA}\ \text{N/kg}$$

32. Según datos recogidos, la población mundial es de 7300 millones de habitantes (2015). Si suponemos que la masa media de una persona es de 60 kg, calcula:

a) El peso de todos los habitantes del planeta.

b) La fuerza gravitatoria y la energía gravitatoria entre dos personas separadas 10 m.

Datos: G = 6,67 · 10^{-11} N · m^2/kg^2; M_T = 5,98 · 10^{24} kg; R_T = 6370 km.

a) El peso es la fuerza gravitatoria que la Tierra ejerce sobre las masas.

$$F_G = G\cdot\frac{M_T\cdot m}{R_T^2} = 6{,}67\cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{kg}^2}\cdot\frac{5{,}98\cdot 10^{24}\ \text{kg}\cdot 7300\cdot 10^6\cdot 60\ \text{kg}}{(6370\cdot 10^3\ \text{m})^2} = 4{,}31\cdot 10^{12}\ \text{N}$$

b) De nuevo aplicamos la ley de la gravitación universal para calcular la fuerza gravitatoria:

$$F_G = G\cdot\frac{m_1\cdot m_2}{r^2} = 6{,}67\cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{kg}^2}\cdot\frac{60\ \text{kg}\cdot 60\ \text{kg}}{(10\ \text{m})^2} = 2{,}40\cdot 10^{-9}\ \text{N}$$

33. Un cuerpo de 2 kg de masa (m_1) se encuentra situado en el origen de coordenadas. Un segundo cuerpo de 3 kg de masa (m_2) se encuentra en el punto (6, 4) m. Calcula el módulo y el vector de la fuerza con que la masa m_1 atrae a la masa m_2.

Dato: G = 6,67 · 10^{-11} N · m^2/kg^2.

El vector con origen en una masa y extremo en la otra es el siguiente:

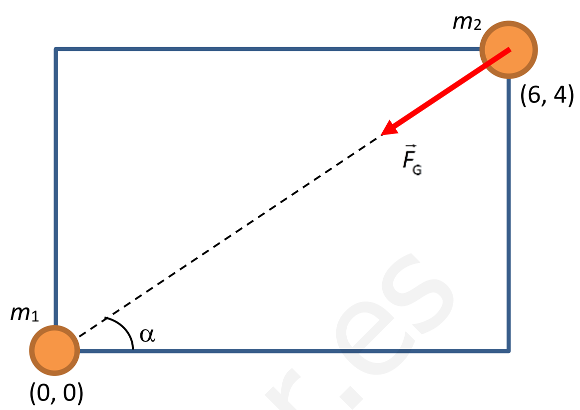
$$\vec{r} = (6, 4) - (0, 0) = (6 - 0, 4 - 0) = (6, 4) = 6\ \vec{i} + 4\ \vec{j}\ \text{m}$$

Su módulo es:

$$|\vec{r}| = r = \left|6\,\vec{i} + 4\,\vec{j}\right| = \sqrt{6^2 + 4^2} = 7{,}21\ \text{m}$$

Entonces el módulo de la fuerza ejercida es:

$$F_G = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{2\ \text{kg} \cdot 3\ \text{kg}}{(7{,}21\ \text{m})^2} = 7{,}70 \cdot 10^{-12}\ \text{N}$$



Y podemos calcular las componentes para determinar la dirección:

$$\vec{F}_G = -\left(7{,}70 \cdot 10^{-12}\ \text{N}\right) \cdot \cos\alpha\ \vec{i} - \left(7{,}70 \cdot 10^{-12}\ \text{N}\right) \cdot \operatorname{sen}\alpha\ \vec{j}$$

Donde α es el ángulo que forma la línea que una las masas con el eje horizontal.

Por definición de estas funciones trigonométricas podemos escribir:

$$\cos\alpha = \frac{6}{\sqrt{6^2 + 4^2}}\ ;\ \operatorname{sen}\alpha = \frac{4}{\sqrt{6^2 + 4^2}}$$

Y nos queda:

$$\vec{F}_G = -\left(7{,}70 \cdot 10^{-12}\ \text{N}\right) \cdot \frac{6}{\sqrt{6^2 + 4^2}}\ \vec{i} - \left(7{,}70 \cdot 10^{-12}\ \text{N}\right) \cdot \frac{4}{\sqrt{6^2 + 4^2}}\ \vec{j} = -6{,}41 \cdot 10^{-12}\ \vec{i} - 4{,}27 \cdot 10^{-12}\ \vec{j}$$

34. Dos partículas de masas 8 kg y 1 kg se encuentran en el vacío y separadas 40 cm. Calcula:

a) La energía potencial inicial del sistema y el trabajo realizado por la fuerza gravitatoria al aumentar la separación entre las partículas hasta 80 cm.

b) El trabajo necesario para separar las partículas desde la posición de partida hasta el infinito y el trabajo necesario para restablecer la distribución inicial.

Dato: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$.

a) La energía potencial inicial del sistema es:

$$E_{\text{P inicial}} = -\frac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{r} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 8\ \text{kg} \cdot 1\ \text{kg}}{0{,}4\ \text{m}} = -1{,}334 \cdot 10^{-9}\ \text{J}$$

El trabajo realizado por la fuerza gravitacional para separar las partículas desde una separación inicial de 40 cm hasta una separación final de 80 cm vendrá dado por el incremento de energía potencial cambiado de signo, es decir:

$$W = -\Delta E_P = -\left(E_{\text{P final}} - E_{\text{P inicial}}\right) = E_{\text{P inicial}} - E_{\text{P final}}$$

Calculamos la energía potencial final del sistema de la misma forma que la inicial:

$$E_{\text{P final}} = -\frac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{r} = -\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 8\ \text{kg} \cdot 1\ \text{kg}}{0{,}8\ \text{m}} = -6{,}67 \cdot 10^{-10}\ \text{J}$$

Por tanto:

$$W = E_{\text{P inicial}} - E_{\text{P final}} = -1{,}334 \cdot 10^{-9}\ \text{J} - \left(-6{,}67 \cdot 10^{-10}\ \text{J}\right) = -6{,}67 \cdot 10^{-10}\ \text{J}$$

b) El trabajo para separar las partículas desde la posición de partida hasta el infinito se calcula teniendo en cuenta que en el infinito, que es la nueva posición final, la energía potencial será cero. Por tanto:

$$W = -\Delta E_P = -\left(E_{P\,\text{final}} - E_{P\,\text{inicial}}\right) = E_{P\,\text{inicial}} - E_{P\,\text{final}} = -1{,}334 \cdot 10^{-9}\ \text{J} - 0 = -1{,}334 \cdot 10^{-9}\ \text{J}$$

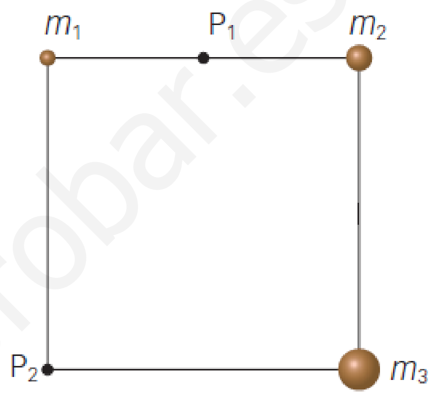
Es un trabajo negativo. Por lo que se necesita una fuerza externa.

El trabajo necesario para restablecer la distribución inicial se calcula análogamente. Teniendo en cuenta que ahora la posición inicial es el infinito, por tanto, la energía potencial será nula y la posición final será la inicial del problema; es decir, cuando se encuentran a 40 cm.

$$W = -\Delta E_P = -\left(E_{P\,\text{final}} - E_{P\,\text{inicial}}\right) = E_{P\,\text{inicial}} - E_{P\,\text{final}} = 0 - \left(-1{,}334 \cdot 10^{-9}\ \text{J}\right) = 1{,}334 \cdot 10^{-9}\ \text{J}$$

En este caso será un trabajo positivo, por tanto, lo realiza el sistema.

35. Tenemos tres masas puntuales en tres de los vértices de un cuadrado. Si m_2 y m_3 son el doble y el triple de m_1, respectivamente:



a) ¿Qué masa crea el campo más grande en el punto P_1?

b) Si el lado mide 100 m y $m_1 = 2{,}5$ Mt (millones de toneladas), ¿cuál es el valor del potencial gravitatorio creado por las tres masas en el punto P_1?

c) Calcula y representa gráficamente el campo gravitatorio total en el punto P_2.

Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg².

a) Calculemos el módulo del campo para cada masa. $r_1 = r_2$.
Necesitamos conocer el valor de r_3 en función de r_1.

Del dibujo se deduce:

$$r_3^2 = r_1^2 + \left(2 \cdot r_1\right)^2 = 5 \cdot r_1^2 \rightarrow r_3 = \sqrt{5 \cdot r_1^2} = \sqrt{5} \cdot r_1$$

Entonces queda:

$$g_1 = G \cdot \frac{m_1}{r_1^2};\ g_2 = G \cdot \frac{m_2}{r_2^2} = G \cdot \frac{2 \cdot m_1}{r_1^2};\ g_3 = G \cdot \frac{m_3}{r_3^2} = G \cdot \frac{3 \cdot m_1}{\left(\sqrt{5} \cdot r_1\right)^2} = G \cdot \frac{3 \cdot m_1}{5 \cdot r_1^2}$$

Comparando vemos que la masa m_2 es la que crea el campo mayor en P_1.

b) En este caso hay que tener en cuenta las contribuciones de todas las masas al potencial en ese punto según el principio de superposición:

$$V = -G \cdot \frac{m_1}{r_1} - G \cdot \frac{m_2}{r_2} - G \cdot \frac{m_3}{r_3} = -G \cdot \left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{2 \cdot m_1}{r_2} + \frac{3 \cdot m_1}{r_3}\right) = -G \cdot m_1 \cdot \left(\frac{1}{r_1} + \frac{2}{r_2} + \frac{3}{r_3}\right) =$$

$$= -6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 2{,}5 \cdot 10^9\ \text{kg} \cdot \left(\frac{1}{50\ \text{m}} + \frac{2}{50\ \text{m}} + \frac{3}{\sqrt{\left(50\ \text{m}\right)^2 + \left(100\ \text{m}\right)^2}}\right) = -1{,}45 \cdot 10^{-2}\ \text{N} \cdot \text{m}$$

c) El campo gravitatorio total en el punto P_2 viene dado según el principio de superposición por la expresión:

$$\vec{g}_T = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 + \vec{g}_3 = -G \cdot \frac{m_1}{r_1^2} \cdot \vec{u}_1 - G \cdot \frac{m_2}{r_2^2} \cdot \vec{u}_2 - G \cdot \frac{m_3}{r_3^2} \cdot \vec{u}_3$$

Los vectores de posición ahora son diferentes a los de los apartados anteriores. Ahora están referidos al punto P_2.

$$\vec{g}_T = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 + \vec{g}_3 = -G \cdot \frac{m_1}{r_1^2} \cdot \vec{u}_1 - G \cdot \frac{m_2}{r_2^2} \cdot \vec{u}_2 - G \cdot \frac{m_3}{r_3^2} \cdot \vec{u}_3 =$$

$$= G \cdot \frac{m_1}{r_1^2} \vec{j} + G \cdot \frac{2 \cdot m_1}{r_2^2} \cdot \left(\cos 45^\circ \, \vec{i} + \text{sen}\, 45^\circ \, \vec{j}\right) + G \cdot \frac{3 \cdot m_1}{r_3^2} \vec{i} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{2{,}5 \cdot 10^9 \text{ kg}}{(100 \text{ m})^2} \vec{j} +$$

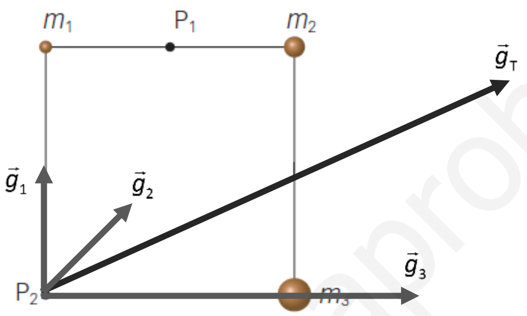
$$+ 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{2 \cdot 2{,}5 \cdot 10^9 \text{ kg}}{(100 \text{ m})^2 + (100 \text{ m})^2} \cdot \left(\cos 45^\circ \, \vec{i} + \text{sen}\, 45^\circ \, \vec{j}\right) + 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{3 \cdot 2{,}5 \cdot 10^9 \text{ kg}}{(100 \text{ m})^2} \vec{i} =$$

$$= 1{,}668 \cdot 10^{-5} \text{ N/kg} \, \vec{j} + \left(1{,}179 \cdot 10^{-5} \text{ N/kg} \, \vec{i} + 1{,}179 \cdot 10^{-5} \text{ N/kg} \, \vec{j}\right) + 5{,}002 \cdot 10^{-5} \text{ N/kg} \, \vec{i} =$$

$$= 6{,}181 \cdot 10^{-5} \text{ N/kg} \, \vec{i} + 2{,}847 \cdot 10^{-5} \text{ N/kg} \, \vec{j}$$

Nota: Este apartado se puede hacer de otra forma (calculando los vectores de posición y sus respectivos vectores unitarios).

Su representación gráfica es:



El ángulo α que forma el campo total con la horizontal es fácil de calcular:

$$\text{tg}\, \alpha = \frac{2{,}847 \cdot 10^{-5}}{6{,}181 \cdot 10^{-5}} \rightarrow \alpha = 24{,}73^\circ$$

36. Indica si es verdadera o falsa la siguiente afirmación y justifica la respuesta: «El trabajo realizado al trasladar una masa entre dos puntos de una misma superficie equipotencial nunca es cero».

Es falsa. Si la superficie es equipotencial, eso significa que la energía potencial es constante en todos los puntos de la superficie, y entonces al pasar de un punto a otro no habrá variación de energía potencial y, en consecuencia, el trabajo necesario para trasladar una masa de un punto a otro de la superficie equipotencial siempre será nulo.

37. Indica si es verdadera o falsa la siguiente afirmación y razona la respuesta: «La intensidad de un punto del campo gravitatorio terrestre es tanto mayor cuanto mayor es la altura a la que se encuentra desde la superficie terrestre».

Es falsa. La intensidad del campo gravitatorio disminuye con el cuadrado de la distancia a la masa que crea el campo. Si la altura es mayor, estamos más lejos de la masa que crea el campo gravitatorio y, por tanto, la intensidad será menor.

38. ¿Qué trabajo realiza una fuerza que actúa sobre una masa puntual que describe media órbita circular de radio *R* alrededor de otra masa? ¿Y si se desplazara desde esa distancia *R* hasta el infinito? Razona las respuestas.

El trabajo es nulo, puesto que si la órbita es circular no hay variación de energía potencial entre dos puntos de la misma.

Si se desplaza desde la órbita hasta el infinito, donde se considera que la energía total es cero, el trabajo necesario sería igual en valor absoluto y de signo positivo, a la energía total que tiene dicha masa en la órbita.

39. Contesta.

a) ¿Qué significa la velocidad de escape de un campo gravitatorio desde el punto de vista energético?

b) ¿Qué signo tiene la energía total de un cometa que describe una órbita hiperbólica?

a) La velocidad de escape es la velocidad necesaria para que la energía total de un cuerpo que se encuentra sometido a un campo gravitatorio sea nula.

b) Si la órbita es hiperbólica, la energía total del cometa es positiva porque el sistema no está ligado. Es negativa en caso de órbitas cerradas, como las elípticas.

40. Explica el concepto de energía potencial gravitatoria. ¿Qué energía potencial gravitatoria tiene una partícula de masa *m* situada a una distancia *r* de otra partícula de masa *M*? ¿En qué caso se puede utilizar la expresión para la energía potencial gravitatoria $E_P = m \cdot g \cdot h$?

La energía potencial gravitatoria es aquella que posee una masa por encontrarse bajo la influencia gravitatoria de otra u otras masas.

La energía potencial de un cuerpo en un punto coincide con el trabajo que tienen que realizar las fuerzas del campo para llevarlo desde ese punto hasta fuera del campo con velocidad constante. Matemáticamente, un punto fuera del campo está a una distancia infinita de la masa que crea el campo.

La energía potencial gravitatoria que tiene una partícula de masa *m* situada a una distancia *r* de otra de masa *M* viene dada por la expresión:

$$E_P = -\frac{G \cdot M \cdot m}{r}$$

Para pequeñas distancias sobre la superficie de la Tierra se puede considerar que la E_P varía linealmente con la altura ($E_P = m \cdot g \cdot h$). A mayores distancias, la E_P varía con el inverso de la distancia *r* y se hace nula en el infinito. (Ver el apartado «¿De dónde viene $E_P = m \cdot g \cdot h$?» del epígrafe «Energía potencial gravitatoria» del libro de texto).

41. Sean dos planetas tal que el radio y la masa del primer planeta son el doble que los del segundo. Si el peso de una persona en el segundo planeta es *P*, ¿cuánto sería en el primero?

El peso es la fuerza de atracción gravitatoria que ejerce un planeta sobre la persona. Para el primer planeta:

$$P_1 = F_{G\,1} = G \cdot \frac{M_1 \cdot m}{R_1^2}$$

De forma análoga, para el segundo planeta:

$$P_2 = F_{G\,2} = G \cdot \frac{M_2 \cdot m}{R_2^2} = G \cdot \frac{\frac{M_1}{2} \cdot m}{\left(\frac{R_1}{2}\right)^2} = G \cdot \frac{\frac{M_1}{2} \cdot m}{\frac{R_1^2}{4}} = G \cdot \frac{4 \cdot M_1 \cdot m}{2 \cdot R_1^2} = 2 \cdot G \cdot \frac{M_1 \cdot m}{R_1^2} = 2 \cdot P_1$$

Por tanto:

$$P_2 = 2 \cdot P_1 \rightarrow P_1 = P_2 / 2 = P / 2$$

Es decir que el peso de la persona en el primer planeta es la mitad que en el segundo planeta.

42. Dos planetas tienen la misma densidad y distinto radio. Si el radio de uno es 7000 km y el del otro es 6000 km, calcula:

a) La relación que existe entre las aceleraciones de la gravedad en la superficie de cada planeta.

b) La relación entre las velocidades de escape en cada planeta.

a) Para cada planeta el peso es la fuerza de atracción gravitatoria, de esta igualdad obtenemos la expresión para el módulo de la intensidad del campo gravitatorio:

$$P = F_G \rightarrow G \cdot \frac{M \cdot m}{R^2} = m \cdot g \rightarrow g = G \cdot \frac{M}{R^2}$$

Calculamos el cociente entre las intensidades del campo gravitatorio en la superficie de cada planeta:

$$\frac{g_1}{g_2} = \frac{\cancel{G} \cdot \frac{M_1}{R_1^2}}{\cancel{G} \cdot \frac{M_2}{R_2^2}} = \frac{M_1 \cdot R_2^2}{M_2 \cdot R_1^2}$$

La densidad puede escribirse así:

$$d = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi \cdot R^3}$$

Si las densidades son iguales:

$$d_1 = d_2 \rightarrow \frac{M_1}{\frac{4}{\cancel{3}}\pi \cdot R_1^3} = \frac{M_2}{\frac{4}{\cancel{3}}\pi \cdot R_2^3} \rightarrow \frac{M_1}{R_1^3} = \frac{M_2}{R_2^3} \rightarrow \frac{M_1}{M_2} = \frac{R_1^3}{R_2^3}$$

Entonces podemos retomar la ecuación de arriba obteniendo:

$$\frac{g_1}{g_2} = \frac{M_1 \cdot R_2^2}{M_2 \cdot R_1^2} = \frac{R_1^3}{R_2^3} \cdot \frac{R_2^2}{R_1^2} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{7000\text{ km}}{6000\text{ km}} \rightarrow \frac{g_1}{g_2} = \frac{7}{6} \rightarrow g_1 = 1{,}167 \cdot g_2$$

b) La velocidad de escape es aquella necesaria para que una masa situada sobre la superficie del planeta escape de la atracción gravitatoria. Es decir, para que su energía total sea cero. Podemos escribir entonces:

$$E_M = 0 \rightarrow E_C + E_P = 0 \rightarrow \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_{\text{escape}}^2 - \frac{G \cdot M \cdot m}{R} = 0 \rightarrow v_{\text{escape}}^2 = \frac{2 \cdot G \cdot M}{R}$$

Para cada planeta:

$$v_{\text{escape 1}} = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M_1}{R_1}}\ ;\ v_{\text{escape 2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M_2}{R_2}}$$

Dividiendo ambas ecuaciones, y utilizando la relación de masas obtenida anteriormente a partir de la igualdad de las densidades de cada planeta, obtenemos:

$$\frac{v_{\text{escape 1}}}{v_{\text{escape 2}}} = \frac{\sqrt{\frac{\cancel{2 \cdot G} \cdot M_1}{R_1}}}{\sqrt{\frac{\cancel{2 \cdot G} \cdot M_2}{R_2}}} = \sqrt{\frac{\frac{M_1}{R_1}}{\frac{M_2}{R_2}}} = \sqrt{\frac{M_1 \cdot R_2}{M_2 \cdot R_1}} = \sqrt{\frac{R_1^3}{R_2^3} \cdot \frac{R_2}{R_1}} = \sqrt{\frac{R_1^2}{R_2^2}} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{7000\text{ km}}{6000\text{km}} \rightarrow \frac{v_{\text{escape 1}}}{v_{\text{escape 2}}} = \frac{7}{6}$$

$$\rightarrow v_{\text{escape 1}} = 1{,}167 \cdot v_{\text{escape 2}}$$

43. Supongamos que en otra galaxia alejada de la nuestra existe un planeta cuya masa M es cuatro veces la masa de la Tierra ($M = 4M_T$). Además, la intensidad del campo gravitatorio en su superficie coincide con la existente en la superficie terrestre, $g = g_T$.

a) ¿Cuál será la relación entre los radios de ambos planetas, R/R_T?

b) ¿Desde la superficie de qué planeta será mayor la velocidad de escape? Determina la relación entre ambas.

Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg²; $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg; $R_T = 6370$ km.

a) Si la intensidad del campo gravitatorio es igual en ambos planetas, podemos escribir:

$$g = g_T \rightarrow \cancel{G} \cdot \frac{M}{R^2} = \cancel{G} \cdot \frac{M_T}{R_T^2} \rightarrow \frac{M}{R^2} = \frac{M_T}{R_T^2} \rightarrow \frac{R^2}{R_T^2} = \frac{M}{M_T} \rightarrow \frac{R}{R_T} = \sqrt{\frac{M}{M_T}} = \sqrt{\frac{4 \cdot \cancel{M_T}}{\cancel{M_T}}} \rightarrow \frac{R}{R_T} = 2$$

Donde M y R son la masa y el radio del planeta.

Por tanto, el radio del planeta es el doble que el de la Tierra.

b) La velocidad de escape es aquella necesaria para que una masa situada sobre la superficie del planeta escape de la atracción gravitatoria. Es decir, para que su energía total sea cero. Podemos escribir entonces:

$$E_M = 0 \rightarrow E_C + E_P = 0 \rightarrow \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_{\text{escape}}^2 - \frac{G \cdot M \cdot m}{R} = 0 \rightarrow v_{\text{escape}}^2 = \frac{2 \cdot G \cdot M}{R}$$

Para cada planeta:

$$v_{\text{escape P}} = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M}{R}} \; ; \; v_{\text{escape T}} = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M_T}{R_T}}$$

Dividiendo ambas ecuaciones:

$$\frac{v_{\text{escape P}}}{v_{\text{escape T}}} = \frac{\sqrt{\frac{\cancel{2 \cdot G} \cdot M}{R}}}{\sqrt{\frac{\cancel{2 \cdot G} \cdot M_T}{R_T}}} = \sqrt{\frac{\frac{M}{R}}{\frac{M_T}{R_T}}} = \sqrt{\frac{M \cdot R_T}{M_T \cdot R}} = \sqrt{\frac{4 \cdot \cancel{M_T} \cdot \cancel{R_T}}{\cancel{M_T} \cdot 2 \cdot \cancel{R_T}}} = \sqrt{2} \rightarrow \frac{v_{\text{escape P}}}{v_{\text{escape T}}} = \sqrt{2}$$

Es decir, es mayor la velocidad de escape desde la superficie del planeta situado en la otra galaxia.

44. El 28 de septiembre de 2015 hubo una «superluna»: la Luna estuvo a 356 876 km de la Tierra, la menor distancia en su órbita elíptica. El 11 de octubre se situó a 406 450 km, la mayor distancia. Calcula la diferencia entre el valor de la gravedad creada por la Luna en la Tierra esos días.

Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg²; $M_{\text{Luna}} = 7{,}2 \cdot 10^{22}$ kg.

Llamamos 1 a la posición más cercana y 2 a la más alejada. Escribimos la expresión de la fuerza gravitatoria que la Tierra ejerció sobre la Luna en ambas situaciones:

$$g_{\text{Luna}} = G \cdot \frac{M_L}{r^2} \rightarrow g_{\text{Luna1}} - g_{\text{Luna2}} = G \cdot \frac{M_L}{r_1^2} - G \cdot \frac{M_L}{r_2^2} = G \cdot M_L \cdot \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2} \right) =$$

$$= 6{,}67 \cdot 10^{-11} \, \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 7{,}2 \cdot 10^{22} \text{ kg} \cdot \left(\frac{1}{(356\,876\,000 \text{ m})^2} - \frac{1}{(406\,450\,000 \text{ m})^2} \right) = 8{,}65 \cdot 10^{-6} \text{ N/kg}$$

45. Un satélite artificial de 200 kg orbita a una altura *h* sobre la superficie terrestre donde el valor de la gravedad es la tercera parte de su valor en la superficie de la Tierra.

a) ¿Se realiza trabajo para mantener el satélite en órbita?

b) Calcula el radio, el periodo de la órbita y la energía mecánica del satélite.

Datos: $g_0 = 9{,}8$ m · s^{-2} ; $R_T = 6{,}37 \cdot 10^6$ m.

a) No, puesto que la energía del satélite es la misma en cualquier punto de su órbita.

b) Partiendo de que el peso es la fuerza de atracción gravitatoria, obtenemos la siguiente expresión para la aceleración de la gravedad en la superficie terrestre:

$$P = F_G \rightarrow G \cdot \frac{M_T \cdot m}{R_T^2} = m \cdot g_0 \rightarrow g_0 = G \cdot \frac{M_T}{R_T^2}$$

De forma análoga obtenemos una expresión para la aceleración de la gravedad a una altura h:

$$g_h = G \cdot \frac{M_T}{(R_T + h)^2}$$

Dividiendo esta ecuación entre la anterior y teniendo en cuenta que a la altura h el valor de la aceleración de la gravedad es la tercera parte de su valor en la superficie obtenemos:

$$\frac{g_h}{g_0} = \frac{\cancel{G} \cdot \frac{\cancel{M_T}}{(R_T + h)^2}}{\cancel{G} \cdot \frac{\cancel{M_T}}{R_T^2}} = \frac{1}{3} \rightarrow \frac{R_T^2}{(R_T + h)^2} = \frac{1}{3} \rightarrow \frac{R_T}{R_T + h} = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

La fuerza centrípeta responsable del giro del satélite es la fuerza gravitatoria. De esta igualdad obtenemos la expresión para la velocidad:

$$F_C = F_G \rightarrow \frac{\cancel{m} \cdot v^2}{\cancel{r}} = \frac{G \cdot M_T \cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} \rightarrow v^2 = \frac{G \cdot M_T}{r}$$

Como en el enunciado no nos facilitan la masa de la Tierra, utilizamos la expresión para la aceleración de la gravedad en la superficie terrestre:

$$v^2 = \frac{G \cdot M_T}{r} = \frac{g_0 \cdot R_T^2}{r}$$

Utilizando la relación entre la aceleración de la gravedad a una altura h y en la superficie terrestre obtenemos:

$$v = \sqrt{\frac{g_0 \cdot R_T^2}{R_T + h}} = \sqrt{\frac{g_0 \cdot R_T \cdot R_T}{R_T + h}} = \sqrt{g_0 \cdot R_T \cdot \sqrt{\frac{1}{3}}} = \sqrt{9{,}8\ \text{m/s}^2 \cdot 6{,}37 \cdot 10^6\ \text{m} \cdot \sqrt{\frac{1}{3}}} = 6003{,}47\ \text{m/s}$$

Ahora podemos partir de la igualdad entre la fuerza centrípeta y la fuerza gravitatoria anterior y, utilizando las relaciones anteriores, despejar el radio de la órbita:

$$\frac{\cancel{m} \cdot v^2}{\cancel{r}} = \frac{G \cdot M_T \cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} \rightarrow v^2 = \frac{G \cdot M_T}{r} \rightarrow r = \frac{G \cdot M_T}{v^2} = \frac{g_0 \cdot R_T^2}{v^2} = \frac{9{,}8\ \text{m/s}^2 \cdot (6{,}37 \cdot 10^6\ \text{m})^2}{(6003{,}47\ \text{m/s})^2} = 1{,}103 \cdot 10^7\ \text{m}$$

A partir de aquí es sencillo calcular el periodo:

$$v = \frac{2\pi \cdot r}{T} \rightarrow T = \frac{2\pi \cdot r}{v} = \frac{2\pi \cdot 1{,}103 \cdot 10^7\ \text{m}}{6003{,}47\ \text{m/s}} = 11\,543{,}9\ \text{s} = 3\ \text{h}\ 12\ \text{min}\ 23{,}9\ \text{s}$$

La energía total del satélite es la suma de la energía cinética y la energía potencial:

$$E_M = E_C + E_P = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 - \frac{G \cdot M_T \cdot m}{r} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 - \frac{g_0 \cdot R_T^2 \cdot m}{r} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 200\ \text{kg} \cdot (6003{,}47\ \text{m/s})^2 - \frac{9{,}8\ \text{m/s} \cdot (6{,}37 \cdot 10^6\ \text{m})^2 \cdot 200\ \text{kg}}{1{,}103 \cdot 10^7\ \text{m}} = -3{,}61 \cdot 10^9\ \text{J}$$

46. El satélite *Astra 2C*, empleado para emitir señales de televisión, es un satélite en órbita circular geoestacionaria.

a) Calcula la altura a la que orbita respecto de la superficie de la Tierra y su velocidad.

b) Calcula la energía invertida para llevar el satélite desde la superficie de la Tierra hasta su órbita.

Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg²; $R_T = 6370$ km; $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg; masa del satélite, $m = 4500$ kg.

a) Como su órbita es geoestacionaria, sabemos que su periodo de rotación alrededor de la Tierra es de 24 horas. Teniendo en cuenta que la fuerza centrípeta es la fuerza gravitatoria:

$$F_C = F_G \rightarrow \frac{\cancel{m} \cdot v^2}{r} = \frac{G \cdot M_T \cdot \cancel{m}}{r^2} \rightarrow \frac{v^2}{r} = \frac{G \cdot M_T}{r^2} \rightarrow \frac{\left(\frac{2\pi \cdot r}{T}\right)^2}{r} = \frac{G \cdot M_T}{r^2} \rightarrow \frac{4\pi^2 \cdot r^2}{T^2 \cdot \cancel{r}} = \frac{G \cdot M_T}{r^{\cancel{2}}}$$

Despejando el radio:

$$r = \sqrt[3]{\frac{G \cdot M_T \cdot T^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}\ \text{kg} \cdot \left(24\ \cancel{\text{h}} \cdot \frac{3600\ \text{s}}{1\ \cancel{\text{h}}}\right)^2}{4\pi^2}} = 4{,}225 \cdot 10^7\ \text{m}$$

La altura será este valor menos el radio terrestre:

$$h = 4{,}225 \cdot 10^7\ \text{m} - 6370 \cdot 10^3\ \text{m} = 3{,}588 \cdot 10^7\ \text{m} = 35\,880\ \text{km}$$

Para calcular la velocidad partimos, al igual que antes, de la igualdad entre la fuerza centrípeta y la fuerza gravitatoria:

$$F_C = F_G \rightarrow \frac{\cancel{m} \cdot v^2}{\cancel{r}} = \frac{G \cdot M_T \cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} \rightarrow v^2 = \frac{G \cdot M_T}{r} \rightarrow v = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r}}$$

Sustituyendo valores obtenemos:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}\ \text{kg}}{4{,}225 \cdot 10^7\ \text{m}}} = 3072{,}59\ \text{m/s}$$

b) La energía invertida será igual a la energía final del satélite en su órbita menos la energía que tenía antes de ponerlo en órbita. Por tanto, podemos escribir:

$$E = E_{\text{final}} - E_{\text{inicial}} = (E_C + E_P)_{\text{final}} - (E_C + E_P)_{\text{inicial}}$$

Esta ecuación se puede escribir así:

$$E = E_{\text{final}} - E_{\text{inicial}} = (E_C + E_P)_{\text{final}} - (E_C + E_P)_{\text{inicial}} = \left(\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 - \frac{G \cdot M_T \cdot m}{r}\right) - \left(0 - \frac{G \cdot M_T \cdot m}{R_T}\right) =$$

Donde r es la distancia desde el centro de la Tierra al satélite en su órbita y v la velocidad del satélite en órbita. Como no tenemos esta velocidad, debemos expresarlo en función de magnitudes conocidas. Esto lo hacemos a partir de la igualdad de la fuerza centrípeta y la fuerza gravitatoria:

$$\frac{m \cdot v^2}{r} = \frac{G \cdot M_T \cdot m}{r^2} \rightarrow m \cdot v^2 = \frac{G \cdot M_T \cdot m}{r}$$

Por tanto:

$$E = \left(\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 - \frac{G \cdot M_T \cdot m}{r}\right) - \left(0 - \frac{G \cdot M_T \cdot m}{R_T}\right) = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{G \cdot M_T \cdot m}{r} - \frac{G \cdot M_T \cdot m}{r}\right) + \frac{G \cdot M_T \cdot m}{R_T} =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{G \cdot M_T \cdot m}{r} + \frac{G \cdot M_T \cdot m}{R_T} = G \cdot M_T \cdot m \cdot \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{2 \cdot r}\right) =$$

$$= 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}\ \text{kg} \cdot 4500\ \text{kg} \cdot \left(\frac{1}{6370 \cdot 10^3\ \text{m}} - \frac{1}{2 \cdot 4{,}225 \cdot 10^7\ \text{m}}\right) = 2{,}61 \cdot 10^{11}\ \text{J}$$

47. La luna Ío de Júpiter tiene una masa de 8,94 · 10^{22} kg y una gravedad en su superficie de 1,81 m/s^2.

a) Calcula el radio en kilómetros de Ío y su volumen.

b) Una sonda está en caída libre hacia la superficie de Ío. A 5000 km del centro de la luna la velocidad de la sonda es de 1250 m/s. ¿Qué velocidad tendrá la sonda a 2000 km del centro?

Datos: G = 6,67 · 10^{-11} N · m^2/kg^2.

a) El peso de un objeto sobre la superficie de Ío se debe a la fuerza gravitatoria que este ejerce:

$$P = F_G \to G \cdot \frac{M_{Ío} \cdot \cancel{m}}{R_{Ío}^2} = \cancel{m} \cdot g_{Ío} \to R_{Ío} = \sqrt{\frac{G \cdot M_{Ío}}{g_{Ío}}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 8{,}94 \cdot 10^{22}\ \text{kg}}{1{,}81\ \text{m/s}^2}} = 1{,}815 \cdot 10^6\ \text{m} = 1815\ \text{km}$$

El volumen será entonces:

$$V_{Ío} = \frac{4}{3}\pi \cdot R_{Ío}^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot \left(1{,}815 \cdot 10^6\ \text{m}\right)^3 = 2{,}50 \cdot 10^{19}\ \text{m}^3$$

b) El problema puede resolverse aplicando el principio de conservación de la energía. La suma de las energías cinética y potencial gravitatoria debe ser la misma en ambos puntos. Por tanto:

$$\left(E_C + E_P\right)_{\text{final}} = \left(E_C + E_P\right)_{\text{inicial}}$$

Podemos escribir la siguiente relación igualando la fuerza centrípeta a la fuerza gravitatoria:

$$\frac{m \cdot v^2}{r} = \frac{G \cdot M_{Ío} \cdot m}{r^2} \to m \cdot v^2 = \frac{G \cdot M_{Ío} \cdot m}{r}$$

Entonces la ecuación anterior se puede escribir así:

$$\left(E_C + E_P\right)_{\text{final}} = \left(E_C + E_P\right)_{\text{inicial}} \to \frac{1}{2} \cdot \cancel{m} \cdot v_{\text{final}}^2 - \frac{G \cdot M_{Ío} \cdot \cancel{m}}{r_{\text{Final}}} = \frac{1}{2} \cdot \cancel{m} \cdot v_{\text{inicial}}^2 - \frac{G \cdot M_{Ío} \cdot \cancel{m}}{r_{\text{inicial}}} \to$$

$$\to v_{\text{final}}^2 = v_{\text{inicial}}^2 + 2 \cdot \left(\frac{G \cdot M_{Ío}}{r_{\text{final}}} - \frac{G \cdot M_{Ío}}{r_{\text{inicial}}}\right) \to v_{\text{Final}} = \sqrt{v_{\text{inicial}}^2 + 2 \cdot G \cdot M_{Ío} \cdot \left(\frac{1}{r_{\text{final}}} - \frac{1}{r_{\text{inicial}}}\right)} =$$

$$= \sqrt{\left(1250\ \text{m/s}\right)^2 + 2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 8{,}94 \cdot 10^{22}\ \text{kg} \cdot \left(\frac{1}{2000 \cdot 10^3\ \text{m}} - \frac{1}{5000 \cdot 10^3\ \text{m}}\right)} = 2267{,}2\ \text{m/s}$$

48. En 1969 Michael Collins tripulaba el módulo del mando Columbia, de la misión Apollo 11, mientras Neil Armstrong y Edwin Aldrin caminaban sobre la Luna. La nave orbitaba a 100 km de altura sobre la superficie de la Luna con un periodo de 118 min. Calcula:

a) La masa de la Luna y la intensidad del campo gravitatorio en la superficie lunar.

b) La velocidad de escape desde la superficie lunar.

Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg²; $R_{\text{Luna}} = 1{,}74 \cdot 10^3$ km.

a) La Luna atraía al módulo de mando y lo hacía girar a su alrededor. En este movimiento podemos identificar la fuerza gravitatoria con la fuerza centrípeta:

$$F_C = F_G \to \frac{\cancel{m} \cdot v^2}{\cancel{r}} = \frac{G \cdot M_L \cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} \to v^2 = \frac{G \cdot M_L}{r} \to \left(\frac{2\pi \cdot r}{T}\right)^2 = \frac{G \cdot M_L}{r} \to \frac{4\pi^2 \cdot r^2}{T^2} = \frac{G \cdot M_L}{r} \to$$

$$\to M_L = \frac{4\pi^2 \cdot r^3}{G \cdot T^2} = \frac{4\pi^2 \cdot \left(1{,}74 \cdot 10^6\ \text{m} + 100 \cdot 10^3\ \text{m}\right)^3}{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \left(118\ \cancel{\text{min}} \cdot \frac{60\ \text{s}}{1\ \cancel{\text{min}}}\right)^2} = 7{,}356 \cdot 10^{22}\ \text{kg}$$

En la superficie lunar la intensidad del campo gravitatorio es:

$$g = \frac{G \cdot M_L}{R_L^2} = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 7{,}36 \cdot 10^{22}\ \text{kg}}{\left(1{,}74 \cdot 10^6\ \text{m}\right)^2} = 1{,}62\ \text{N/m} = 1{,}62\ \text{m/s}^2$$

b) La velocidad de escape desde la superficie lunar es la velocidad necesaria para conseguir que una masa escape del campo gravitatorio de la Luna; es decir, para conseguir que su energía total sea cero. Por tanto:

$$E_M = 0 \rightarrow E_C + E_P = 0 \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \cancel{m} \cdot v_{\text{escape}}^2 - \frac{G \cdot M_L \cdot \cancel{m}}{R_L} = 0 \rightarrow v_{\text{escape}}^2 = \frac{2 \cdot G \cdot M_L}{R_L} \rightarrow$$

$$\rightarrow v_{\text{escape}} = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M_L}{R_L}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 7{,}36 \cdot 10^{22}\ \text{kg}}{1{,}74 \cdot 10^6\ \text{m}}} = 2375{,}43\ \text{m/s} = 8551{,}55\ \text{km/h}$$

49. La Estación Espacial Internacional, de 280 000 kg de masa, gira a una altura media de 360 km sobre la superficie de la Tierra siguiendo una órbita circular. Debido al rozamiento con la alta atmósfera, su altura disminuye continuamente. Por este motivo, la estación ha descendido hasta una órbita circular de 340 km de altura.

Calcula:

a) Las velocidades orbitales a 340 km y 360 km de altura.

b) La energía necesaria para recuperar la órbita inicial.

c) La diferencia en el periodo de las órbitas.

Datos: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N · m²/kg²; $M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg; $R_T = 6370$ km.

a) La fuerza centrípeta que obliga a girar a la estación espacial es la fuerza gravitatoria que ejerce la Tierra sobre ella. Por tanto:

$$F_C = F_G \rightarrow \frac{\cancel{m} \cdot v^2}{\cancel{r}} = \frac{G \cdot M_T \cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} \rightarrow v_{360\ \text{km}} = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r_{360\ \text{km}}}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}\ \text{kg}}{(6370 + 360) \cdot 10^3\ \text{m}}} = 7698{,}5\ \text{m/s}$$

Análogamente:

$$v_{340\ \text{km}} = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r_{340\ \text{km}}}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}\ \text{kg}}{(6370 + 340) \cdot 10^3\ \text{m}}} = 7710{,}0\ \text{m/s}$$

b) Para recuperar la órbita inicial hay que proporcionar a la Estación Espacial una energía igual a la diferencia de energía entre la órbita de más altura y la de menos altura, es decir:

$$E = E_{\text{final}} - E_{\text{inicial}} = (E_C + E_P)_{\text{final}} - (E_C + E_P)_{\text{inicial}}$$

Podemos escribir esta relación utilizando la igualdad de la fuerza centrípeta y la fuerza gravitatoria:

$$\frac{m \cdot v^2}{r} = \frac{G \cdot M_T \cdot m}{r^2} \rightarrow m \cdot v^2 = \frac{G \cdot M_T \cdot m}{r}$$

Entonces la ecuación anterior se puede escribir así:

$$E = E_{\text{final}} - E_{\text{inicial}} = (E_C + E_P)_{\text{final}} - (E_C + E_P)_{\text{inicial}} = \left(\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_{\text{final}}^2 - \frac{G \cdot M_T \cdot m}{r_{\text{final}}}\right) - \left(\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_{\text{inicial}}^2 - \frac{G \cdot M_T \cdot m}{r_{\text{inicial}}}\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{G \cdot M_T \cdot m}{r_{\text{final}}} - \frac{G \cdot M_T \cdot m}{r_{\text{final}}}\right) - \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{G \cdot M_T \cdot m}{r_{\text{inicial}}} - \frac{G \cdot M_T \cdot m}{r_{\text{inicial}}}\right) =$$

$$= \left[\left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{G \cdot M_T \cdot m}{r_{\text{final}}}\right) - \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{G \cdot M_T \cdot m}{r_{\text{inicial}}}\right)\right] = \frac{1}{2} \cdot G \cdot M_T \cdot m \left(\frac{1}{r_{\text{inicial}}} - \frac{1}{r_{\text{final}}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}\ \text{kg} \cdot 2{,}8 \cdot 10^5\ \text{kg} \cdot \left(\frac{1}{(6370 + 340) \cdot 10^3\ \text{m}} - \frac{1}{(6370 + 360) \cdot 10^3\ \text{m}}\right) = 2{,}47 \cdot 10^{10}\ \text{J}$$

c) El periodo de cada órbita se puede calcular a partir de la ecuación que identifica la fuerza centrípeta con la fuerza gravitatoria:

$$F_C = F_G \rightarrow \frac{m \cdot v^2}{r} = \frac{G \cdot M_T \cdot m}{r^2} \rightarrow \frac{v^2}{r} = \frac{G \cdot M_T}{r^2} \rightarrow$$

$$\frac{\left(\frac{2\pi \cdot r}{T}\right)^2}{r} = \frac{G \cdot M_T}{r^2} \rightarrow \frac{4\pi^2 \cdot r^2}{T^2 \cdot r} = \frac{G \cdot M_T}{r^2} \rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 \cdot r^3}{G \cdot M_T} \rightarrow T = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot r^3}{G \cdot M_T}}$$

Es decir, el periodo depende únicamente de la distancia a la que se encuentra la Estación Espacial en la órbita. Por tanto, aplicando la ecuación anterior a ambas órbitas:

$$T_{360\text{ km}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot r^3_{360\text{ km}}}{G \cdot M_T}}\ ;\ T_{340\text{ km}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot r^3_{340\text{ km}}}{G \cdot M_T}}$$

Será mayor el periodo correspondiente a la órbita de mayor altura. Como nos piden la diferencia entre ambos periodos:

$$T_{360\text{ km}} - T_{340\text{ km}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot r^3_{360\text{ km}}}{G \cdot M_T}} - \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot r^3_{340\text{ km}}}{G \cdot M_T}} = \sqrt{\frac{4\pi^2}{G \cdot M_T}} \cdot \left(\sqrt{r^3_{360\text{ km}}} - \sqrt{r^3_{340\text{ km}}}\right) =$$

$$= \sqrt{\frac{4\pi^2}{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}\ \text{kg}}} \cdot \left(\sqrt{\left[(6370+360) \cdot 10^3\ \text{m}\right]^3} - \sqrt{\left[(6370+340) \cdot 10^3\ \text{m}\right]^3}\right) =$$

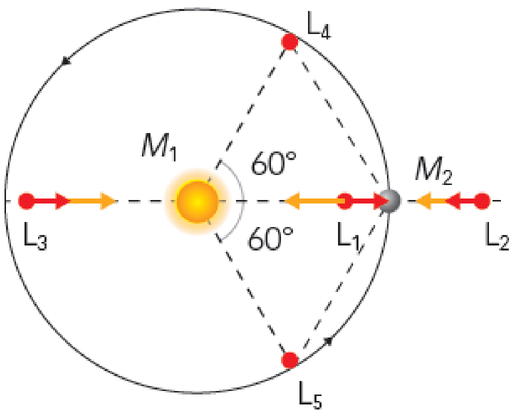
$$= 24{,}47\ \text{s}$$

50. Prepara una presentación acerca de los distintos tipos de satélites, LEO, MEO y GEO. Incluye su aplicación, las características de las naves, órbita, periodo, etc.

Respuesta libre.

51. Los puntos de Lagrange son los cinco puntos en los que un cuerpo de masa despreciable, en el campo gravitatorio creado por otros dos cuerpos de masa M_1 y M_2, siendo $M_1 > M_2$, tiene una órbita síncrona a la que describe M_2 al girar en torno a M_1. Tres de estos puntos, L_1, L_2 y L_3, están en la línea que une M_1 y M_2. Localízalos en un diagrama y razona por qué la distancia que separa L_1 de M_1 es la menor, y la que separa L_2 de M_1 es la mayor.

Respuesta gráfica. La situación de los puntos de Lagrange es la siguiente:



Los puntos de Lagrange son aquellos en los que un objeto de masa despreciable respecto a M_1 y M_2 describe una órbita con un periodo igual que el que tiene M_2 en su giro alrededor de M_1.

La distancia de L_1 es la menor porque ese punto se encuentra entre las dos masas, donde el campo gravitatorio es nulo. Está más cerca de la masa más pequeña. En el diagrama, más cerca de M_2 que de M_1.

L_2 está más lejos de M_1 que L_3. Esto es así porque el cuerpo de masa M_2 contribuye poco a la fuerza neta que actúa sobre el tercer cuerpo en L_3.

FÍSICA EN TU VIDA

1. ¿De qué manera obtienen los satélites la energía para funcionar?

De los paneles solares.

2. ¿Cómo se comunican los satélites con las estaciones terrestres para emitir las imágenes captadas?

Los satélites disponen de antenas que les sirven para emitir la información a las estaciones terrestres de seguimiento, y también para recibir las posibles órdenes que se les envían desde la Tierra.

3. ¿Cómo será el periodo de los satélites que orbitan más allá de la órbita geoestacionaria?

El periodo será mayor de 24 horas.

4. ¿Cómo se modifica el periodo de un satélite si le comunicamos energía hasta situarlo en una órbita más alta?

El periodo es mayor cuanto más elevada sea la órbita. Por tanto, si le damos energía, subirá a una órbita más alta y el periodo aumentará.

5. Se denomina basura espacial a los restos de satélites, cohetes y demás desperdicios que orbitan en el espacio alrededor de la Tierra.

a) ¿Cuáles son los peligros de la basura espacial?

b) ¿Por qué son tan peligrosos residuos incluso de unos pocos centímetros de tamaño?

a) La basura espacial puede chocar contra satélites que estén operativos y causar daños, pues las colisiones tienen lugar a una velocidad relativa de miles de metros por segundo.

b) Cuanto mayor sea el tamaño, más peligroso es el resto de basura espacial, pues su energía cinética es mayor. Un fragmento de unos pocos centímetros, aunque tiene una masa pequeña, se mueve a una velocidad muy alta, por lo que lleva una energía cinética muy elevada y puede causar graves daños si colisiona con un satélite artificial, por ejemplo.

6. Las imágenes captadas por los satélites meteorológicos tienen más usos, además del pronóstico meteorológico. Piensa en ello y anota algunos.

Respuesta personal. Las imágenes pueden emplearse para comprobar el alcance de un incendio forestal o el área de extensión de las emisiones de un volcán, por ejemplo.

7. Contesta:

a) ¿Te parece interesante destinar grandes sumas de dinero al desarrollo de satélites meteorológicos? ¿Por qué?

b) ¿Y al desarrollo de otros tipos de satélites: militares, comunicaciones, telescopios espaciales, sistemas de navegación (como el GPS)…?

a) Respuesta personal. Aunque cuestan mucho dinero, los satélites meteorológicos prestan un servicio excepcional. Basta con pensar, por ejemplo, en la detección de tormentas tropicales, huracanes, tifones, etc., que permiten avisar a la población afectada para que se tomen las medidas de protección adecuadas.

b) Respuesta personal. Para convencer a los alumnos y alumnas se puede poner el ejemplo de los satélites que forman el sistema GPS. ¿Cuántos millones de teléfonos y navegadores usan este sistema en todo el mundo?

8. ¿Qué medidas se deberían tomar para reducir en lo posible la existencia de basura espacial?

No es fácil controlar la basura espacial. Se podría reducir con la instauración de medidas más severas a la hora de lanzar cohetes para evitar que los restos de los propulsores quedaran a la deriva en el espacio. Pero el problema son los restos que ya están en órbita y aquellos que se producen como consecuencia del malfuncionamiento de satélites que ya orbitan nuestro planeta.

PROYECTO SABER HACER

2

Campo eléctrico

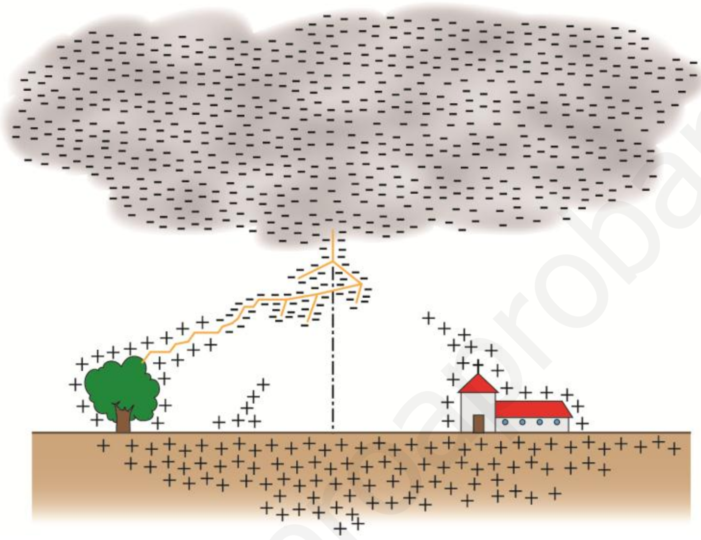
SANTILLANA

Campo eléctrico 2

PARA COMENZAR

- **¿Cómo puede inducirse carga eléctrica en el suelo situado bajo las nubes de una tormenta? Elabora un esquema para ilustrarlo.**

  La materia que forma las nubes puede electrizarse. Entonces, cuando la parte baja de una nube adquiere carga eléctrica de un tipo, el suelo puede electrizarse con carga del tipo opuesto.



- **¿Cómo se mueven las cargas eléctricas cuando hay otras cargas eléctricas cerca?**

  Las cargas eléctricas positivas se sienten atraídas por las cargas eléctricas negativas y se sienten repelidas por las cargas eléctricas positivas. Así, el movimiento de una carga en presencia de otra es un movimiento acelerado, puesto que existe una fuerza neta sobre la carga.

ACTIVIDADES

1. Calcula a cuántos electrones equivalen 2,5 nC y 1,15 μC.
Dato: $q_e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C.

Usando las conversiones adecuadas:

- $2{,}5\ \text{nC} \cdot \dfrac{10^{-9}\ \text{C}}{1\ \text{nC}} \cdot \dfrac{1\ \text{e}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{C}} = 1{,}56 \cdot 10^{10}\ \text{e}$
- $1{,}15\ \mu\text{C} \cdot \dfrac{10^{-6}\ \text{C}}{1\ \mu\text{C}} \cdot \dfrac{1\ \text{e}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{C}} = 7{,}19 \cdot 10^{12}\ \text{e}$

2. Calcula la fuerza gravitatoria y la electrostática entre dos protones separados 1 cm. Si tenemos dos electrones separados una distancia *d*, determina la relación entre ambas fuerzas.
Datos: $k = 9 \cdot 10^9$ N m² C⁻²; $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ N m² kg⁻²; $q_p = +1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C; $m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg; $q_e = -1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C; $m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ kg.

La fuerza gravitatoria es:

$$F_G = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{\left(1{,}67 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}\right)^2}{\left(0{,}01\ \text{m}\right)^2} = 1{,}86 \cdot 10^{-60}\ \text{N}$$

Y la fuerza eléctrica es:

$$F_E = \frac{k \cdot q_1 \cdot q_2}{r^2} = 9 \cdot 10^9 \ \frac{N \cdot m^2}{C^2} \cdot \frac{\left(1{,}6 \cdot 10^{-19}\ C\right)^2}{\left(0{,}01\ m\right)^2} = 2{,}3 \cdot 10^{-24}\ N$$

Observa que la fuerza eléctrica es mucho mayor que la fuerza gravitatoria. Aplicamos de nuevo las leyes de Newton y de Coulomb:

- $F_G = G \cdot \dfrac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$
- $F_E = k \cdot \dfrac{q_1 \cdot q_2}{r^2}$

Dividiendo ambas expresiones:

$$\frac{F_E}{F_G} = \frac{k \cdot \dfrac{q_1 \cdot q_2}{\cancel{d^2}}}{G \cdot \dfrac{m_1 \cdot m_2}{\cancel{d^2}}} = \frac{k \cdot q_1 \cdot q_2}{G \cdot m_1 \cdot m_2} = \frac{9 \cdot 10^9 \ \dfrac{N \cdot m^2}{C^2} \cdot \left(1{,}6 \cdot 10^{-19}\ C\right)^2}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \ \dfrac{N \cdot m^2}{kg^2} \cdot \left(9{,}11 \cdot 10^{-31}\ kg\right)^2} = 4{,}16 \cdot 10^{42}$$

3. En el átomo de hidrógeno el electrón se encuentra a una distancia aproximada de 5,2 · 10^{-11} m del protón, que se encuentra en el núcleo. Calcula la fuerza electrostática y gravitatoria con que se atraen.

Nota: utiliza los datos del problema anterior.

La fuerza eléctrica entre ambos es:

$$F_E = k \cdot \frac{q_p \cdot q_e}{r^2} = 9 \cdot 10^9 \ \frac{N \cdot m^2}{C^2} \cdot \frac{\left(1{,}6 \cdot 10^{-19}\ C\right)^2}{\left(5{,}2 \cdot 10^{-11}\ m\right)^2} = 8{,}52 \cdot 10^{-8}\ N$$

La fuerza gravitatoria entre ambos es:

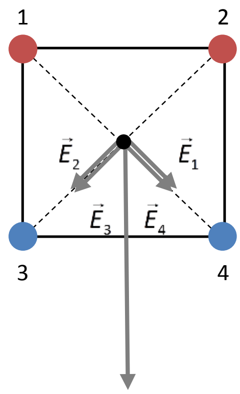
$$F_G = G \cdot \frac{m_p \cdot m_e}{r^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \ \frac{N \cdot m^2}{kg^2} \cdot \frac{1{,}67 \cdot 10^{-27}\ kg \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}\ kg}{\left(5{,}2 \cdot 10^{-11}\ m\right)^2} = 3{,}75 \cdot 10^{-47}\ N$$

4. Tenemos un cuadrado de 2 m de lado. Considera que en cada uno de sus vértices hay situada una carga puntual de 1 nC. Calcula:

a) La intensidad del campo eléctrico en el centro del cuadrado si las cargas situadas en los vértices superiores son positivas y las situadas en los vértices inferiores son negativas.

b) Si se colocan las cargas positivas y negativas alternativamente en los vértices del cuadrado, ¿cuál sería, en este caso, el campo en el centro del cuadrado?

Dato: $k = 9 \cdot 10^9$ N · m^2/C^2.



a) En el centro del cuadrado el campo estará dirigido hacia abajo, puesto que las dos cargas superiores crean campos de la misma intensidad y por la simetría del problema sus componentes horizontales se anulan sumándose solamente las componentes verticales.

Algo parecido ocurre con las cargas inferiores, de modo que el campo total será cuatro veces la componente vertical que crea una de las cargas.

La intensidad del campo eléctrico en un punto es la fuerza que el cuerpo de carga Q ejerce por cada unidad de carga positiva colocada en ese punto. Es una magnitud vectorial cuyo módulo viene dado por la expresión:

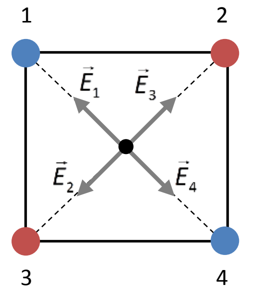
$$E = \frac{F_E}{Q} = k \cdot \frac{q}{r^2}$$

El ángulo que crea cada campo con el eje vertical es de 45°. Por tanto:

$$E = 4 \cdot k \cdot \frac{q}{r^2} \cdot \cos 45^o = 4 \cdot 9 \cdot 10^9 \ \frac{N \cdot m^2}{C^2} \cdot \frac{1 \cdot 10^{-9}\ C}{\sqrt{\left(1\ m\right)^2 + \left(1\ m\right)^2}^{\,2}} \cdot \cos 45^o = 18\ N/C$$

Por tanto, el vector intensidad del campo eléctrico será: $\vec{E} = -18\,\vec{j}$ N/C.

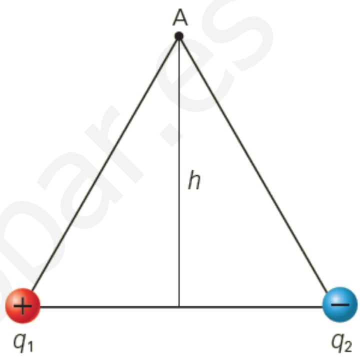
b) Si las cargas se colocan en los vértices alternativamente, en el centro los campos se compensan por completo dos a dos, por lo que en el centro del cuadrado el campo total será nulo.



5. En los vértices de la base de un triángulo equilátero se han colocado dos partículas puntuales iguales y de signo contrario: $q_1 = 1{,}5$ μC y $q_2 = -1{,}5$ μC.

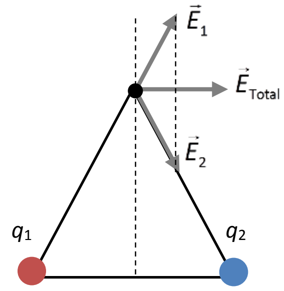
Sabiendo que la altura del triángulo es de 3,5 cm, determina el vector campo eléctrico $\vec{E}$ (módulo, dirección y sentido) en el punto A situado en el vértice superior del triángulo.

Dato: $k = 1/(4\pi \cdot \varepsilon_0) = 9 \cdot 10^9$ N · m² · C⁻².



Por la simetría del problema vemos que una de las componentes del campo eléctrico creado por una carga se anula con la componente que crea la carga opuesta. En el dibujo, las componentes verticales se compensan y el campo total creado será solamente horizontal, dirigido hacia el lado en que se encuentra la carga negativa.

El módulo que crean ambas cargas es el mismo, puesto que el punto equidista de las dos cargas y las cargas tienen el mismo valor numérico. Además, como el triángulo es equilátero se deduce que el ángulo que forma cada una de las componentes con la horizontal es de 60°.



El campo total será entonces el doble de la componente horizontal de campo que crea una de las cargas:

$$E = 2 \cdot k \cdot \frac{q}{r^2} \cdot \cos 60^o = 2 \cdot 9 \cdot 10^9 \, \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \cdot \frac{1{,}5 \cdot 10^{-6}\ \text{C}}{\left(3{,}5 \cdot 10^{-2}\ \text{m}\right)^2} \cdot \cos 60^o = 1{,}10 \cdot 10^7\ \text{N}$$

Por tanto, el vector campo eléctrico viene dado por la siguiente expresión: $\vec{E} = 1{,}10 \cdot 10^7 \vec{i}$ N/C.

6. Tenemos tres cargas eléctricas puntuales de 2 · 10⁻⁶ C cada una colocadas en tres de los cuatro vértices de un cuadrado de lado *L*.

a) Calcula la intensidad del campo en el vértice libre.

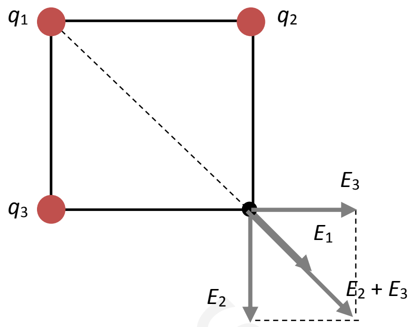
b) Si colocamos una carga de –4 · 10⁻⁶ C en el vértice que queda libre. Determina el módulo, dirección y sentido de la fuerza del campo electrostático sobre dicha carga.

Datos: $k = 9 \cdot 10^9$ N · m² · C⁻²; $L = 3$ m.

a) En el vértice se superponen tres campos.

- El que ocasiona la carga del vértice opuesto, que tiene la dirección que une el vértice con dicha carga.
- Los que provocan las cargas algo más cercanas. Estos dos campos, al combinarse, producen un campo que tiene la misma dirección y sentido que el campo que provoca la carga del vértice opuesto, tal y como se aprecia en el dibujo.

Por tanto, el campo total en el vértice donde no hay carga se puede calcular sumando estos dos campos. La dirección será, tal y como se ha representado en la figura, formando –45° con el eje horizontal, y apuntando hacia abajo a la derecha.



El campo que crea la carga más lejana es:

$$E_1 = k \cdot \frac{q_1}{r_1^2} = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \cdot \frac{2 \cdot 10^{-6}\ \text{C}}{(3\ \text{m})^2 + (3\ \text{m})^2} = 1000\ \text{N/C}$$

Las cargas 2 y 3 crean campos del mismo módulo, ya que tienen el mismo valor ($q_2 = q_3$) y se encuentran a la misma distancia ($r_2 = r_3$). Por tanto:

$$E_2 = E_3 = k \cdot \frac{q_3}{r_3^2} = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \cdot \frac{2 \cdot 10^{-6}\ \text{C}}{(3\ \text{m})^2} = 2000\ \text{N/C}$$

Entonces, el módulo del campo que crean las cargas 2 y 3 en conjunto es:

$$E_{2\text{-}3} = \sqrt{E_2^2 + E_3^2} = \sqrt{(2000\ \text{N/C})^2 + (2000\ \text{N/C})^2} = 2828{,}43\ \text{N/C}$$

Y podemos escribir el módulo del campo total en el vértice pedido como:

$$E_T = E_1 + E_{2\text{-}3} = 1000\ \text{N/C} + 2828{,}43\ \text{N/C} = 3828{,}43\ \text{N/C}$$

Por tanto, el vector campo eléctrico en el vértice pedido vendrá dado por la expresión:

$$\vec{E}_T = 3828{,}43 \cdot \cos 45°\ \vec{i}\ \text{N/C} - 3828{,}43 \cdot \text{sen}\ 45°\ \vec{j}\ \text{N/C} = 2707{,}11\ \vec{i}\ \text{N/C} - 2707{,}11\ \vec{j}\ \text{N/C}$$

b) Si ahora colocamos una carga en ese punto, como conocemos el valor del campo es más sencillo calcular la fuerza a partir del campo que hacerlo mediante la ley de Coulomb. Entonces queda:

$$F_E = q \cdot E_T = -4 \cdot 10^{-6}\ \text{C} \cdot 3828{,}43\ \text{N/C} = -0{,}015\ \text{N}$$

El signo menos indica en este caso que la fuerza tiene sentido opuesto al campo, pues la carga es negativa. Es decir, la fuerza apunta hacia la carga 1, situada en el vértice opuesto.

Por tanto, el vector fuerza del campo electrostático vendrá dado por la expresión:

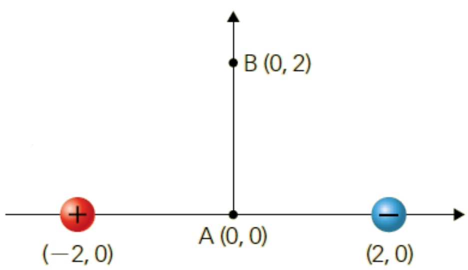
$$\vec{F}_E = q \cdot \vec{E}_T = -4 \cdot 10^{-6}\text{C} \cdot (2707{,}11\ \vec{i}\ \text{N/C} - 2707{,}11\ \vec{j}\ \text{N/C}) = -1{,}1 \cdot 10^{-2}\ \vec{i} + 1{,}1 \cdot 10^{-2}\ \vec{j}\ \text{N}$$

7. En los puntos (–2, 0) m y (2, 0) m del plano XY están situadas, como indica la figura, dos cargas eléctricas puntuales de valor $q_1 = 40$ nC , $q_2 = -20$ nC.

a) Determina el vector campo electrostático en los puntos A (0, 0) m y B (0, 2) m.

b) ¿En qué punto o puntos del plano se anula el campo?

Datos: $k = 1/(4\pi \cdot \varepsilon_0) = 9 \cdot 10^9\ \text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2}$; 1 nC = 10^{-9} C.



a) En el punto A el campo que crea la carga positiva es:

$$E_1 = k \cdot \frac{q_1}{r_1^2} = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \cdot \frac{40 \cdot 10^{-9}\ \text{C}}{(2\ \text{m})^2} = 90\ \text{N/C}$$

El campo que crea la carga negativa será la mitad en intensidad, pues la carga negativa tiene un valor que es justo la mitad del valor de la carga positiva. Es decir:

$$E_2 = 45\ \text{N/C}$$

Ambos campos tienen la misma dirección y el mismo sentido, por lo que el campo total estará dirigido en el sentido que apunta hacia la carga negativa. Su valor es igual a la suma de los módulos de las intensidades de ambos campos:

$$E = E_1 + E_2 = 90\,\text{N/C} + 45\,\text{N/C} = 135\,\text{N/C}$$

Por tanto, el vector campo vendrá dado por la expresión: $\vec{E} = 135\,\vec{i}\,\text{N/C}$.

En el punto B los campos creados por ambas cargas tienen una intensidad menor, puesto que B está más lejos que A de ambas. El campo que crea en B la carga positiva es:

$$\vec{E}_1 = k \cdot \frac{q_1}{r_1^2} \cdot \left(\cos\alpha \cdot \vec{i} + \text{sen}\,\alpha \cdot \vec{j}\right) = 9 \cdot 10^9\,\frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \cdot \frac{40 \cdot 10^{-9}\,\text{C}}{(2\,\text{m})^2 + (2\,\text{m})^2} \cdot \left(\cos\alpha \cdot \vec{i} + \text{sen}\,\alpha \cdot \vec{j}\right) =$$
$$= 45\,\text{N/C} \cdot \left(\cos\alpha \cdot \vec{i} + \text{sen}\,\alpha \cdot \vec{j}\right)$$

El campo que crea en B la carga negativa es:

$$\vec{E}_2 = k \cdot \frac{q_2}{r_2^2} \cdot \left(\cos\alpha \cdot \vec{i} - \text{sen}\,\alpha \cdot \vec{j}\right) = 9 \cdot 10^9\,\frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \cdot \frac{20 \cdot 10^{-9}\,\text{C}}{(2\,\text{m})^2 + (2\,\text{m})^2} \cdot \left(\cos\alpha \cdot \vec{i} - \text{sen}\,\alpha \cdot \vec{j}\right) =$$
$$= 22{,}5\,\text{N/C} \cdot \left(\cos\alpha \cdot \vec{i} - \text{sen}\,\alpha \cdot \vec{j}\right)$$

El ángulo α es de 45º, puesto que:

$$\cos\alpha = \frac{2}{2} = 1 \rightarrow \alpha = 45^\circ$$

Sumando ambos campos obtenemos el campo total en B:

$$\vec{E}_T = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 45\,\text{N/C} \cdot \left(\cos\alpha \cdot \vec{i} + \text{sen}\,\alpha \cdot \vec{j}\right) + 22{,}5\,\text{N/C} \cdot \left(\cos\alpha \cdot \vec{i} - \text{sen}\,\alpha \cdot \vec{j}\right) =$$
$$= (45\,\text{N/C} + 22{,}5\,\text{N/C}) \cdot \cos\alpha \cdot \vec{i} + (45\,\text{N/C} - 22{,}5\,\text{N/C})\,\text{sen}\,\alpha \cdot \vec{j} =$$
$$= 47{,}73\,\text{N/C}\,\vec{i} + 15{,}91\,\text{N/C}\,\vec{j}$$

El módulo de este vector es:

$$E_T = \sqrt{(47{,}73\,\text{N/C})^2 + (15{,}91\,\text{N/C})^2} = 50{,}31\,\text{N/C}$$

b) Para que el campo se anule, ambos campos, los creados por las cargas positiva y negativa, deben tener la misma dirección y sentidos opuestos. Esto solamente ocurre en la línea que une ambos puntos. Pero no entre ambas cargas, puesto que ahí los campos tienen el mismo sentido, ambos dirigidos hacia la carga negativa.

Así pues, supongamos que el punto donde el campo total se anula está a la derecha de la carga negativa, a una distancia *x* de esta. Ahí el campo que crea la carga 1, la positiva, estará dirigido hacia la derecha, y el que crea la carga 2, la negativa, hacia la izquierda. Entonces, como la distancia que separa ambas cargas es 2 + 2 = 4 m, podemos escribir:

$$E_{1x} = k \cdot \frac{q_1}{(4+x)^2}\,;\ E_{2x} = k \cdot \frac{|q_2|}{x^2}$$

El campo se anula si ambos módulos son iguales:

$$E_{1x} = E_{2x} \rightarrow \cancel{k} \cdot \frac{q_1}{(4+x)^2} = \cancel{k} \cdot \frac{|q_2|}{x^2} \rightarrow q_1 \cdot x^2 = |q_2| \cdot (4+x)^2 \rightarrow 40 \cdot \cancel{10^{-9}\,\text{C}} \cdot x^2 = 20 \cdot \cancel{10^{-9}\,\text{C}} \cdot (4+x)^2 \rightarrow$$
$$\rightarrow 4 \cdot x^2 = 2 \cdot (4+x)^2 \rightarrow 4 \cdot x^2 = 2 \cdot \left(16 + 2x + x^2\right) \rightarrow 2 \cdot x^2 = 16 + 2x + x^2 \rightarrow x^2 - 2x - 16 = 0$$

Las soluciones de esta ecuación son:

$$x = 5{,}12\,\text{m}\,;\ x = -3{,}12\,\text{m}$$

Solamente es válida la solución con $x > 0$, es decir $x = 5{,}12$ m, puesto que habíamos supuesto que el punto estaba a la derecha de la carga negativa. Y no habrá un punto a la izquierda de la carga negativa porque en esa zona el campo que crea la carga positiva siempre tendrá un módulo mayor que el que crea la carga negativa, pues en esa zona la carga positiva, la mayor, está más cerca del hipotético punto donde se anularía el campo.

8. Un campo electrostático está creado por una carga Q de -10 μC situada en el origen de coordenadas (0, 0).

a) Halla el trabajo necesario para desplazar una carga q de 1 μC desde el punto (2, 0) m hasta el (6, 0) m.

b) Si la carga a desplazar fuera de -1 μC, ¿el trabajo necesario sería mayor o menor que cero?

Dato: $k = 9 \cdot 10^9\ \text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2}$.

a) El trabajo necesario será igual a la diferencia de energía potencial entre ambos puntos, puesto que el campo electrostático es un campo conservativo, es decir:

$$W = -\Delta E_{\text{P}} = -\left(E_{\text{P final}} - E_{\text{P inicial}}\right) = E_{\text{P inicial}} - E_{\text{P final}} = q \cdot \left(V_{\text{inicial}} - V_{\text{final}}\right) = q \cdot Q \cdot k \cdot \left(\frac{1}{r_{\text{inicial}}} - \frac{1}{r_{\text{finaL}}}\right) =$$

$$= 10^{-6}\ \text{C} \cdot \left(-10 \cdot 10^{-6}\ \text{C}\right) \cdot 9 \cdot 10^{9}\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \cdot \left(\frac{1}{2\ \text{m}} - \frac{1}{6\ \text{m}}\right) = -0{,}03\ \text{J}$$

El signo negativo indica que es un trabajo que debemos realizar; la carga no pasa espontáneamente desde la posición inicial a la final.

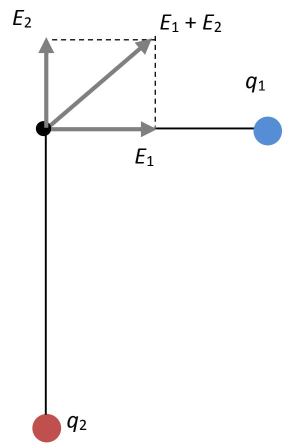
b) Si la carga fuese menor que cero el trabajo sería positivo, puesto que la carga que crea el campo y que está en el origen de coordenadas es negativa. Esto quiere decir que si soltamos la carga negativa en el punto señalado, se desplazará espontáneamente separándose de la carga que se encuentra en el origen de coordenadas, pues aparece una fuerza de repulsión al ser ambas cargas del mismo tipo.

9. En los puntos A (3, 0) m y B (0, -4) m se colocan dos cargas $q_1 = -1{,}6 \cdot 10^{-8}$ C y $q_2 = 10^{-8}$ C.

a) Dibuja el campo eléctrico creado por cada carga y calcula el campo eléctrico total en el origen.

b) Calcula el trabajo necesario para trasladar la carga q_1 desde el punto A (3, 0) m hasta el punto (0, 0).

Dato: $k = 9 \cdot 10^9\ \text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2}$.



a) En el origen el campo eléctrico que crea la carga q_1, negativa, está dirigido en la dirección horizontal y sentido hacia la derecha, hacia donde se encuentra la carga.

El campo que crea la otra carga está dirigido alejándose de la carga positiva, es decir, es vertical con sentido positivo del eje de coordenadas. Por tanto, el campo total se calcula sumando vectorialmente ambos campos, por lo que estará dirigido hacia la derecha y hacia arriba.

La componente horizontal tiene mayor módulo que la vertical, puesto que la carga negativa está más cerca y tiene un valor mayor, en valor absoluto, que la carga positiva.

Calculamos el valor de cada campo en el origen de coordenadas. El que crea la carga q_1 es:

$$\vec{E}_1 = k \cdot \frac{q_1}{r_1^2} \vec{u}_{r1} = 9 \cdot 10^9\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \cdot \frac{-1{,}6 \cdot 10^{-8}\ \text{C}}{\left(3\ \text{m}\right)^2}\left(-\vec{i}\right) = 16\ \vec{i}\ \text{N/C}$$

El que crea la carga q_2 es:

$$\vec{E}_2 = k \cdot \frac{q_2}{r_2^2} \vec{u}_{r2} = 9 \cdot 10^9\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \cdot \frac{10^{-8}\ \text{C}}{\left(4\ \text{m}\right)^2}\left(\vec{j}\right) = 5{,}625\ \vec{j}\ \text{N/C}$$

El campo total es:

$$\vec{E}_{\text{T}} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 16\ \vec{i}\ \text{N/C} + 5{,}625\ \vec{j}\ \text{N/C}$$

El módulo del campo total es:

$$E_T = \sqrt{E_1 + E_2} = \sqrt{(16\ \text{N/C})^2 + (5{,}625\ \text{N/C})^2} = 16{,}96\ \text{N/C}$$

b) El trabajo necesario será igual a la diferencia de energía potencial entre ambos puntos, puesto que se trata de un campo conservativo, es decir:

$$W = -\Delta E_P = -\left(E_{P\,\text{final}} - E_{P\,\text{inicial}}\right) = E_{P\,\text{inicial}} - E_{P\,\text{final}} = q_1 \cdot \left(V_{\text{inicial}} - V_{\text{final}}\right) = q_1 \cdot q_2 \cdot k \cdot \left(\frac{1}{r_{\text{inicial}}} - \frac{1}{r_{\text{finaL}}}\right) =$$

$$= -1{,}6 \cdot 10^{-8}\ \text{C} \cdot \left(10^{-8}\ \text{C}\right) \cdot 9 \cdot 10^9\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{(3\ \text{m})^2 + (4\ \text{m})^2}} - \frac{1}{4\ \text{m}}\right) = 7{,}2 \cdot 10^{-8}\ \text{J}$$

El signo positivo del trabajo indica que la carga q_1 se mueve de forma espontánea desde su posición inicial hasta el origen de coordenadas.

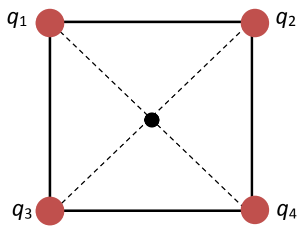
10. Cuatro cargas eléctricas positivas, de 1,00 · 10^{-5} C cada una, se encuentran en los vértices respectivos de un cuadrado de $\sqrt{2}$ m de lado. Calcula:

a) La energía necesaria para la formación del sistema de cargas.

b) El valor de la carga eléctrica negativa que hemos de situar al centro del cuadrado para que la fuerza electrostática sobre cada una de las cargas sea nula.

Dato: $k = 9 \cdot 10^9\ \text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2}$.

a) La energía potencial de un sistema formado por varias partículas es la suma de la energía de todas las parejas de partículas que se puedan formar. Por tanto:



$$E_{PT} = \sum_{i \neq j} k \cdot \left(\frac{q_i \cdot q_j}{r_{ij}}\right) =$$

$$= k \cdot \left[\left(\frac{q_1 \cdot q_2}{r_{12}}\right) + \left(\frac{q_1 \cdot q_3}{r_{13}}\right) + \left(\frac{q_1 \cdot q_4}{r_{14}}\right) + \left(\frac{q_2 \cdot q_3}{r_{23}}\right) + \left(\frac{q_2 \cdot q_4}{r_{24}}\right) + \left(\frac{q_3 \cdot q_4}{r_{34}}\right)\right]$$

Como todas las cargas son iguales, y como la distancia de la 1 a la 2 es la misma que de la 1 a la 3, que la de la 2 a la 4 y que la de la 3 a la 4, podemos escribir:

$$E_{PT} = k \cdot q_1^2 \left[\left(\frac{1}{r_{12}}\right) + \left(\frac{1}{r_{12}}\right) + \left(\frac{1}{r_{14}}\right) + \left(\frac{1}{r_{14}}\right) + \left(\frac{1}{r_{12}}\right) + \left(\frac{1}{r_{12}}\right)\right]$$

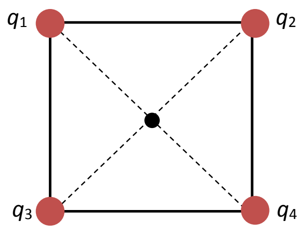
Y ahora podemos sustituir para calcular el valor pedido:

$$E_{PT} = k \cdot q_1^2 \left[\left(\frac{4}{r_{12}}\right) + \left(\frac{2}{r_{14}}\right)\right] = 9 \cdot 10^9\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \cdot \left(10^{-5}\ \text{C}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{\sqrt{2}\ \text{m}} + \frac{2}{\sqrt{\left(\sqrt{2}\ \text{m}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\ \text{m}\right)^2}}\right) =$$

$$= 9 \cdot 10^9\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \cdot \left(10^{-5}\ \text{C}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{\sqrt{2\ \text{m}^2}} + \frac{2}{\sqrt{4\ \text{m}^2}}\right) = 3{,}45\ \text{J}$$

b) Para que la fuerza sobre cada carga sea nula, habrá que colocar en el centro del cuadrado una carga negativa. Su valor debe ser tal que la fuerza producida por dicha carga negativa ha de ser igual en módulo a la fuerza total que existe en cada vértice sobre cada carga. En cada vértice del cuadrado la fuerza sobre cada carga tiene la dirección de la diagonal del cuadrado, y el sentido es hacia fuera del cuadrado.

$$\vec{F}_4 = \vec{F}_{14} + \vec{F}_{24} + \vec{F}_{34}$$



Por la simetría del problema:

$$F_{24} = F_{34} = k \cdot \frac{q^2}{L^2} = 9 \cdot 10^9 \ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \cdot \frac{\left(10^{-5}\ \text{C}\right)^2}{\left(\sqrt{2}\ \text{m}\right)^2} = 0{,}45\ \text{N}$$

Además:

$$F_{14} = k \cdot \frac{q^2}{d^2} = 9 \cdot 10^9 \ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \cdot \frac{\left(10^{-5}\ \text{C}\right)^2}{\left(\sqrt{2}\ \text{m}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\ \text{m}\right)^2} = 0{,}225\ \text{N}$$

Además, la composición de las fuerzas que las cargas 2 y 3 ejercen sobre la 4 tiene la misma dirección y sentido que la fuerza que la carga 1 crea sobre la 4. Por tanto, el módulo de la suma de F_{24} y F_{34} es:

$$\left|\vec{F}_{24} + \vec{F}_{34}\right| = \sqrt{\left(F_{24}\right)^2 + \left(F_{24}\right)^2} = \sqrt{2 \cdot \left(F_{24}\right)^2} = F_{24} \cdot \sqrt{2} = 0{,}45 \cdot \sqrt{2}\ \text{N}$$

Y entonces la fuerza total que sufre la carga 4 es:

$$F_{T4} = \left|F_{14}\right| + \left|\vec{F}_{24} + \vec{F}_{24}\right| = 0{,}225\ \text{N} + 0{,}45 \cdot \sqrt{2}\ \text{N} = 0{,}86\ \text{N}$$

Este valor es también el de la fuerza que debe ejercer una carga negativa situada en el centro del cuadrado para que la fuerza total sobre la carga 4 sea nula. Es decir:

$$F_{T4} = k \cdot \frac{Q \cdot q_4}{\left(\frac{d}{2}\right)^2} \rightarrow Q = \frac{F_{T4} \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2}{k \cdot q_4} = \frac{0{,}225\ \text{N} \cdot \left[\left(\frac{\sqrt{2}\ \text{m}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}\ \text{m}}{2}\right)^2\right]}{9 \cdot 10^9 \ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \cdot 10^{-5}\ \text{C}} = 2{,}5 \cdot 10^{-6}\ \text{C}$$

Y dada la simetría del problema, todas las cargas sufren la misma fuerza, con lo cual la fuerza neta sobre cada carga será nula si se coloca en el centro del cuadrado una carga con valor $-2{,}5 \cdot 10^{-6}$ C.

11. En un punto del espacio tenemos una carga fija de –2 μC. Otra partícula de 0,5 g y 1 μC se aleja de la primera. ¿A qué distancia la velocidad de la partícula será cero, si a 0,1 m la velocidad es 25 m/s?

En este caso el movimiento no es uniformemente acelerado. La fuerza que la carga fija ejerce sobre la carga en movimiento no es constante, puesto que la distancia entre ambas cargas va variando. Entonces la aceleración no será constante y por consiguiente el movimiento no será MRUA. La carga móvil se seguirá moviendo cierta distancia alejándose de la carga fija, se detendrá al cabo de cierta distancia e invertirá el sentido de su movimiento con una aceleración cada vez mayor, puesto que la distancia a la carga fija va disminuyendo.

El problema puede resolverse aplicando la conservación de la energía. En la posición inicial, a 0,1 m de la carga fija, la carga móvil tiene energía cinética y energía potencial electrostática. Cuando se para, solo tiene energía potencial electrostática. Por tanto:

$$E_1 = E_2 \rightarrow \frac{1}{2} m \cdot v^2 + k \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r_1} = 0 + k \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r_2}$$

En esta ecuación hay que despejar r_2:

$$\frac{q_1 \cdot q_2}{r_2} = \frac{1}{2} \frac{m \cdot v^2}{k} + \frac{q_1 \cdot q_2}{r_1} \rightarrow r_2 = \frac{q_1 \cdot q_2}{\frac{1}{2} \frac{m \cdot v^2}{k} + \frac{q_1 \cdot q_2}{r_1}}$$

$$r_2 = \frac{-2 \cdot 10^{-6}\ \text{C} \cdot 1 \cdot 10^{-6}\ \text{C}}{\frac{1}{2 \cdot 9 \cdot 10^9 \ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2}} \cdot 5 \cdot 10^{-4}\ \text{kg} \cdot \left(25\ \text{m/s}\right)^2 + \frac{-2 \cdot 10^{-6}\ \text{C} \cdot 1 \cdot 10^{-6}\ \text{C}}{0{,}1\ \text{m}}} = 0{,}76\ \text{m}$$

12. Sea un campo electrostático generado por una carga puntual negativa, *q*. Dados dos puntos, A más cercano a la carga y B más alejado de la carga. ¿En cuál de los puntos el potencial será mayor?

El potencial que crea una carga a cierta distancia viene dado por la siguiente expresión:

$$V = k \cdot \frac{q}{r}$$

Por tanto, para cada punto:

$$V_A = k \cdot \frac{q}{r_A};\ V_B = k \cdot \frac{q}{r_B}$$

Restando ambas expresiones:

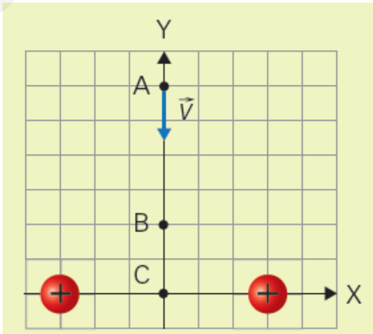
$$V_A - V_B = k \cdot \frac{q}{r_A} - k \cdot \frac{q}{r_B} = k \cdot q \cdot \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$

Si B está más alejado que A, y si la carga *q* es negativa, entonces:

$$r_B > r_A \rightarrow \left(\frac{1}{r_A} > \frac{1}{r_B}\right) \rightarrow V_A - V_B < 0 \rightarrow V_A < V_B$$

El potencial es mayor en el punto B, el más alejado de la carga.

13. Dos cargas puntuales de 10 nC están fijas y separadas 6 m como muestra la figura. Una partícula pasa por el punto A con una cierta velocidad en la dirección OY negativo. Si la partícula tiene una masa de 60 g y su carga es de 5 C:



a) ¿Cuál debe ser el módulo de la velocidad de la partícula al pasar por el punto A si al llegar al punto B la velocidad es cero?

b) Haz un esquema cualitativo de las fuerzas que actúan sobre la partícula en el punto B.

c) ¿Qué ocurrirá después de que la velocidad de la partícula se anule al llegar al punto B? Razona si la partícula: seguirá hacia C, se quedará inmóvil o volverá hacia el punto A.

a) En este caso el movimiento no es uniformemente acelerado. La fuerza que las cargas fijas (q_2 y q_3) ejercen sobre la carga en movimiento (q_1) no es constante, puesto que la distancia entre las cargas va variando. Entonces la aceleración no será constante y por consiguiente el movimiento no será MRUA.

El problema puede resolverse aplicando la conservación de la energía. En la posición inicial la carga móvil tiene energía cinética y energía potencial electrostática. Cuando llega a B la velocidad es cero, por lo que ahí solo tiene energía potencial electrostática. Por tanto:

$$E_A = E_B \rightarrow \frac{1}{2} m \cdot v^2 + k \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r_{2A}} + k \cdot \frac{q_1 \cdot q_3}{r_{3A}} = k \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r_{2B}} + k \cdot \frac{q_1 \cdot q_3}{r_{3B}}$$

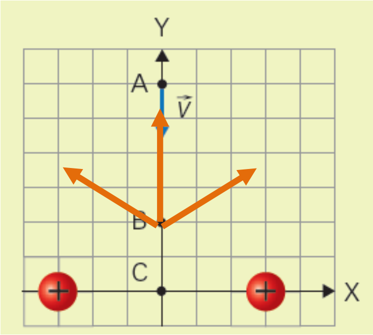
Como las cargas 2 y 3 son iguales ($q_2 = q_3 = q$) y $r_{2A} = r_{3A} = r_A$ y $r_{2B} = r_{3B} = r_B$:

$$\frac{1}{2} m \cdot v^2 + 2 \cdot k \cdot \frac{q_1 \cdot q}{r_A} = 2 \cdot k \cdot \frac{q_1 \cdot q}{r_B} \rightarrow v = \sqrt{2 \cdot \frac{2 \cdot k \cdot q_1 \cdot q \cdot \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right)}{m}} =$$

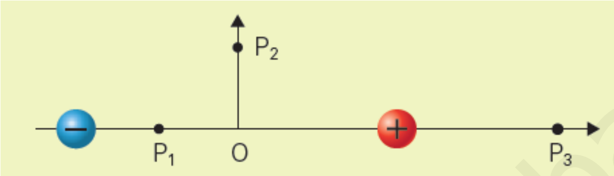
$$= \sqrt{2 \cdot \frac{2 \cdot 9 \cdot 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \cdot 5\ \text{C} \cdot 10 \cdot 10^{-9}\ \text{C} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{(2\ \text{m})^2 + (3\ \text{m})^2}} - \frac{1}{\sqrt{(6\ \text{m})^2 + (3\ \text{m})^2}}\right)}{0{,}06\ \text{kg}}} = 62{,}04\ \text{m/s}$$

b) En el punto B las cargas positivas fijas ejercen fuerzas de repulsión sobre la carga móvil. Dada la simetría del problema, las componentes horizontales de ambas fuerzas se compensan entre sí y solo queda una componente vertical y hacia arriba que hace que la partícula móvil vaya frenando.

c) Cuando la partícula llega al punto B su velocidad se anula, pero no su aceleración. En ese punto la fuerza neta tiene dirección vertical y hacia arriba, por lo que la partícula móvil se moverá en dirección vertical y hacia arriba, hacia el punto de donde venía.



14. Un dipolo eléctrico es un sistema formado por dos cargas iguales, pero de signos contrarios. En la figura se muestra un dipolo cuyas cargas, separadas una pequeña distancia, se sitúan simétricamente a ambos lados del origen de coordenadas O.



Indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas y razona la respuesta.

a) El campo eléctrico y el potencial en el origen de coordenadas O son ambos iguales a cero.

b) El potencial eléctrico en el punto P_1 es negativo.

c) El potencial eléctrico en el punto P_2 es igual a cero, pero el campo eléctrico no.

d) El potencial eléctrico en el punto P_3 puede ser positivo o negativo dependiendo del valor de las cargas.

a) Falsa. El campo eléctrico no es nulo, pero sí es nulo el potencial eléctrico.

b) Verdadero, pues P_1 está más cerca de la carga negativa.

c) Verdadero. Como P_2 equidista de ambas cargas, el potencial eléctrico es nulo, pero el campo eléctrico no lo es porque los campos en P_2 no tienen la misma dirección.

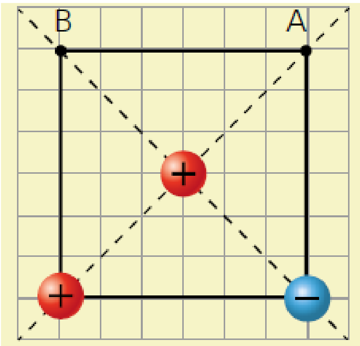
d) Falsa. En un dipolo las cargas son iguales. Por tanto, el potencial en P_3 es positivo, pues la carga positiva está más cerca. Si se tuviese un sistema de cargas de diferente valor, entonces el potencial en P_3 podría ser positivo o negativo en función del valor de las cargas.

15. En el centro y en dos de los vértices de un cuadrado de 2 m de lado hay tres cargas de 10 μC y –10 μC respectivamente. Observa la figura y calcula:

a) El vector intensidad de campo eléctrico y el potencial eléctrico en el punto A.

b) El trabajo realizado por el campo para llevar una carga de +2 μC desde el punto A hasta el punto B.

Dato: $k = 9 \cdot 10^9$ N · m² · C⁻².



a) Si el lado mide 2 m, entonces la diagonal mide:

$$d^2 = L^2 + L^2 \rightarrow d = \sqrt{2 \cdot L^2} = \sqrt{2} \cdot L = \sqrt{2} \cdot 2 \text{ m}$$

Y la mitad de la diagonal valdrá:

$$\frac{d}{2} = \sqrt{2} \text{ m}$$

El campo eléctrico que crea la carga central, a partir de ahora denominada q_1, en el punto A está dirigido hacia arriba a la derecha, formando un ángulo de 45° con la horizontal. Su valor es:

$$\vec{E}_1 = k \cdot \frac{q_1}{r_{1A}^2} \vec{u}_{1A} = k \cdot \frac{q_1}{r_{1A}^2} \left(\cos\alpha \ \vec{i} + \text{sen}\ \alpha \ \vec{j}\right) = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \cdot \frac{10 \cdot 10^{-6}\,\text{C}}{\left(\sqrt{2}\right)^2 \ \text{m}^2} \cdot \left(\cos 45^\text{o} \ \vec{i} + \text{sen}\ 45^\text{o} \ \vec{j}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \vec{E}_1 = 31\,819{,}8 \ \vec{i} \ \text{N/C} + 31\,819{,}8 \ \vec{j} \ \text{N/C}$$

El campo eléctrico que crea la otra carga positiva, a partir de ahora denominada q_2, en el punto A está dirigido hacia arriba a la derecha, formando un ángulo de 45° con la horizontal. Su valor es:

$$\vec{E}_2 = k \cdot \frac{q_2}{r_{2A}^2} \vec{u}_{2A} = k \cdot \frac{q_2}{r_{2A}^2} \left(\cos\alpha \ \vec{i} + \text{sen}\ \alpha \ \vec{j}\right) = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \cdot \frac{10 \cdot 10^{-6}\,\text{C}}{\left(2 \cdot \sqrt{2}\right)^2 \ \text{m}^2} \cdot \left(\cos 45^\text{o} \ \vec{i} + \text{sen}\ 45^\text{o} \ \vec{j}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \vec{E}_2 = 7954{,}96 \ \vec{i} \ \text{N/C} + 7954{,}96 \ \vec{j} \ \text{N/C}$$

Se podría haber calculado teniendo en cuenta que si la distancia se duplica el campo disminuye a la cuarta parte.

El campo eléctrico que crea la carga negativa, a partir de ahora denominada q_3, en el punto A está dirigido hacia abajo. Su valor es:

$$\vec{E}_3 = k \cdot \frac{q_3}{r_{3A}^2} \cdot \vec{u}_{3A} = k \cdot \frac{q_3}{r_{3A}^2} \ \vec{j} = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \cdot \frac{\left(-10 \cdot 10^{-6}\,\text{C}\right)}{(2\ \text{m})^2} \ \vec{j} \rightarrow \vec{E}_3 = -22\,500 \ \vec{j} \ \text{N/C}$$

El campo eléctrico total en el punto A será:

$$\vec{E}_\text{T} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 = 31\,819{,}8 \ \vec{i} \ \text{N/C} + 31\,819{,}8 \ \vec{j} \ \text{N/C} + 7954{,}96 \ \vec{i} \ \text{N/C} + 7954{,}96 \ \vec{j} \ \text{N/C} - 22\,500 \ \vec{j} \ \text{N/C} =$$
$$= 39\,774{,}76 \ \vec{i} \ \text{N/C} + 17\,274{,}76 \ \vec{j} \ \text{N/C}$$

Utilizando el principio de superposición, el potencial será el debido a la contribución de las tres cargas. Las tres cargas son iguales en módulo ($q_1 = q_2 = q$ y $q_3 = -q$), obtenemos:

$$V_\text{A} = V_{1A} + V_{2A} + V_{3A} = k \cdot \left(\frac{q_1}{r_{1A}} + \frac{q_2}{r_{2A}} + \frac{q_3}{r_{3A}}\right) = k \cdot q \cdot \left(\frac{1}{r_{1A}} + \frac{1}{r_{2A}} - \frac{1}{r_{3A}}\right) =$$
$$= 9 \cdot 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \cdot 10 \cdot 10^{-6}\,\text{C} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2 \cdot \sqrt{2}} - \frac{1}{2}\right) = 50\,459{,}42\ \text{V}$$

b) El trabajo para trasladar la carga puede calcularse a partir de la energía potencial del sistema en los puntos A y B. Ya sabemos el potencial en A. El potencial en B será, análogamente:

$$V_\text{B} = V_{1B} + V_{2B} + V_{3B} = k \cdot \left(\frac{q_1}{r_{1B}} + \frac{q_2}{r_{2B}} + \frac{q_3}{r_{3B}}\right) = k \cdot q \cdot \left(\frac{1}{r_{1B}} + \frac{1}{r_{2B}} - \frac{1}{r_{3B}}\right) =$$
$$= 9 \cdot 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \cdot 10 \cdot 10^{-6}\,\text{C} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot \sqrt{2}}\right) = 76\,819{,}81\ \text{V}$$

Entonces el trabajo pedido será:

$$W = -\left(\Delta E_\text{P}\right) = -\left(E_\text{PB} - E_\text{PA}\right) = E_\text{PA} - E_\text{PB} = Q \cdot \left(V_\text{A} - V_\text{B}\right) = 2 \cdot 10^{-6}\ \text{C} \cdot \left(50\,459{,}42\ \text{V} - 76\,819{,}81\ \text{V}\right) = -0{,}053\ \text{J}$$

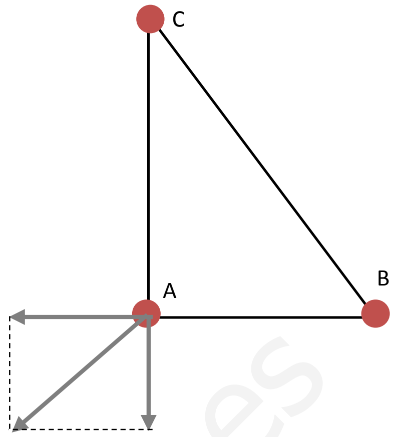
16. En los vértices de un triángulo rectángulo están situadas tres cargas iguales, de 4 μC cada una. Tomando de referencia el ángulo recto sobre el origen de coordenadas, las posiciones de las cargas en cada vértices del triángulo son A (0, 0), B (12, 0) y C (0, 16) respectivamente.

a) Calcula el módulo de la fuerza que ejercen las cargas situadas sobre los puntos B y C sobre la carga situada en el vértice del ángulo recto. Realiza un esquema.

b) Determina el trabajo para transportar la carga situada en el vértice del ángulo recto desde su posición hasta el punto medio del segmento que une las otras dos.

a) La fuerza que ejercen las cargas situadas en B y C sobre la que está en el origen de coordenadas, A, es:

$$\vec{F}_{\text{B-A}} = k \cdot \frac{q_{\text{B}} \cdot q_{\text{A}}}{r^2_{\text{B-A}}} \cdot \left(-\vec{i}\right);\ \vec{F}_{\text{C-A}} = k \cdot \frac{q_{\text{C}} \cdot q_{\text{A}}}{r^2_{\text{C-A}}} \cdot \left(-\vec{j}\right)$$



Sustituyendo valores:

$$\vec{F}_{\text{B-A}} = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \cdot \frac{\left(4 \cdot 10^{-6}\,\text{C}\right)^2}{(12\ \text{m})^2} \cdot \left(-\vec{i}\right) = -10^{-3}\ \vec{i}\ \text{N}$$

$$\vec{F}_{\text{C-A}} = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \cdot \frac{\left(4 \cdot 10^{-6}\,\text{C}\right)^2}{(16\ \text{m})^2} \cdot \left(-\vec{j}\right) = -5{,}625 \cdot 10^{-4}\ \vec{j}\ \text{N}$$

El módulo de la fuerza neta será:

$$F = \sqrt{\left(F_{\text{B-A}}\right)^2 + \left(F_{\text{C-A}}\right)^2} = \sqrt{\left(10^{-3}\text{N}\right)^2 + \left(5{,}625 \cdot 10^{-4}\text{N}\right)^2} = 1{,}15 \cdot 10^{-3}\ \text{N}$$

b) El trabajo se calcula a partir de la energía potencial en los puntos inicial (el vértice del ángulo recto), a partir de ahora denominado 1, y final (el punto medio del segmento de vértices B y C), a partir de ahora denominado 2:

$$W = -\left(\Delta E_{\text{P}}\right) = -\left(E_{\text{P2}} - E_{\text{P1}}\right) = E_{\text{P1}} - E_{\text{P2}} = q_{\text{A}} \cdot \left(V_1 - V_2\right)$$

Teniendo en cuenta que $q_{\text{A}} = q_{\text{B}} = q_{\text{C}} = q$, el potencial en la posición inicial es:

$$V_1 = V_{1\text{B}} + V_{1\text{C}} = k \cdot \left(\frac{q_{\text{B}}}{r_{1\text{B}}} + \frac{q_{\text{C}}}{r_{1\text{C}}}\right) = k \cdot q \cdot \left(\frac{1}{r_{1\text{B}}} + \frac{1}{r_{1\text{C}}}\right) = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \cdot 4 \cdot 10^{-6}\,\text{C} \cdot \left(\frac{1}{12\ \text{m}} + \frac{1}{16\ \text{m}}\right) = 5250\ \text{V}$$

El potencial en la posición final es:

$$V_2 = V_{2\text{B}} + V_{2\text{C}} = k \cdot \left(\frac{q_{\text{B}}}{r_{2\text{B}}} + \frac{q_{\text{C}}}{r_{2\text{C}}}\right) = k \cdot q \cdot \left(\frac{1}{r_{2\text{B}}} + \frac{1}{r_{2\text{C}}}\right) =$$

$$= 9 \cdot 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \cdot 4 \cdot 10^{-6}\,\text{C} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{(6\ \text{m})^2 + (8\ \text{m})^2}} + \frac{1}{\sqrt{(6\ \text{m})^2 + (8\ \text{m})^2}}\right) = 7200\ \text{V}$$

Y sustituyendo en la expresión anterior:

$$W = q_{\text{A}} \cdot \left(V_1 - V_2\right) = 4 \cdot 10^{-6}\ \text{C} \cdot \left(5250\ \text{V} - 7200\ \text{V}\right) = -7{,}8 \cdot 10^{-3}\ \text{J}$$

El signo negativo indica que es un trabajo que debemos realizar; la carga no pasa espontáneamente desde la posición inicial a la final.

17. Contesta:

a) ¿Pueden cortarse entre sí las líneas de fuerza de un campo eléctrico?

b) Si una partícula cargada se pudiese mover libremente dentro del campo eléctrico, ¿lo haría a lo largo de una línea de fuerza del campo? ¿Influye en algo que la carga sea positiva o negativa?

a) No. Si dos líneas de campo electrostático se cruzaran, en el punto de corte habría dos valores del campo que se diferenciarían, al menos, en su dirección, ya que, por definición, las líneas de campo son tangentes al vector intensidad de campo en cada punto. Y entonces habría dos valores de la intensidad de campo en el mismo punto, lo cual es imposible.

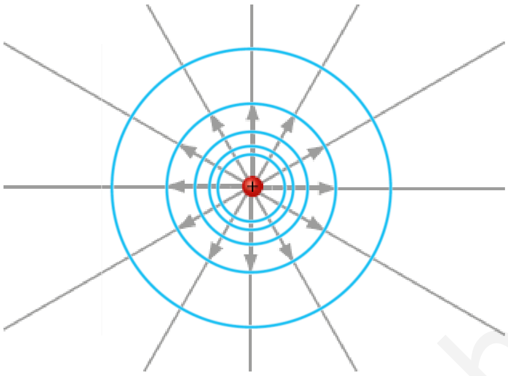
b) Sí, las partículas cargadas se mueven siguiendo las líneas del campo eléctrico, independientemente de que la carga sea positiva o negativa.

18. **Razona las respuestas:**

a) **Dibuja en un mismo esquema las líneas de campo y las superficies equipotenciales de una carga puntual positiva.**

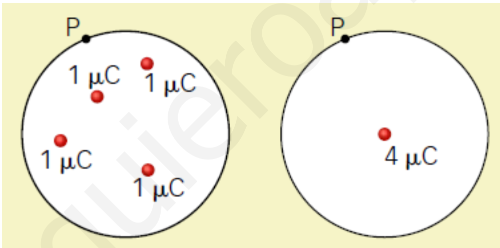
b) **Si se desplaza una carga de un punto a otro a través de una misma superficie equipotencial, ¿qué trabajo se realiza?**

a) Respuesta gráfica.



b) El trabajo sería nulo, puesto que en todos los puntos de una superficie equipotencial el potencial eléctrico tiene el mismo valor, y el trabajo es igual al producto de la carga por la diferencia de potencial entre ambos puntos.

19. **Observa la figura y contesta.**



a) **¿El flujo que atraviesa la esfera es el mismo en ambas situaciones?**

b) **¿El campo eléctrico en el punto P es igual en ambas situaciones?**

a) Sí, puesto que en ambos casos la carga total encerrada es la misma.

b) No, puesto que el campo eléctrico sí depende de la distribución de carga.

20. **Si el flujo neto que atraviesa una superficie cerrada que se sitúa en el interior de un campo eléctrico es cero, ¿pueden existir cargas eléctricas en el interior de dicha superficie? Razona la respuesta.**

Sí; puede haber cargas positivas y negativas, pero la carga total neta debe ser cero.

21. **Dos esferas conductoras de $50 \cdot 10^{-9}$ C cada una se encuentran aisladas en el vacío. Las esferas tienen un radio de 24 y 36 cm, respectivamente, y están separadas 20 m desde sus centros. Si ponemos en contacto las cargas mediante un hilo conductor ideal, se alcanza una situación de equilibrio. Calcula:**

a) **¿Qué fuerza ejerce cada carga sobre la otra cuando están aisladas?**

b) **El potencial al que se encuentra cada una de las esferas antes de ponerlas en contacto.**

c) **Una vez que se establece el equilibrio, ¿cuál es la carga y el potencial de cada esfera?**

Dato: $k = 9 \cdot 10^9\ \text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2}$.

a) La fuerza entre ambas cargas se calcula mediante la ley de Coulomb:

$$F = k\cdot\frac{q_1\cdot q_2}{r^2} = 9\cdot10^9\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{C}^2}\cdot\frac{\left(50\cdot10^{-9}\ \text{C}\right)^2}{\left(20\ \text{m}\right)^2} = 5{,}625\cdot10^{-8}\ \text{N}$$

b) El potencial de cada esfera aislada se puede calcular a partir de su carga y su radio:

$$V_1 = k\cdot\frac{q_1}{R_1} = 9\cdot10^9\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{C}^2}\cdot\frac{50\cdot10^{-9}\ \text{C}}{0{,}24\ \text{m}} = 1875\ \text{V}$$

$$V_2 = k\cdot\frac{q_2}{R_2} = 9\cdot10^9\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{C}^2}\cdot\frac{50\cdot10^{-9}\ \text{C}}{0{,}36\ \text{m}} = 1250\ \text{V}$$

c) Al conectarse las esferas y establecerse el equilibrio los potenciales se igualan. Además, como la carga se conserva, la carga total es la suma de las cargas de ambas esferas. Pero las cargas se redistribuyen hasta que ambas esferas adquieren el mismo potencial eléctrico. Entonces podemos escribir:

$$V_1 = V_2 \rightarrow \cancel{k}\cdot\frac{q'_1}{R_1} = \cancel{k}\cdot\frac{q'_2}{R_2} \rightarrow \frac{q'_1}{0{,}24\ \text{m}} = \frac{q'_2}{0{,}36\ \text{m}}$$

La conservación de la carga nos proporciona la ecuación que nos falta para resolver el problema:

$$q'_1 + q'_2 = 2\cdot50\cdot10^{-9}\ \text{C}$$

Nos queda el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{c}\dfrac{q'_1}{0{,}24\ \text{m}} = \dfrac{q'_2}{0{,}36\ \text{m}}\\ q'_1 + q'_2 = 2\cdot50\cdot10^{-9}\ \text{C}\end{array}\right\}$$

Despejamos q'_1 de la primera ecuación y sustituimos en la segunda:

$$\left.\begin{array}{r}q'_1 = \dfrac{0{,}24\ \text{m}}{0{,}36\ \text{m}}\cdot q'_2\\ q'_1 + q'_2 = 2\cdot50\cdot10^{-9}\ \text{C}\end{array}\right\}\rightarrow \frac{0{,}24\ \text{m}}{0{,}36\ \text{m}}\cdot q'_2 + q'_2 = 2\cdot50\cdot10^{-9}\ \text{C} \rightarrow q'_2\cdot\left(\frac{0{,}24\ \text{m}}{0{,}36\ \text{m}}+1\right) = 2\cdot50\cdot10^{-9}\ \text{C} \rightarrow$$

$$\rightarrow q'_2 = \frac{2\cdot50\cdot10^{-9}\ \text{C}}{\dfrac{0{,}24\ \text{m}}{0{,}36\ \text{m}}+1} = 6\cdot10^{-8}\ \text{C}$$

Sustituyendo en la primera ecuación obtenemos el valor de la otra carga:

$$q'_1 = \frac{0{,}24\ \text{m}}{0{,}36\ \text{m}}\cdot q'_2 = \frac{0{,}24\ \text{m}}{0{,}36\ \text{m}}\cdot6\cdot10^{-8}\ \text{C} = 4\cdot10^{-8}\ \text{C}$$

El potencial eléctrico de ambas esferas, una vez que se alcanza el equilibrio, es el mismo. Lo calculamos a partir de estas nuevas cargas:

$$V'_2 = V'_1 = k\cdot\frac{q'_1}{R_1} = 9\cdot10^9\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{C}^2}\cdot\frac{4\cdot10^{-8}\ \text{C}}{0{,}24\ \text{m}} = 1500\ \text{V}$$

22. Dos esferas conductoras descargadas de radios $R_1 = 12$ cm y $R_2 = 4$ cm, respectivamente, están separadas por una distancia mucho mayor que sus radios y conectadas mediante un alambre conductor ideal. A continuación, se sitúa una carga puntual $Q = +100$ nC sobre una de las esferas. Calcula:

a) El campo eléctrico en la proximidad de la superficie de cada esfera.

b) El potencial eléctrico en el centro de cada esfera conductora. (Suponemos que la carga sobre el alambre de conexión es despreciable).

Dato: $k = 9\cdot10^9\ \text{N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{C}^{-2}$.

a) Al estar conectadas por un alambre las dos esferas conductoras, el potencial se iguala y la carga puede pasar de una a otra. El campo eléctrico en cada esfera se calcula a partir de la carga de cada esfera y de su radio. Debemos conocer, pues, cuál será la carga de cada esfera.

Para ello planteamos un sistema de ecuaciones donde la primera ecuación se obtiene de la igualdad de los potenciales:

$$V_1 = V_2 \rightarrow \cancel{k} \cdot \frac{q_1}{R_1} = \cancel{k} \cdot \frac{q_2}{R_2} \rightarrow \frac{q_1}{0{,}12\ \text{m}} = \frac{q_2}{0{,}04\ \text{m}} \rightarrow q_1 = \frac{0{,}12\ \text{m}}{0{,}04\ \text{m}} \cdot q_2 = 3 \cdot q_2$$

Por otra parte, sabemos que la carga total es de 100 nC. Por tanto, la segunda ecuación se obtiene de la conservación de la carga:

$$q_1 + q_2 = 100 \cdot 10^{-9}\ \text{C}$$

Sustituyendo el valor de q_1 en función de q_2 de la primera ecuación en la segunda obtenemos el valor de q_2:

$$3 \cdot q_2 + q_2 = 100 \cdot 10^{-9}\ \text{C} \rightarrow 4 \cdot q_2 = 100 \cdot 10^{-9}\ \text{C} \rightarrow q_2 = \frac{100 \cdot 10^{-9}\ \text{C}}{4} = 25 \cdot 10^{-9}\ \text{C}$$

Y entonces q_1 vale:

$$q_1 = 3 \cdot q_2 = 3 \cdot 25 \cdot 10^{-9}\ \text{C} = 75 \cdot 10^{-9}\ \text{C}$$

Ahora ya podemos calcular el campo eléctrico en las inmediaciones de cada esfera:

$$E_1 = k \cdot \frac{q_1}{R_1^2} = 9 \cdot 10^9\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \cdot \frac{75 \cdot 10^{-9}\ \text{C}}{(0{,}12\ \text{m})^2} = 4{,}69 \cdot 10^4\ \text{N/C}$$

$$E_2 = k \cdot \frac{q_2}{R_2^2} = 9 \cdot 10^9\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \cdot \frac{25 \cdot 10^{-9}\ \text{C}}{(0{,}04\ \text{m})^2} = 1{,}41 \cdot 10^5\ \text{N/C}$$

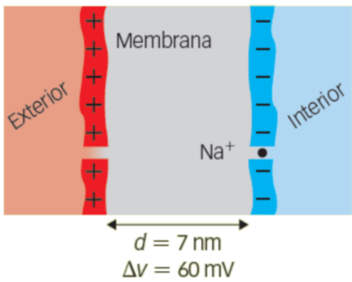
b) El potencial eléctrico en el centro de cada esfera conductora coincide con el potencial en la superficie, puesto que el potencial es constante. Además, como las esferas están conectadas, el potencial es el mismo en ambas esferas. Por tanto:

$$V_2 = V_1 = k \cdot \frac{q_1}{R_1} = 9 \cdot 10^9\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \cdot \frac{75 \cdot 10^{-9}\ \text{C}}{0{,}12\ \text{m}} = 5625\ \text{V}$$

23. Muchos de los procesos de nuestro organismo tienen lugar en las membranas celulares, que dependen de su estructura eléctrica. figura muestra el esquema de una membrana biológica.

a) ¿Cuál sería el campo eléctrico en el interior de la membrana de la figura? Indica el módulo, la dirección y el sentido.

b) ¿Cuánta energía es necesaria para transportar el ion Na^+ de la cara negativa a la positiva?



Dato: $q(Na^+) = 1{,}60 \cdot 10^{-19}$ C.

a) El campo va desde las cargas positivas hacia las cargas negativas. Tiene dirección horizontal según el dibujo.

El módulo se puede calcular a partir de la diferencia de potencial y de la distancia mediante la expresión:

$$E = \frac{\Delta V}{r} = \frac{60 \cdot 10^{-3}\ \text{V}}{7 \cdot 10^{-9}\ \text{m}} = 8{,}57 \cdot 10^6\ \text{V/m}$$

Por tanto, el vector campo eléctrico será:

$$\vec{E} = 8{,}57 \cdot 10^6\ \vec{\text{i}}\ \text{V/m}$$

b) La energía necesaria para transportar el ion de la cara negativa a la positiva será igual al trabajo y este viene dado por la variación de la energía potencial entre la posición final, la cara positiva, que denominaremos 2, y la inicial, la cara negativa, que denominaremos 1, por tanto:

$$W = -(\Delta E_P) = -(E_{P2} - E_{P1}) = E_{P1} - E_{P2} = q \cdot (V_1 - V_2) = -q \cdot \Delta V$$

Sustituyendo valores obtenemos:

$$W = -(\Delta E_P) = -q \cdot \Delta V = -1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \cdot 60 \cdot 10^{-3}\ \text{V} = -9{,}6 \cdot 10^{-21}\ \text{J}$$

El signo negativo indica que es un trabajo que debemos realizar; la carga no pasa espontáneamente desde la posición inicial a la final. Por tanto, es energía que tenemos que aportar al sistema: $9{,}6 \cdot 10^{-21}$ J.

24. Se introduce una gota entre dos láminas suficientemente grandes, suspendidas horizontalmente en el aire y separadas una distancia *d* = 0,3 m una de otra. La gota tiene una densidad de 0,86 g/mL y su radio es $3{,}75 \cdot 10^{-5}$ cm. Cuando la diferencia de potencial entre las placas es de 55,8 V, la gota se encuentra en equilibrio. ¿Cuántos electrones tiene la gota?

Datos: $q_e = -1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C; $g = 9{,}8$ N/kg.

Si la gota se encuentra en equilibrio, es porque se igualan la fuerza eléctrica sobre ella, vertical y hacia arriba, y la fuerza peso, vertical y dirigida hacia abajo. La fuerza eléctrica puede calcularse a partir de la diferencia de potencial de las placas, relacionando la diferencia de potencial y el campo eléctrico.

Escribimos la densidad en el SI:

$$0{,}86\ \frac{\cancel{\text{g}}}{\cancel{\text{mL}}} \cdot \frac{1000\ \cancel{\text{mL}}}{1\ \cancel{\text{L}}} \cdot \frac{1000\ \cancel{\text{L}}}{1\ \text{m}^3} \cdot \frac{1\ \text{kg}}{1000\ \cancel{\text{g}}} = 860\ \text{kg/m}^3$$

Podemos escribir entonces:

$$F_E = F_G \rightarrow q \cdot E = m \cdot g \rightarrow q \cdot \frac{\Delta V}{d} = \rho \cdot V_{\text{Gota}} \cdot g \rightarrow$$

$$\rightarrow q = \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot R^3 \cdot g \cdot d}{\Delta V} = \frac{860\ \text{kg/m}^3 \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot \left(3{,}75 \cdot 10^{-7}\ \text{m}\right)^3 \cdot 9{,}81\ \text{N/kg} \cdot 0{,}3\ \text{m}}{55{,}8\ \text{V}} = 10^{-17}\ \text{C}$$

Y a partir de la carga del electrón deducimos el número de electrones que tiene la gota:

$$10^{-17}\ \cancel{\text{C}} \cdot \frac{1\ \text{e}^-}{1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \cancel{\text{C}}} = 63\ \text{electrones}$$

25. Un relámpago se produce cuando pasa carga eléctrica desde la nube hasta el suelo o viceversa. Suponemos un relámpago en el que la cantidad de carga transferida es de 60 C. Sabiendo que la diferencia de potencial entre la nube y el suelo es $2 \cdot 10^9$ V:

a) ¿Cuánta energía se libera?

b) El campo eléctrico que se genera entre la nube y el suelo es uniforme y perpendicular a esta. Calcula la intensidad del campo eléctrico si la nube se encuentra a 600 m sobre el suelo.

a) La energía liberada será el trabajo necesario para que la carga eléctrica del relámpago pase de la nube al suelo o viceversa. Depende de la carga neta y de la diferencia de potencial entre la nube y el suelo:

$$W = q \cdot \Delta V = 60\ \text{C} \cdot 2 \cdot 10^9\ \text{V} = 1{,}2 \cdot 10^{11}\ \text{J}$$

b) Como el campo eléctrico es uniforme y perpendicular a la superficie de la Tierra, la relación entre el campo eléctrico y la diferencia de potencial es:

$$-\Delta V = \vec{E} \cdot \Delta\vec{r} \rightarrow |\Delta V| = |\vec{E}| \cdot |\Delta\vec{r}| \rightarrow |\vec{E}| = \frac{|\Delta V|}{|\Delta\vec{r}|} = \frac{2 \cdot 10^9\ \text{V}}{600\ \text{m}} = 3{,}\widehat{3} \cdot 10^6\ \text{N/C}$$

26. Un electrón penetra en un campo eléctrico uniforme de 200 N/C. La velocidad inicial del electrón es de $4 \cdot 10^6$ m/s en la dirección y el sentido del campo.

a) Indica cómo cambia la energía del electrón y calcula la distancia que recorre antes de detenerse.

b) Explica qué ocurriría si la partícula fuese un positrón.

Datos: $q_e = -1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C; $m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ kg.

a) Si el electrón se mueve en la dirección y sentido del campo eléctrico, irá frenando. Su energía cinética irá disminuyendo y entonces irá aumentando su energía potencial. Sufre una fuerza eléctrica que le ocasiona una aceleración en sentido opuesto a su velocidad inicial.

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E} \rightarrow m \cdot a = q \cdot E \rightarrow a = \frac{q \cdot E}{m} = \frac{1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \cdot 200\ \text{N/C}}{9{,}11 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}} = 3{,}52 \cdot 10^{13}\ \text{m/s}^2$$

Entonces podemos aplicar las ecuaciones del MRUA:

$$v = v_0 - a \cdot t\ ;\ s = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} a \cdot t^2$$

Como la velocidad final es cero:

$$0 = v_0 - a \cdot t \rightarrow t = \frac{v_0}{a}$$

Y sustituyendo en la ecuación del espacio en un MRUA:

$$s = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} a \cdot t^2 = v_0 \cdot \frac{v_0}{a} - \frac{1}{2} a \cdot \left(\frac{v_0}{a}\right)^2 = \frac{v_0^2}{a} - \frac{1}{2} \cdot \frac{v_0^2}{a} = \frac{1}{2} \cdot \frac{v_0^2}{a} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(4 \cdot 10^6\ \text{m/s}\right)^2}{3{,}52 \cdot 10^{13}\ \text{m/s}^2} = 0{,}23\ \text{m}$$

b) Si la partícula fuese un positrón, la aceleración tendría la misma dirección y sentido que la velocidad inicial, por lo que el positrón iría aumentando su velocidad y no se detendría. En este caso la energía cinética iría aumentando y la energía potencial iría disminuyendo.

27. Un electrón penetra en un campo eléctrico uniforme con una velocidad $\vec{v}_1 = 4 \cdot 10^6\ \vec{i}\ \text{m/s}$. Después de recorrer 100 cm el electrón se detiene debido a la acción del campo. Calcula, despreciando los efectos de la fuerza gravitatoria:

a) El módulo, la dirección y el sentido del campo.

b) El trabajo realizado por el campo eléctrico para detener el electrón.

Datos: $m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ kg; $q_e = -1{,}602 \cdot 10^{-19}$.

a) Si el electrón se detiene, es porque sufre una fuerza en sentido opuesto al de su velocidad. Por tanto, el campo eléctrico tiene la dirección de dicha fuerza y el mismo sentido que la velocidad del electrón.

Podemos hacer un balance energético con los instantes inicial y final. Como se acaba parando, la energía cinética final del electrón es cero.

Por tanto, aplicando el principio de conservación de la energía obtenemos:

$$E_{T1} = E_{T2} \rightarrow \frac{1}{2} m \cdot v^2 = 0 + |q \cdot \Delta V| \rightarrow \frac{1}{2} m \cdot v^2 = 0 + |q \cdot E \cdot d| \rightarrow$$

$$\rightarrow E = \frac{1}{2} \cdot \frac{m \cdot v^2}{q \cdot d} = \frac{1}{2} \cdot \frac{9{,}11 \cdot 10^{-31}\ \text{kg} \cdot \left(4 \cdot 10^6\ \text{m/s}\right)^2}{1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \cdot 1\ \text{m}} = 45{,}49\ \text{N/C}$$

Es decir, el vector campo eléctrico será:

$$\vec{E} = 45{,}49\ \vec{i}\ \text{N/C}$$

b) El trabajo realizado por el campo eléctrico para detener al electrón coincide con la energía cinética inicial del electrón:

$$W = \frac{1}{2} m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot 9{,}11 \cdot 10^{-31}\ \text{kg} \cdot \left(4 \cdot 10^6\ \text{m/s}\right)^2 = 7{,}29 \cdot 10^{-18}\ \text{J}$$

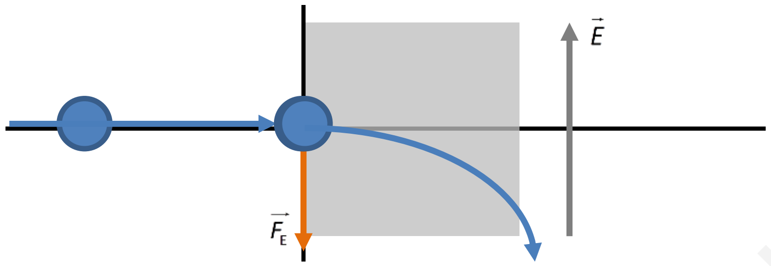
28. Una partícula de carga negativa se mueve en el sentido positivo del eje X con una velocidad constante de 0,4 m/s. En la región $x > 0$ existe un campo eléctrico uniforme de 250 N/C dirigido en el sentido positivo del eje Y. La partícula de 2,5 g de masa y carga eléctrica $q = -3 \cdot 10^{-6}$ C continúa su movimiento rectilíneo y uniforme hasta penetrar en la región donde se encuentra el campo.

a) Haz un esquema de la trayectoria seguida por la partícula y razona si aumenta o disminuye su energía potencial después de penetrar en el campo.

b) Calcula el trabajo realizado por el campo eléctrico para desplazar la partícula desde el punto (0, 0) m hasta la posición que ocupa 10 s más tarde.

Dato: $g = 9{,}8$ m/s².

a) Tras penetrar en el campo, la partícula sufre una fuerza vertical, en la dirección del campo, y, como tiene carga negativa, en sentido opuesto al campo. Es decir, la trayectoria de la partícula se va curvando hacia abajo, siguiendo un movimiento parabólico, puesto que en la dirección horizontal no existe ninguna fuerza y en la dirección vertical hay una fuerza constante.



Su energía cinética aumenta, puesto que la componente horizontal de su velocidad se mantiene constante y adquiere cierta velocidad en la dirección vertical. Entonces, para que se conserve la energía total la energía potencial debe ir disminuyendo.

b) El trabajo realizado por el campo puede calcularse a partir de la variación de energía cinética. Al penetrar en el campo, la partícula sufre una fuerza que le provoca una aceleración en la dirección vertical. La fuerza eléctrica es mucho mayor que la fuerza gravitatoria, por lo que escribimos:

$$F = q \cdot E \rightarrow m \cdot a \simeq q \cdot E \rightarrow a = \frac{q \cdot E}{m} = \frac{3 \cdot 10^{-6}\ \text{C} \cdot 250\ \text{N/C}}{2{,}5 \cdot 10^{-3}\ \text{kg}} = 0{,}3\ \text{m/s}^2$$

De este modo:

$$v_{f\,y} = v_{0\,y} + a_y \cdot t$$

Al cabo de 10 s la velocidad en el eje Y habrá aumentado, y valdrá:

$$v_{f\,y} = 0 + 0{,}3\ \text{m/s}^2 \cdot 10\ \text{s} = 3\ \text{m/s}$$

Entonces la velocidad total de la partícula al cabo de esos 10 s será:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(0{,}4\ \text{m/s})^2 + (3\ \text{m/s})^2} = 3{,}03\ \text{m/s}$$

Por tanto, haciendo el balance energético podemos escribir el trabajo como la diferencia de energía cinética entre ambas posiciones:

$$W = \Delta E_C \rightarrow W = E_{C\,2} - E_{C\,1} = \frac{1}{2} m \cdot v^2 - \frac{1}{2} m \cdot v_0^2 = \frac{1}{2} m \cdot \left(v^2 - v_0^2\right) =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-3}\ \text{kg} \cdot \left[(3{,}03\ \text{m/s})^2 - (0{,}4\ \text{m/s})^2\right] = 0{,}011\ \text{J}$$

Es un trabajo positivo porque es un trabajo que realiza el campo.

29. Dos cargas eléctricas puntuales negativas están situadas en dos puntos A y B de una recta. ¿En algún punto de esa recta puede ser nulo el campo eléctrico? ¿Y si las dos cargas fueran positivas? Justifica las respuestas.

El campo será nulo en un punto situado entre ambas cargas. Si ambas cargas son iguales, el campo será nulo en el punto que equidista de ambas cargas. Si una carga es mayor que la otra, el campo será nulo en un punto situado más cerca de la carga de menor valor.

Si las dos cargas son positivas, la respuesta es la misma, puesto que ambas cargas siguen siendo del mismo tipo.

30. Dos cargas q_1 y q_2 están separadas una distancia d. Si el campo eléctrico a 3/5 de d de la carga q_1 hacia la carga es nulo, ¿qué relación existe entre las cargas?

En el punto señalado los campos creados por ambas cargas deben ser del mismo módulo y tener sentidos opuestos. Estos campos vendrán dados por las siguientes expresiones:

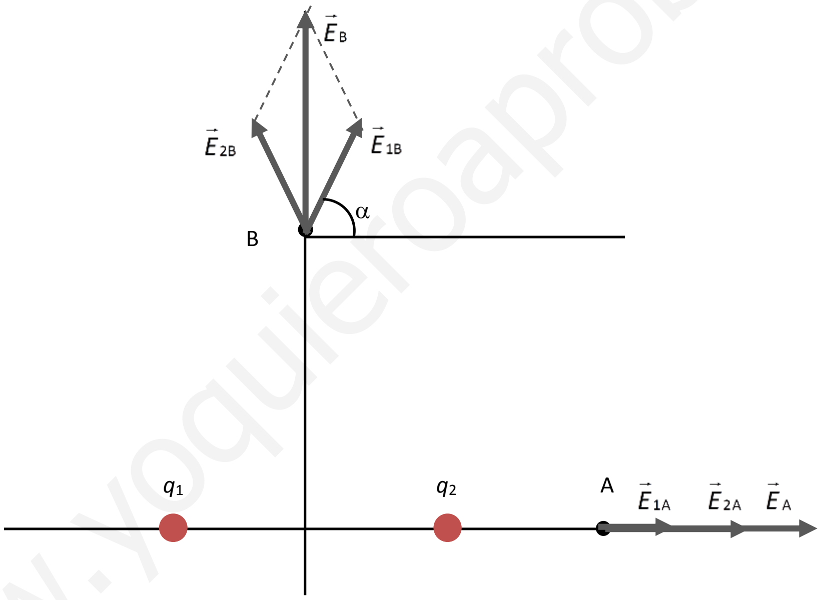
$$E_1 = k \cdot \frac{q_1}{r_1^2} \; ; \; E_2 = k \cdot \frac{q_2}{r_2^2}$$

Imponiendo que ambos campos son iguales en módulo obtenemos la relación entre las cargas:

$$E_1 = E_2 \rightarrow \cancel{k} \cdot \frac{q_1}{r_1^2} = \cancel{k} \cdot \frac{q_2}{r_2^2} \rightarrow \frac{q_1}{r_1^2} = \frac{q_2}{r_2^2} \rightarrow \frac{q_1}{\left(\frac{3}{5}d\right)^2} = \frac{q_2}{\left(\frac{2}{5}d\right)^2} \rightarrow \frac{q_1}{\frac{9}{\cancel{25}}\cancel{d^2}} = \frac{q_2}{\frac{4}{\cancel{25}}\cancel{d^2}} \rightarrow q_1 = \frac{9}{4} q_2$$

31. Dos cargas puntuales iguales y de 4 nC están situadas en los puntos (–2, 0) m y (2, 0) m del plano XY. Determina el vector campo eléctrico en los puntos A (4, 0) m y B (0, 4) m. ¿En qué punto del plano se anulará el campo?

En este caso podemos dibujar la situación presentada. Dada la simetría del problema, los campos pedidos serán del mimo módulo y dirección, y tendrán sentidos opuestos. El campo en el punto A estará dirigido hacia la parte positiva del eje X, mientras que el campo en B estará dirigido hacia la parte positiva del eje Y.



En A (4, 0) podemos calcular el campo total como la suma de dos campos. Teniendo en cuenta que $q_1 = q_2 = q$:

$$\vec{E}_A = \vec{E}_{1A} + \vec{E}_{2A} = k \cdot \frac{q_1}{r_{1A}^2} \vec{i} + k \cdot \frac{q_2}{r_{2A}^2} \vec{i} = k \cdot q \cdot \left(\frac{1}{r_{1A}^2} + \frac{1}{r_{2A}^2} \right) \vec{i} = 9 \cdot 10^9 \, \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \cdot 4 \cdot 10^{-9} \, \text{C} \cdot \left(\frac{1}{(6\text{ m})^2} + \frac{1}{(2\text{ m})^2} \right) \vec{i} = 10 \, \vec{i} \text{ N/C}$$

Las componentes horizontales del campo creado por las dos cargas en el punto B se anulan, mientras que las componentes verticales se suman. Por tanto, el campo total en B (0, 4) es:

$$\vec{E}_B = \vec{E}_{1B} + \vec{E}_{2B} = k \cdot \frac{q_1}{r_{1B}^2} \cdot \text{sen}\alpha \; \vec{j} + k \cdot \frac{q_2}{r_{2B}^2} \cdot \text{sen}\alpha \; \vec{j}$$

Donde el ángulo α será:

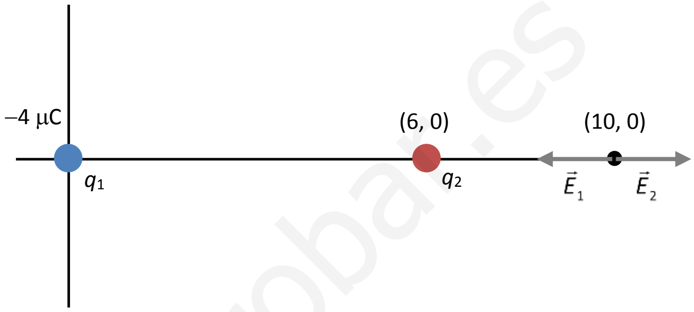
$$\text{tg}\,\alpha = \frac{4}{2} = 2 \rightarrow \alpha = 63{,}43°$$

Teniendo en cuenta que $q_1 = q_2 = q$ y $r_{1B} = r_{2B} = r$:

$$\vec{E}_B = k \cdot q \cdot \text{sen}\,\alpha \cdot \frac{2}{r^2}\,\vec{j} = 9 \cdot 10^9\,\frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{C}^2} \cdot 4 \cdot 10^{-9}\ \text{C} \cdot \text{sen}\,63{,}43° \cdot \frac{2}{\left(\sqrt{20}\ \text{m}\right)^2}\,\vec{j} = 3{,}22\,\vec{j}\ \text{N/C}$$

El campo se anulará en un punto entre las cargas. Como ambas cargas son iguales, el campo se anulará en el punto medio entre ambas, es decir, en el origen de coordenadas, en el punto (0, 0).

32. Sean una carga puntual q_1 de –4 μC y otra q_2 de valor desconocido situadas en los puntos (0, 0) m y (6, 0) m, respectivamente. Calcula el valor que debe tener q_2 para que el campo generado por ambas cargas en el punto (10, 0) m sea nulo. Haz un esquema con los vectores campo eléctrico creados por cada una de las cargas en ese punto.



Si la carga situada en (0, 0) es negativa, la otra carga debe ser positiva, para que los campos en el punto (10, 0) tengan la misma dirección y sentidos opuestos y así poder anularse.

Además, puesto que la carga q_2 está más cerca del punto (10, 0), el valor de la carga debe ser menor que el de la carga q_1, para que ambos campos tengan el mismo módulo.

Si el campo total es nulo, el módulo del campo que crea la carga q_1 en el punto (10, 0) debe ser igual al módulo del campo que crea la carga q_2 en el mismo punto. Podemos escribir:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 0 \rightarrow E_1 = E_2 \rightarrow \cancel{k} \cdot \frac{|q_1|}{r_1^2} = \cancel{k} \cdot \frac{q_2}{r_2^2} \rightarrow q_2 = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 \cdot |q_1| = \left(\frac{4}{10}\right)^2 \cdot \left|4 \cdot 10^{-6}\ \text{C}\right| = 6{,}4 \cdot 10^{-7}\ \text{C}$$

33. Justifica si la siguiente afirmación es verdadera o falsa: «El trabajo realizado por una fuerza de tipo eléctrico en una trayectoria cerrada es siempre cero».

Verdadero, puesto que la fuerza eléctrica es una fuerza conservativa.

34. Justifica si la siguiente afirmación es verdadera o falsa: «La intensidad de campo eléctrico puede ser nula y el potencial ser distinto de cero en un punto rodeado de cargas eléctricas».

Verdadero. Por ejemplo, si tenemos un sistema de dos cargas iguales, en el punto medio entre ambas el campo eléctrico será nulo y el potencial no lo será.

35. Razona: ¿se puede determinar el campo eléctrico en un punto si conocemos el potencial en dicho punto?

No, en general. El potencial es un escalar, mientras que el campo eléctrico es un vector.

36. En una región del espacio en la que existe un campo eléctrico queremos desplazar una carga desde un punto A a un punto B. Si los potenciales en los puntos A y B valen $V_A = 50$ V y $V_B = 80$ V, respectivamente, calcula el trabajo que debe realizar el campo para transportar una carga de 4 μC desde el punto A hasta el punto B.

El trabajo realizado para llevar la carga se calcula a partir de la diferencia de energía potencial en ambos puntos:

$$W = -\Delta E_P = -\left(E_{P\,\text{Final}} - E_{P\,\text{Inicial}}\right) = -q \cdot \left(V_{\text{Final}} - V_{\text{Inicial}}\right) = -4 \cdot 10^{-6}\ \text{C} \cdot \left(80\ \text{V} - 50\ \text{V}\right) = -1{,}2 \cdot 10^{-4}\ \text{J}$$

Es un trabajo negativo. Esto quiere decir que la carga no pasa espontáneamente desde el punto A hasta el punto B.

37. Una carga positiva q_1 de 7,4 nC se encuentra fija en un punto. A 3,4 mm de distancia de la primera carga se coloca una partícula q_2 de $5 \cdot 10^{-6}$ kg y 8,4 nC y se deja libre. Calcula la velocidad que alcanza q_2 cuando se encuentra a 6,8 mm de q_1.

La velocidad se puede calcular aplicando el principio de conservación de la energía. La energía final debe coincidir con la energía inicial. Al principio, como la carga q_2 se deja libre, su energía cinética es nula. Pero luego comenzará a moverse por acción de la otra carga (como las dos son positivas, se alejará). Su energía cinética aumentará, pero su energía potencial electrostática disminuirá. Si denotamos con A el instante en el que se encuentran a 3,4 mm ambas cargas y B aquel correspondiente a 6,8 mm, tenemos que, para la carga q_2:

$$E_A = E_B \rightarrow E_{CA} + E_{PA} = E_{CB} + E_{PB} \rightarrow 0 + q_2 \cdot V_A = \frac{1}{2} m_2 \cdot v^2 + q_2 \cdot V_B \rightarrow$$

$$\rightarrow q_2 \cdot k \cdot \frac{q_1}{r_{1A}} = \frac{1}{2} m_2 \cdot v^2 + q_2 \cdot k \cdot \frac{q_1}{r_{1B}} \rightarrow \frac{1}{2} m_2 \cdot v^2 = q_2 \cdot k \cdot q_1 \cdot \left(\frac{1}{r_{1A}} - \frac{1}{r_{1B}} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} m_2 \cdot v^2 = q_2 \cdot k \cdot q_1 \cdot \left(\frac{1}{r_{1A}} - \frac{1}{r_{1B}} \right) - \frac{q_2^2 \cdot k}{r_{2B}} \rightarrow v = \sqrt{\frac{2 \cdot q_2 \cdot k \cdot q_1}{m_2} \cdot \left(\frac{1}{r_{1A}} - \frac{1}{r_{1B}} \right)}$$

Sustituyendo valores obtenemos:

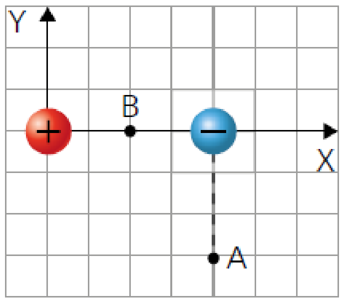
$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 8{,}4 \cdot 10^{-9}\,\text{C} \cdot 9 \cdot 10^9 \,\frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \cdot 7{,}4 \cdot 10^{-9}\,\text{C}}{5 \cdot 10^{-6}\,\text{kg}} \cdot \left(\frac{1}{3{,}4 \cdot 10^{-3}} - \frac{1}{6{,}8 \cdot 10^{-3}} \right)} = 5{,}74 \text{ m/s}$$

38. Tenemos dos cargas eléctricas q_1 y q_2 situadas en el plano XY en los puntos (0, 0) m y (8, 0) m, respectivamente, como muestra la figura. Si las cargas tienen los valores $q_1 = 10$ μC y $q_2 = -6$ μC, calcula:

a) El vector campo eléctrico en el punto A (8, –6) m.

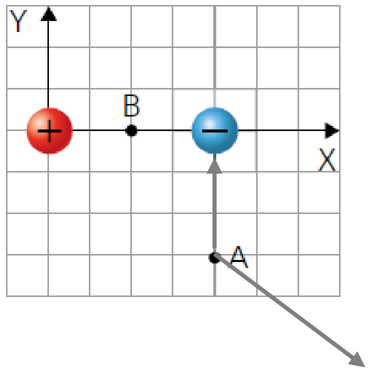
b) El potencial eléctrico en el punto B (4, 0) m. Considerando que el potencial eléctrico en el infinito es nulo, ¿cuál es el trabajo necesario para traer una carga de -10^{-12} C desde el infinito hasta el punto B?

Dato: $k = 9 \cdot 10^9$ N · m²/C².



a) En A (8, –6) la carga negativa crea un campo vertical y hacia arriba.

La carga positiva crea un campo hacia la derecha y hacia abajo, en la dirección que une A con la carga positiva, tal y como se indica en el esquema.



El ángulo que formará dicho campo con la horizontal puede calcularse fácilmente:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{6}{8} \rightarrow \alpha = 36{,}87^\circ$$

El campo total será el vector resultante de estos dos campos.

Calculemos el campo que crea la carga q_1 en A. Trabajamos en unidades del SI.

$$\vec{E}_1 = k \cdot \frac{q_1}{r_{1A}^2} \cdot \cos\alpha \; \vec{i} - k \cdot \frac{q_1}{r_{1A}^2} \cdot \text{sen}\,\alpha \; \vec{j} =$$

$$= 9 \cdot 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \cdot \frac{10 \cdot 10^{-6}\,\text{C}}{(6\text{ m})^2 + (8\text{ m})^2} \cdot \frac{8}{\sqrt{(6\text{ m})^2 + (8\text{ m})^2}} \vec{i} - 9 \cdot 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \cdot \frac{10 \cdot 10^{-6}\,\text{C}}{(6\text{ m})^2 + (8\text{ m})^2} \cdot \frac{6}{\sqrt{(6\text{ m})^2 + (8\text{ m})^2}} \vec{j}$$

$$= 720\; \vec{i} - 540\; \vec{j} \text{ N/C}$$

Análogamente para el campo que crea la carga q_2 en A:

$$\vec{E}_2 = k \cdot \frac{q_2}{r_{2A}^2} \cdot \vec{j} = 9 \cdot 10^9 \, \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \cdot \frac{6 \cdot 10^{-6}\ \text{C}}{(6\ \text{m})^2} \cdot \vec{j} = 1500\,\vec{j}\ \text{N/C}$$

Y sumando vectorialmente ambos campos:

$$\vec{E}_A = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 720\,\vec{i} - 540\,\vec{j}\ \text{N/C} + 1500\,\vec{j}\ \text{N/C} = 720\,\vec{i} + 960\,\vec{j}\ \text{N/C}$$

El módulo de este vector es:

$$E_A = \sqrt{720^2 + 960^2} = 1200\ \text{N/C}$$

b) El potencial eléctrico en B se calcula fácilmente a partir del valor de las cargas y de la distancia existente entre el punto y cada una de las cargas:

$$V_B = V_{1B} + V_{2B} = k \cdot \frac{q_1}{r_{1B}} + k \cdot \frac{q_2}{r_{2B}}$$

Teniendo en cuenta que $r_{1B} = r_{2B} = r$:

$$V_B = \frac{k}{r} \cdot (q_1 + q_2) = \frac{9 \cdot 10^9 \, \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2}}{4\ \text{m}} \cdot \left(10 \cdot 10^{-6}\ \text{C} - 6 \cdot 10^{-6}\ \text{C}\right) = 9000\ \text{V}$$

El trabajo necesario para traer una carga desde al infinito al punto B se puede calcular así:

$$W = -\Delta E_P = -\left(E_{P\,B} - E_{P\,\text{Inicial}}\right) = \underbrace{E_{P\,\text{Inicial}}}_{0} - E_{P\,B} = -q \cdot V_B = -\left(-10^{-12}\ \text{C}\right) \cdot 9000\ \text{V} = 9 \cdot 10^{-9}\ \text{J}$$

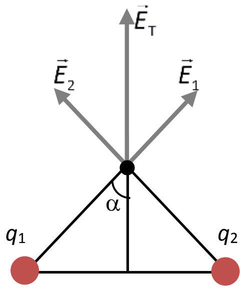
El signo positivo del trabajo indica que esta carga se desplaza de forma espontánea desde el infinito hasta el punto B.

39. Se disponen dos cargas eléctricas q_1 y q_2 colocadas simétricas a 1 m a la izquierda y a la derecha, respectivamente, del origen de coordenadas. Determina:

a) Los valores de las cargas q_1 y q_2 para que el campo eléctrico en el punto (0, 1) sea $\vec{E} = 2 \cdot 10^{-5}\,\vec{j}\ \text{N/C}$.

b) La relación entre las cargas q_1 y q_2 para que el potencial eléctrico a 2 m del origen en sentido OX positivo sea cero.

a) Elaboramos un esquema de la situación. Como se aprecia en el esquema, si el campo tiene únicamente componente vertical, es porque ambas cargas son iguales. En caso contrario, uno de los campos tendría una componente horizontal mayor que el otro.



La distancia de cada carga al punto pedido es:

$$r = \sqrt{(1\ \text{m})^2 + (1\ \text{m})^2} = \sqrt{2}\ \text{m}$$

Entonces:

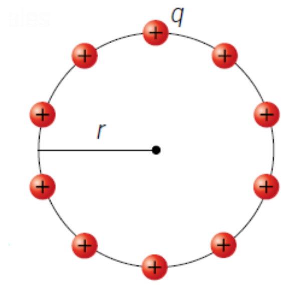
$$\vec{E}_T = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = E_{1x}\,\vec{i} + E_{1y}\,\vec{j} - E_{2x}\,\vec{i} - E_{2y}\,\vec{j} = 2 \cdot E_{1y}\,\vec{j} = 2 \cdot E_1 \cdot \cos\alpha \cdot \vec{j} = 2 \cdot k \cdot \frac{q_1}{r^2} \cdot \cos\alpha \cdot \vec{j} \rightarrow$$

$$\rightarrow q_1 = \frac{|E_T| \cdot r^2}{2 \cdot k \cdot \cos\alpha} = \frac{2 \cdot 10^5 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^2}{2 \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}} = 3{,}143 \cdot 10^{-5}\ \text{C}$$

b) El potencial eléctrico en el punto (2, 0), a partir de ahora lo denominaremos B, se calcula a partir del valor de las cargas y de la distancia existente entre el punto y cada una de las cargas:

$$V_B = V_{1B} + V_{2B} = k \cdot \frac{q_1}{r_{1B}} + k \cdot \frac{q_2}{r_{2B}} = 0 \rightarrow \frac{q_1}{r_{1B}} = -\frac{q_2}{r_{2B}} \rightarrow q_2 = -\frac{r_{2B}}{r_{1B}} \cdot q_1 \rightarrow q_2 = -\frac{1}{3} \cdot q_1$$

40. **Una distribución de cargas puntuales consiste en diez cargas iguales $q = 8$ μC situadas equidistantes sobre una circunferencia de radio $r = 2$ m, calcula.**



a) El potencial eléctrico en el centro de la circunferencia.

b) El trabajo necesario para traer una carga $q = 2$ μC desde el infinito hasta el centro de la circunferencia.

Dato: $k = 9 \cdot 10^9$ N · m² · C⁻².

a) El potencial eléctrico en el centro se calcula a partir del valor de las cargas y de la distancia existente entre el punto y cada una de las cargas. Como la distancia a todas las cargas es la misma y las cargas son todas iguales:

$$V = \sum_i V_i = \sum_i k \cdot \frac{q_i}{r} = 10 \cdot k \cdot \frac{q}{r} = 10 \cdot 9 \cdot 10^9 \, \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \cdot \frac{8 \cdot 10^{-6}\ \text{C}}{2\ \text{m}} = 3{,}6 \cdot 10^5\ \text{V}$$

b) El trabajo necesario para traer una carga desde al infinito al punto B se puede calcular así:

$$W = -\Delta E_\text{P} = -\left(E_{\text{P Centro}} - E_{\text{P Inicial}}\right) = \underbrace{E_{\text{P Inicial}}}_{0} - E_{\text{P Centro}} = -q \cdot V = -2 \cdot 10^{-6}\ \text{C} \cdot 3{,}6 \cdot 10^5\ \text{V} = -0{,}72\ \text{J}$$

Es un trabajo negativo; por tanto, es un trabajo que hay que realizar para trasladar la carga.

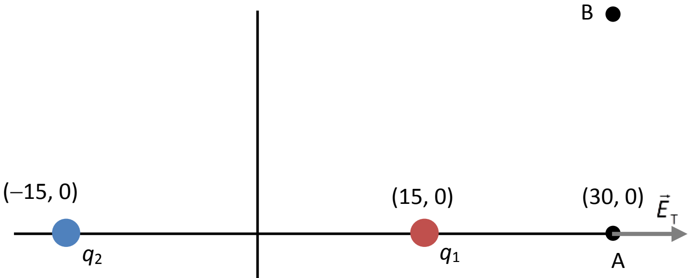
41. **Sean dos cargas eléctricas iguales y de signos contrarios que se encuentran fijas y separadas una distancia de 30 m. La carga positiva se encuentra a 15 m a la derecha del origen de coordenada y la carga negativa, simétrica respecto al origen, a 15 m a la izquierda. En el punto A (30, 0) el campo eléctrico vale $E = 120$ V/m en sentido eje OX positivo.**

a) Calcula el valor de las cargas que crean el campo.

b) Sabiendo que el potencial en el punto B (30, 20) es igual a 598,18 V, determina el trabajo necesario para trasladar una carga de $-2 \cdot 10^{-9}$ C desde B hasta A.

c) Según lo calculado en el apartado anterior, contesta, justificando la respuesta, ¿el trabajo lo realiza el campo eléctrico o debe ser realizado por un agente externo?

Dato: $k = 9 \cdot 10^9$ N · m²/C².



a) El campo en el punto indicado se puede calcular a partir de los campos que crea cada carga.

Como las cargas son opuestas, en el punto señalado los campos tendrán sentidos opuestos, y el campo se podrá calcular restando los módulos de ambos campos.

Teniendo en cuenta que $q_1 = q_2 = q$:

$$\vec{E}_\text{T} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \rightarrow E = E_1 - E_2 = k \cdot \frac{q_1}{r_1^2} - k \cdot \frac{q_2}{r_2^2} \cdot = k \cdot q \cdot \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow q = \frac{E}{k \cdot \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2}\right)} = \frac{120\ \text{N/C}}{9 \cdot 10^9 \, \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \cdot \left(\frac{1}{(15\ \text{m})^2} - \frac{1}{(45\ \text{m})^2}\right)} = 3{,}375 \cdot 10^{-6}\ \text{C}$$

Por tanto, $q_1 = 3{,}375 \cdot 10^{-6}$ C y $q_2 = -3{,}375 \cdot 10^{-6}$ C.

b) Hay que calcular el potencial en A y B. Teniendo en cuenta que q_1 y q_2 tienen el mismo valor pero distinto signo:

$$V_\text{A} = V_{1\text{A}} + V_{2\text{A}} = k \cdot \frac{q_1}{r_{1\text{A}}} + k \cdot \frac{q_2}{r_{2\text{A}}} = k \cdot \left(\frac{q_1}{r_{1\text{A}}} + \frac{q_2}{r_{2\text{A}}}\right) = k \cdot q \cdot \left(\frac{1}{r_{1\text{A}}} - \frac{1}{r_{2\text{A}}}\right) =$$

$$= 9 \cdot 10^9 \, \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \cdot 3{,}375 \cdot 10^{-6}\ \text{C} \cdot \left(\frac{1}{15\ \text{m}} - \frac{1}{45\ \text{m}}\right) = 1350\ \text{V}$$

Conocido el valor de la carga que queremos desplazar y el potencial en los puntos inicial y final ya podemos calcular el trabajo pedido:

$$W = -\Delta E_P = -q \cdot \Delta V = q \cdot (V_B - V_A) = -2 \cdot 10^{-9}\ \text{C} \cdot (598{,}18\ \text{V} - 1350\ \text{V}) = 1{,}5 \cdot 10^{-6}\ \text{J}$$

c) Como el trabajo es positivo, esto quiere decir que lo realiza el campo.

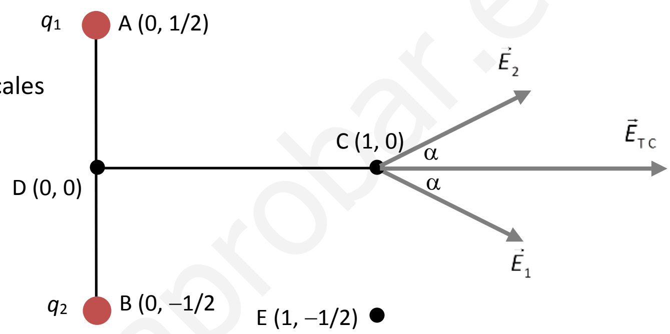
42. Dos cargas eléctricas de +16 μC están situadas en A (0, 1/2) m y B (0, –1/2) m. Calcula:

a) El campo eléctrico y el potencial eléctrico en C (1, 0) m y en D (0, 0) m.

b) Una partícula de masa $m = 2$ g y carga $q = -2$ μC se coloca en C con una velocidad inicial de 30 m/s en la dirección negativa del eje X. Si solo intervienen fuerzas eléctricas, calcula la velocidad de esta partícula al llegar al punto D.

Dato: $k = 9 \cdot 10^9\ \text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2}$.

a) El campo en el punto C, por la simetría del problema, tendrá dirección horizontal y hacia la derecha, puesto que las componentes verticales tienen igual módulo y sentidos opuestos, tal y como se aprecia en la figura.



Entonces podemos escribir el módulo del campo total como el doble de la componente horizontal del campo que crea cualquiera de las cargas en dicho punto.

El coseno del ángulo α valdrá:

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1{,}25}}$$

Entonces se puede escribir el campo total en C de este modo:

$$\vec{E}_{TC} = 2 \cdot E_1 \cdot \cos\alpha\ \vec{i} = 2 \cdot k \cdot \frac{q_1}{r_1^2} \cdot \cos\alpha\ \vec{i} = -2 \cdot 9 \cdot 10^9\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \cdot \frac{16 \cdot 10^{-6}\ \text{C}}{\left(\frac{1}{2}\ \text{m}\right)^2 + (1\ \text{m})^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1{,}25}}\ \vec{i} = -2{,}06 \cdot 10^5\ \vec{i}\ \text{N/C}$$

En el punto D el campo total es cero puesto que los campos creados en dicho punto por ambas cargas son iguales en módulo y dirección, y tienen sentidos opuestos.

El potencial en C será:

$$V_C = V_{1\,C} + V_{2\,C} = 2 \cdot V_{1\,C} = 2 \cdot k \cdot \frac{q_1}{r_{1\,C}} = 2 \cdot 9 \cdot 10^9\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \cdot \frac{16 \cdot 10^{-6}\ \text{C}}{\sqrt{(1\ \text{m})^2 + \left(\frac{1}{2}\ \text{m}\right)^2}} = 2{,}58 \cdot 10^5\ \text{V}$$

Y en el punto D:

$$V_D = V_{1\,D} + V_{2\,D} = 2 \cdot V_{1\,D} = 2 \cdot k \cdot \frac{q_1}{r_{1\,D}} = 2 \cdot 9 \cdot 10^9\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \cdot \frac{16 \cdot 10^{-6}\ \text{C}}{1/2\ \text{m}} = 5{,}76 \cdot 10^5\ \text{V}$$

b) Aplicando el principio de conservación de la energía, la energía total de la partícula debe ser la misma en C y en D.

$$E_C = E_D \rightarrow E_{C\,C} + E_{P\,C} = E_{C\,D} + E_{P\,D} \rightarrow \frac{1}{2} m \cdot v_C^2 + q \cdot V_C = \frac{1}{2} m \cdot v_D^2 + q \cdot V_D \rightarrow \frac{1}{2} m \cdot v_D^2 = \frac{1}{2} m \cdot v_C^2 + q \cdot V_C - q \cdot V_D \rightarrow$$

$$\rightarrow v_D = \sqrt{\frac{\frac{1}{2} m \cdot v_C^2 + q \cdot (V_C - V_D)}{\frac{1}{2} m}} = \sqrt{v_C^2 + \frac{2 \cdot q \cdot (V_C - V_D)}{m}} =$$

$$= \sqrt{(30\ \text{m/s})^2 + \frac{2 \cdot (-2 \cdot 10^{-6}\ \text{C}) \cdot (2{,}58 \cdot 10^5\ \text{V} - 5{,}76 \cdot 10^5\ \text{V})}{2 \cdot 10^{-3}\ \text{kg}}} = 39{,}19\ \text{m/s}$$

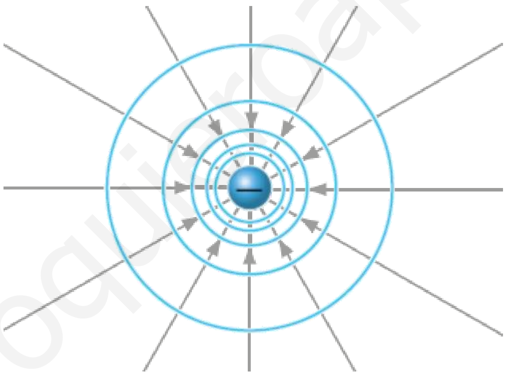
La partícula acelera, puesto que su velocidad inicial tiene el sentido opuesto al campo y la partícula tiene carga negativa. Es decir, sufrirá una fuerza horizontal y hacia la izquierda.

43. Razona la respuesta.

a) Dibuja las líneas de campo y las superficies equipotenciales de una carga puntual negativa.

b) ¿Qué trabajo se realiza si una carga se mueve entre dos puntos a través de una misma superficie equipotencial?

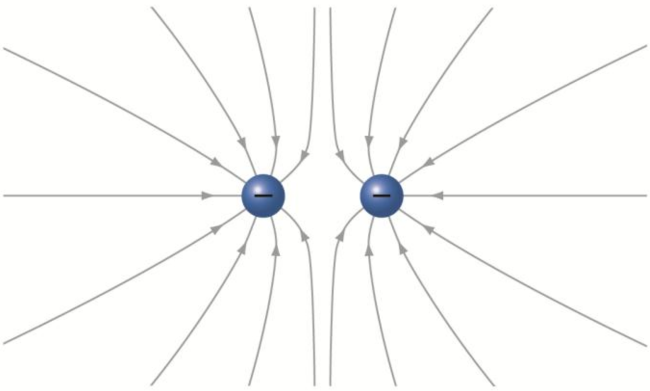
a) Las líneas de campo entran en la carga, mientras que las superficies potenciales son esferas centradas en la carga, puesto que la intensidad del campo depende únicamente de la distancia a la carga y el campo tiene una dirección radial.



b) Si una carga se mueve entre dos puntos de una misma superficie equipotencial, su energía potencial no variará, puesto que en la superficie equipotencial el potencial de una carga es constante. Por tanto, no realizará ningún trabajo.

44. Haz un esquema con las líneas del campo creado por dos cargas negativas iguales y separadas una distancia *d*.

El esquema sería el siguiente:



45. Si en una región del espacio el potencial eléctrico es constante, ¿cómo es el campo eléctrico creado en dicha región?

El campo eléctrico será nulo.

$$-\Delta V = \vec{E} \cdot \vec{r}$$

Si el potencial es constante:

$$-\Delta V = 0 \rightarrow \vec{E} = 0$$

46. Justifica si la siguiente afirmación es verdadera o falsa: «La unidad del campo eléctrico es N/C y equivale a V/m».

Verdadero. El campo eléctrico puede escribirse así:

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E} \rightarrow [E] = \frac{[F]}{[q]} = \frac{\text{N}}{\text{C}}$$

Por otra parte:

$$\left.\begin{array}{l} E = k \cdot \dfrac{q}{r^2} \\ V = k \cdot \dfrac{q}{r} \end{array}\right\} \rightarrow \frac{[E]}{[V]} = \frac{[r]}{[r^2]} = \frac{\text{m}}{\text{m}^2} \rightarrow [E] = \frac{[V]}{\text{m}} = \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

47. Se introduce un electrón, inicialmente en reposo, en el seno de un campo eléctrico uniforme. Contesta:

a) ¿Se desplazará hacia las regiones de mayor o de menor potencial electrostático?

b) ¿Qué ocurriría si introdujéramos un protón?

a) El electrón se desplazará hacia regiones de mayor potencial electrostático, pues tiene carga negativa y sufre una fuerza que se opone en dirección al sentido del campo, y este está dirigido desde potenciales mayores a potenciales menores.

b) Si introducimos un protón, como este tiene carga positiva, sufrirá una fuerza en el mismo sentido que el campo, por lo que se moverá hacia potenciales decrecientes.

48. En la superficie de una esfera conductora se acumula un exceso de un millón de electrones. ¿Cómo crees que será el valor del campo eléctrico en el interior de la esfera: positivo, negativo o nulo? Justifica la respuesta.

El campo en el interior será nulo, puesto que en un conductor la carga se acumula en la superficie y, aplicando el teorema de Gauss, el campo será nulo en cualquier punto interior de la esfera. Si tomamos una esfera de radio menor que el radio de la esfera como superficie de Gauss, la carga encerrada será cero, puesto que la carga solo está en la superficie del conductor, y por tanto el campo en el interior también será cero.

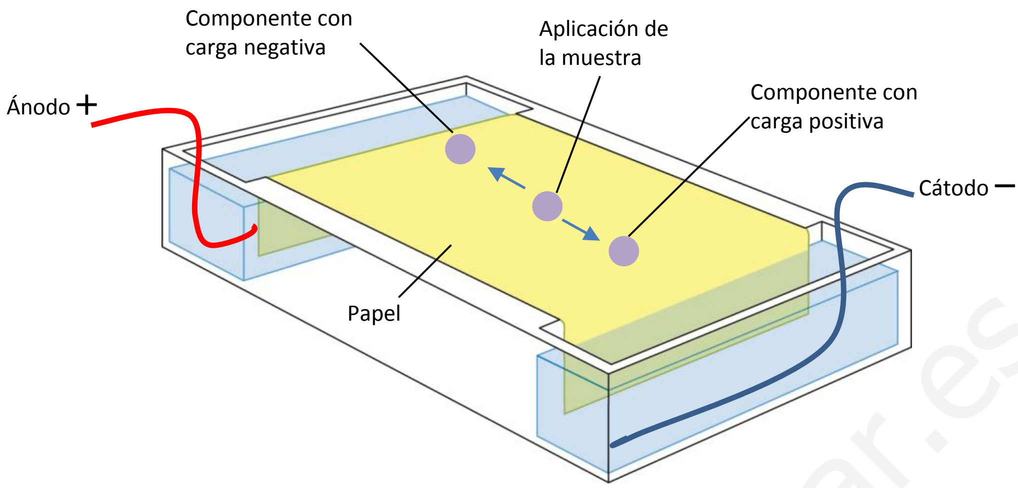
49. La electroforesis es un método para analizar mezclas basado en el desplazamiento de sustancias por la acción de un campo eléctrico. Tenemos una muestra entre dos electrodos separados 20 cm y conectados a una diferencia de potencial de 300 V.

a) Dibuja las líneas del campo eléctrico y las superficies equipotenciales. Indica el potencial de cada superficie.

b) Calcula el valor del campo eléctrico que hay entre los electrodos e indica la dirección y el sentido de las partículas positivas y las negativas.

c) En el aparato de electroforesis las moléculas adquieren carga eléctrica y se desplazan con un movimiento rectilíneo lento y uniforme. Calcula la fuerza eléctrica y la fuerza de fricción que actúan sobre una molécula de timina con una carga de $-1{,}60 \cdot 10^{-19}$ C.

a) Las líneas de campo están dirigidas desde el electrodo a un mayor potencial hasta el electrodo a un menor potencial; es decir, desde el electrodo positivo al negativo. Las superficies equipotenciales son planos perpendiculares a las líneas de campo.



El potencial de cada superficie depende de la distancia a la que se encuentra de los electrodos. Las superficies más cercanas al electrodo positivo tendrán un potencial mayor que las que se encuentran cercanas al electrodo negativo. Si llamamos *d* a la distancia en cm de la superficie equipotencial al electrodo positivo, entonces:

$$V_d = \frac{300}{20} \cdot (20\ \text{cm} - d)$$

b) El campo eléctrico puede calcularse a partir de la diferencia de potencial. Estará dirigido desde el electrodo positivo hacia el electrodo negativo.

$$\Delta V = E \cdot r \rightarrow E = \frac{\Delta V}{r} = \frac{300\ \text{V}}{0{,}2\ \text{m}} = 1500\ \text{N/C}$$

Las partículas positivas se moverán en la misma dirección y sentido que tiene el campo, es decir, hacia el electrodo negativo. Las partículas negativas se moverán hacia el electrodo positivo.

c) La fuerza eléctrica se puede calcular multiplicando el valor de la carga por el campo eléctrico. Como la carga es negativa, se moverá en sentido opuesto al campo, hacia el electrodo positivo. La fuerza de fricción es igual a la fuerza eléctrica, puesto que el movimiento es uniforme. El valor de la fuerza es:

$$F_E = |q| \cdot E \rightarrow F = \left|-1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{C}\right| \cdot 1500\ \text{N/C} = 2{,}4 \cdot 10^{-16}\ \text{N}$$

50. Dos láminas metálicas separadas 20 cm crean en su interior un campo eléctrico uniforme de 2,5 · 10⁴ N/C. Una gota de aceite de 5 · 10⁻¹⁴ kg se encuentra, en equilibrio, suspendida a la misma distancia de cada placa.

a) Halla la diferencia de potencial entre las placas indicando el signo de cada una.

b) Halla la carga eléctrica depositada en la gota.

Dato: $g = 9{,}8$ m/s².

a) Existe una relación entre el potencial y el campo eléctrico existente entre las placas:

$$|\Delta V| = E \cdot d = 2{,}5 \cdot 10^4\ \text{N/C} \cdot 0{,}2\ \text{m} = 5000\ \text{V}$$

La placa con mayor potencial es aquella de la que parten las líneas de campo, y la de menor potencial, a la que llegan las líneas del campo eléctrico.

b) Si la gota está en equilibrio, es porque se compensan la fuerza gravitatoria y la fuerza eléctrica. Por tanto, podemos escribir:

$$F_E = F_G \rightarrow q \cdot E = F_G \rightarrow q \cdot E = m \cdot g \rightarrow q = \frac{m \cdot g}{E} = \frac{5 \cdot 10^{-14}\ \text{kg} \cdot 9{,}81\ \text{m/s}^2}{2{,}5 \cdot 10^4\ \text{N/C}} = 1{,}96 \cdot 10^{-17}\ \text{C}$$

51. En el interior de una cámara aceleradora de 30 cm de longitud los electrones se mueven con un MRUA y una aceleración hacia la derecha de 1,20 · 10^13 m/s^2. Supón despreciables los efectos gravitatorios y relativistas.

a) Calcula el vector campo eléctrico en el interior.

b) Calcula la diferencia de potencial entre los extremos de la cámara. ¿Cuánta energía gana cada electrón que atraviesa la cámara?

Datos: $q_e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C; $m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ kg.

a) La aceleración está provocada por una fuerza eléctrica sobre los electrones. Entonces podemos escribir:

$$F_E = q \cdot E = m \cdot a \rightarrow E = \frac{m \cdot a}{q} = \frac{9{,}11 \cdot 10^{-31}\ \text{kg} \cdot 1{,}20 \cdot 10^{13}\ \text{m/s}^2}{1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \text{C}} = 68{,}24\ \text{N/C}$$

El campo está dirigido en sentido opuesto al de la aceleración de los electrones; por tanto, hacia la izquierda.

b) La diferencia de potencial entre los extremos de la cámara se puede calcular porque en la cámara el campo eléctrico es constante, puesto que la aceleración de los electrones constante implica que la fuerza eléctrica que sufren es constante. Entonces:

$$|\Delta V| = E \cdot d = 68{,}24\ \text{N/C} \cdot 0{,}3\ \text{m} = 20{,}47\ \text{V}$$

La energía que gana cada electrón al atravesar la cámara será igual a la diferencia de energía potencial electrostática entre ambos extremos. Es decir:

$$E_+ - E_- = |\Delta E_P| = E_{P-} - E_{P+} = q \cdot (V_- - V_+) = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \cdot 20{,}47\ \text{V} = 3{,}28 \cdot 10^{-18}\ \text{J}$$

FÍSICA EN TU VIDA

1. Contesta:

a) ¿Cuál es la función de los condensadores en un flash? ¿Y la del transformador?

b) ¿Por qué es necesario emitir la luz en un periodo corto de tiempo?

a) Los condensadores acumulan carga eléctrica para luego liberarla y producir un destello muy intenso. El transformador modifica el voltaje que llega al aparato.

b) Para que al sensor del teléfono o de la cámara fotográfica solo llegue la luz que refleja el motivo fotografiado.

2. En los flashes profesionales se adjunta un dato llamado tiempo de recarga. Justifica su existencia.

Es el tiempo necesario para recargar el flash después de cada disparo. Esto se debe a que los condensadores necesitan cierto tiempo para adquirir la carga eléctrica.

3. ¿Por qué se ionizan los átomos de xenón que hay dentro del tubo del flash? ¿Qué es lo que los atrae?

Porque se aplica un voltaje muy elevado, lo que consigue atraer a los electrones de los átomos de xenón y arrancárselos, con lo cual los átomos se ionizan. Los atrae una pieza metálica sobre la que se aplica el voltaje tan elevado.

4. ¿Por qué crees que muchos flashes pueden orientarse para que la luz emitida no incida directamente sobre el objeto fotografiado?

Porque así la luz que incide sobre el motivo a fotografiar no es tan directa, es más difusa y las sombras no son tan acusadas. Al inclinar el flash la luz que llega al motivo no proviene solo del flash directamente, sino que también es luz reflejada en un paraguas reflector, por ejemplo, que usan muchos fotógrafos. O en situaciones más normales, la luz emitida por el flash se refleja en techo y paredes antes de incidir sobre el rostro del modelo fotografiado, por ejemplo.

5. En muchos museos no se permite la fotografía con flash, o directamente no se permite la fotografía. ¿Qué te parecen estas medidas? ¿Crees que sería suficiente con prohibir el flash, pero dejar fotografiar sin él?

Respuesta personal. La prohibición de fotografiar con flash obedece a dos motivos principalmente:

- Por una parte, algunas obras de arte pueden verse afectadas por los continuos disparos de los visitantes de un museo, por ejemplo. Podemos pensar que realmente un disparo de flash no supone demasiado problema, pero si somos conscientes de los miles de personas que visitan a diario las más conocidas obras de arte de los principales museos, comprenderemos que se pueden producir daños.
- En otros casos la prohibición está más relacionada con el flujo de personas en diferentes salas. Dejar fotografiar con flash implica en muchos casos que los visitantes permanecerán más tiempo en ciertas salas, lo que dificulta el ritmo de visitas en museos muy concurridos. Este es el motivo por el que en muchos museos no se permite fotografiar, ni siquiera sin flash.

PROYECTO SABER HACER

3

Campo magnético

SANTILLANA

Campo magnético

3

PARA COMENZAR

- **¿Por qué las auroras polares se observan casi exclusivamente en latitudes altas, en regiones cercanas a los polos?**

  Porque los polos magnéticos de la Tierra se encuentran situados muy cerca de los polos geográficos.

- **¿Qué relación existe entre las auroras polares y las tormentas solares?**

  Las tormentas solares provocan un incremento en el número de partículas con carga eléctrica que llegan a la Tierra. Entonces, tras producirse tormentas solares, cuando dichas partículas cargadas llegan a la Tierra tiene lugar un incremento del número de auroras, o estas son más intensas.

ACTIVIDADES

1. Los imanes están presentes en muchos dispositivos cotidianos. Utiliza los imanes para diseñar un personaje que acerca la mano cuando se le ofrece algo que le gusta y la retira cuando no le gusta.

Respuesta libre. Hay que tener en cuenta que los polos del mismo tipo se repelen y los polos de tipos opuestos se atraen.

2. El levitrón es otro dispositivo basado en imanes. Explica el funcionamiento del que se muestra en la imagen.

En el levitrón se produce una repulsión magnética entre los imanes que existen en la base que se apoya sobre una mesa, por ejemplo, y los imanes que están en el interior del dispositivo, de manera que este flota, pues la fuerza magnética compensa la atracción gravitatoria ejercida por la Tierra.

3. Un electrón penetra en una región del espacio donde existe un campo magnético uniforme *B* con velocidad constante *v*. Contesta.

a) ¿Qué fuerza actúa sobre el electrón?

b) ¿Bajo qué condiciones el campo magnético no influye en su movimiento?

a) Sobre el electrón actúa la fuerza de Lorentz, cuyo módulo es igual al producto del campo magnético por la carga de la partícula y por la velocidad que lleva. Además, hay que multiplicar por el seno del ángulo que forman la velocidad y el campo magnético.

$$\vec{F} = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$

b) El campo magnético no influye en su movimiento cuando el producto vectorial de la velocidad por el campo magnético es cero, es decir, cuando ambos forman un ángulo de 0°: son paralelos.

4. Una partícula con carga *q* y velocidad *v* entra en un campo magnético perpendicular a la dirección de movimiento.

a) Analiza el trabajo realizado por la fuerza magnética y la variación de energía cinética de la partícula.

b) Si la partícula se moviese en dirección paralela al campo, ¿qué ocurriría ahora con el trabajo realizado por la fuerza magnética? ¿Y con la variación de energía cinética de la partícula? Explica las diferencias entre ambos casos.

a) Si el campo magnético es perpendicular a la dirección de movimiento, ejercerá sobre la partícula una fuerza llamada fuerza de Lorentz:

$$\vec{F}_B = q \cdot \vec{v} \times \vec{B} \rightarrow F_B = q \cdot v \cdot B \cdot \text{sen}\, \alpha = q \cdot v \cdot B \cdot \text{sen}\, 90^\circ = q \cdot v \cdot B$$

Como vemos en la expresión anterior, la fuerza es perpendicular a la velocidad de la partícula; en consecuencia, no se realiza trabajo porque el producto escalar de la fuerza por el desplazamiento es nulo al intervenir un ángulo de 90° en el producto escalar:

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{l} = 0$$

En consecuencia, como el trabajo es igual a la variación de energía cinética, no habrá variación en la energía cinética de la partícula. La partícula cambia de dirección, pero el módulo de su velocidad no varía.

b) Si la partícula se mueve en dirección paralela al campo, la fuerza de Lorentz será nula, y entonces tampoco habrá trabajo realizado, y tampoco habrá variación en la energía cinética de la partícula.

5. En una región del espacio hay un campo magnético uniforme dirigido en el sentido negativo del eje X y dado por $\vec{B} = -2{,}8 \cdot 10^{-5}\ \vec{i}$ T. Calcula la fuerza magnética que actúa sobre una partícula de carga $q = 2 \cdot 10^{-6}$ C que penetra en el seno del campo magnético con una velocidad $\vec{v} = 2 \cdot 10^4\ \vec{k}$ m/s.

La fuerza de Lorentz ejercida sobre la partícula vendrá dada por:

$$\vec{F}_B = q \cdot \vec{v} \times \vec{B} \rightarrow \vec{F} = 2 \cdot 10^{-6}\ \text{C} \cdot 2 \cdot 10^4\ \text{m/s} \cdot 2{,}8 \cdot 10^{-5}\ \text{T} \cdot \left[\vec{k} \times \left(-\vec{i}\right)\right] = -1{,}12 \cdot 10^{-6}\ \vec{j}\ \text{N}$$

6. En una región del espacio existe un campo magnético constante perpendicular al plano del papel y sentido hacia dentro del mismo. Penetran por los extremos de la región donde hay campo magnético dos electrones con la misma velocidad y dirección, pero en sentidos contrarios, tal y como indica la figura.

a) Dibuja la fuerza magnética que actúa sobre cada electrón. Justifica y dibuja las trayectorias de los dos electrones e indica el sentido de giro.

b) Imagina que eliminamos este campo magnético y lo sustituimos por otro campo magnético. En este caso, los electrones no se desvían cuando entran en esta región. Dibuja cómo debe ser este nuevo campo magnético. Justifique la respuesta.

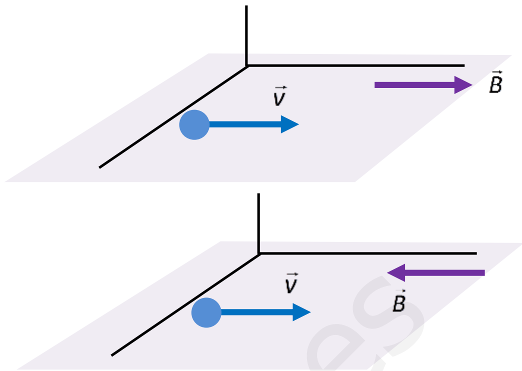
Nota: No es válida la respuesta $\vec{B} = 0$.

a) Respuesta gráfica.

La fuerza es perpendicular tanto al campo magnético como a la velocidad de cada electrón y viene dada por la fuerza de Lorentz ($\vec{F} = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$). En la imagen para el electrón que penetra con velocidad hacia la derecha, la fuerza tendrá un sentido vertical y hacia abajo, pues se trata de una partícula con carga negativa. Por tanto, este electrón girará hacia abajo, en el sentido de las agujas del reloj.

Razonando de forma similar para el electrón que se mueve hacia la izquierda en la figura la fuerza tendrá sentido hacia arriba. Por tanto, este electrón girará hacia arriba, en el sentido de las agujas del reloj también.

b) Si en la región existe, en vez de este, otro campo magnético que no desvía los electrones, es porque este campo magnético es paralelo al movimiento de los electrones y entonces la fuerza de Lorentz es nula. Es decir, el campo magnético debe estar contenido en el plano del papel y sus líneas de campo, paralelas al movimiento de los electrones, bien hacia la derecha o hacia la izquierda.



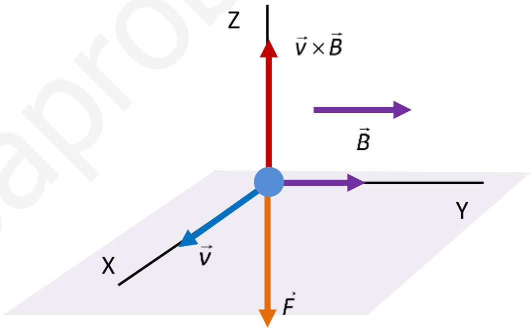
La fuerza de Lorentz ejercida sobre la partícula vendrá dada por:

$$\vec{F} = q \cdot \vec{v} \times \vec{B} = 0 \rightarrow \vec{v} \times \vec{B} = 0 \rightarrow v \cdot B \cdot \text{sen}\,\alpha = 0 \rightarrow$$
$$\rightarrow \text{sen}\,\alpha = 0 \rightarrow \alpha = 0^\circ \text{ o } \alpha = 180^\circ$$

7. En una región del espacio existe un campo magnético uniforme $\vec{B}$ en la dirección positiva del eje Y. En esta región entra un electrón que se mueve con velocidad *v* en la dirección positiva del eje X. Indica cuál será la trayectoria que seguirá el electrón en esa región.

El producto vectorial de la velocidad por el campo magnético tiene dirección vertical y sentido hacia abajo, pues el electrón tiene carga negativa. Por tanto, el electrón sufrirá una fuerza vertical y hacia abajo, y se moverá en el plano XZ siguiendo una curva.

$$\vec{F} = q \cdot \vec{v} \times \vec{B} = 0 = -|q| \cdot v \cdot B \cdot \left(\vec{i} \times \vec{j}\right) = -|q| \cdot v \cdot B \cdot \vec{k}$$



8. Un protón penetra con una velocidad $\vec{v}$ en el seno de un campo magnético uniforme $\vec{B}$. Explica la trayectoria que seguirá el protón:

a) Si la velocidad del protón es paralela a $\vec{B}$.

b) Si la velocidad del protón es perpendicular a $\vec{B}$.

a) Según la expresión de la fuerza de Lorentz ($\vec{F} = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$), si la velocidad es paralela al campo magnético el ángulo que forman es 0º, por lo que la fuerza es nula. Por tanto, si la velocidad del protón es paralela al campo magnético, el protón no sufrirá fuerza alguna y seguirá moviéndose como lo hacía antes, con movimiento rectilíneo.

b) Si la velocidad es perpendicular al campo magnético, existirá una fuerza de Lorentz perpendicular a la velocidad del protón y al campo magnético, de modo que la trayectoria del protón se curvará.

9. En una región del espacio existe un campo magnético uniforme de inducción 0,8 mT en el sentido positivo del eje OX. Penetra en el campo un electrón que se mueve en dirección OY y con una energía cinética de $8 \cdot 10^{-18}$ J.

a) Calcula la velocidad con la que penetra el electrón en el campo magnético.

b) Halla el módulo de la fuerza a la que está sometido el electrón.

c) ¿Qué tipo de movimiento tiene el electrón?

d) Determina el radio de la trayectoria que describe.

Datos: $m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ kg; $q_e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C.

a) La velocidad del electrón se puede calcular a partir de su energía cinética.

$$E_C = \frac{1}{2}\cdot m\cdot v^2 \rightarrow v = \sqrt{\frac{2\cdot E_C}{m}} = \sqrt{\frac{2\cdot 8\cdot 10^{-18}\ \text{J}}{9{,}11\cdot 10^{-31}\ \text{kg}}} = 4{,}19\cdot 10^6\ \text{m/s}$$

b) El módulo de la fuerza a la que está sometido el electrón viene dado por la expresión de la fuerza de Lorentz:

$$\vec{F} = q\cdot\vec{v}\times\vec{B} = 0 \rightarrow |F| = |q|\cdot v\cdot B = 1{,}602\cdot 10^{-19}\ \text{C}\cdot 4{,}19\cdot 10^6\ \text{m/s}\cdot 0{,}8\cdot 10^{-3}\ \text{T} = 5{,}37\cdot 10^{-16}\ \text{N}$$

c) La fuerza es perpendicular al movimiento del electrón, por lo que la trayectoria del electrón se curva. El módulo de su velocidad no varía, pero sí su dirección. Por tanto, el electrón tendrá un movimiento circular.

d) Podemos identificar la fuerza de Lorentz con la fuerza centrípeta que hace girar al electrón y así calcular el radio de la trayectoria que sigue el electrón.

$$F_C = F_B \rightarrow \frac{m\cdot v^2}{r} = |q|\cdot v\cdot B \rightarrow r = \frac{m\cdot v^{\cancel{2}}}{|q|\cdot \cancel{v}\cdot B} = \frac{9{,}11\cdot 10^{-31}\ \text{kg}\cdot 4{,}19\cdot 10^6\ \text{m/s}}{1{,}602\cdot 10^{-19}\ \text{C}\cdot 0{,}8\cdot 10^{-3}\ \text{T}} = 2{,}978\cdot 10^{-2}\ \text{m} = 2{,}978\ \text{cm}$$

10. Un protón penetra en el seno de un campo magnético $\vec{B}$ con velocidad $\vec{v}$ perpendicular al campo. El protón describe una trayectoria circular con un periodo de $2\cdot 10^{-6}$ s.

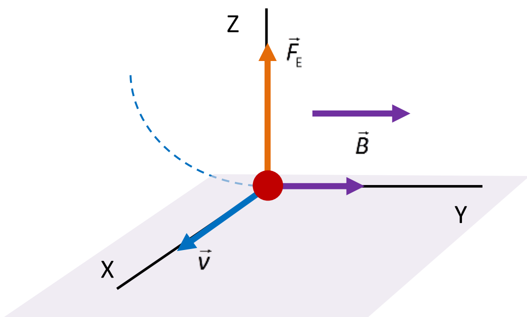
a) Dibuja un esquema con los vectores $\vec{v}$, $\vec{B}$ y $\vec{F}$ en un punto de la trayectoria.

b) Calcula el valor del campo magnético.

c) Si introdujéramos en el campo un electrón con la misma velocidad $\vec{v}$, ¿cómo cambiaría la trayectoria?

Datos: $m_p = 1{,}67\cdot 10^{-27}$ kg; $m_e = 9{,}11\cdot 10^{-31}$ kg; $q_p = 1{,}602\cdot 10^{-19}$ C.

a) Respuesta gráfica. El protón seguirá una trayectoria circular en un plano perpendicular al campo magnético.



b) La fuerza magnética es la fuerza centrípeta que obliga al protón a describir una órbita circular. Por tanto, podemos escribir:

$$F_C = F_B \rightarrow \frac{m_p\cdot v^{\cancel{2}}}{r} = |q|\cdot\cancel{v}\cdot B \rightarrow \frac{m_p\cdot v}{r} = |q|\cdot B$$

Teniendo en cuenta que la velocidad lineal es igual al producto de la velocidad angular por el radio de la trayectoria:

$$v = \omega\cdot r$$

Y que la velocidad angular, a su vez, está relacionada con el periodo:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Obtenemos:

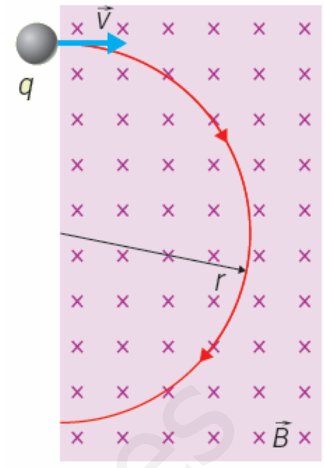
$$\frac{m_p\cdot\left(\frac{2\pi\cdot r}{T}\right)}{r} = |q|\cdot B \rightarrow \frac{m_p\cdot 2\pi\cdot\cancel{r}}{\cancel{r}\cdot T} = |q|\cdot B \rightarrow B = \frac{2\pi\cdot m_p}{|q|\cdot T} = \frac{2\pi\cdot 1{,}67\cdot 10^{-27}\ \text{kg}}{1{,}602\cdot 10^{-19}\ \text{C}\cdot 2\cdot 10^{-6}\ \text{s}} = 3{,}27\cdot 10^{-2}\ \text{T}$$

c) Si introducimos un electrón con la misma velocidad el sentido del giro será opuesto, puesto que tiene carga negativa. Además, como la masa del electrón es bastante menor que la del protón, el periodo de la órbita descrita por el electrón será diferente del periodo del protón. En el caso del electrón, el periodo se puede calcular así:

$$F_C = F_B \rightarrow \frac{m_e\cdot v^{\cancel{2}}}{r} = |q|\cdot\cancel{v}\cdot B \rightarrow \frac{m_e\cdot v}{r} = |q|\cdot B \rightarrow \frac{m_e\cdot\left(\frac{2\pi\cdot r}{T}\right)}{r} = |q|\cdot B \rightarrow \frac{m_e\cdot 2\pi\cdot\cancel{r}}{\cancel{r}\cdot T} = |q|\cdot B \rightarrow$$

$$\rightarrow T = \frac{2\pi\cdot m_e}{|q|\cdot B} = \frac{2\pi\cdot 9{,}11\cdot 10^{-31}\ \text{kg}}{1{,}602\cdot 10^{-19}\ \text{C}\cdot 3{,}27\cdot 10^{-2}\ \text{T}} = 1{,}09\cdot 10^{-9}\ \text{s}$$

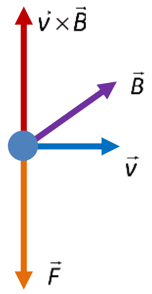
11. **En una región del espacio donde existe un campo magnético uniforme en dirección perpendicular al plano del dibujo se introduce una carga eléctrica, con velocidad $\vec{v}$ constante. Determina cuál debe ser el signo de la carga eléctrica para que esta se desvíe en el campo siguiendo la trayectoria indicada en la figura. Justifica la respuesta.**



La carga sufre una fuerza cuyo sentido está determinado por la siguiente expresión:

$$\vec{F} = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$

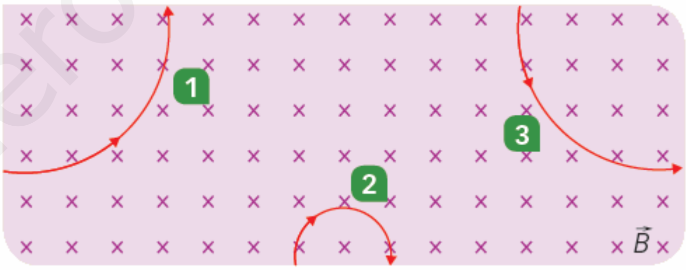
Si aplicamos la regla de la mano derecha al producto vectorial de los vectores velocidad y campo magnético, obtenemos un vector perpendicular a ambos y con sentido hacia arriba. Como la trayectoria se curva hacia abajo, eso implica que la carga tiene que ser negativa para que el sentido de la fuerza sea hacia abajo y produzca esta trayectoria.



12. **Observa la figura. Se representan las trayectorias de tres partículas en el seno de un campo magnético uniforme. Si todas tienen la misma masa y carga:**

a) **Determina el signo de las cargas que siguen las trayectorias 1, 2 y 3.**

b) **¿Cuál es la partícula más rápida?**



a) Numeramos las partículas de izquierda a derecha. El signo de la carga va a venir determinado por la expresión de la fuerza de Lorentz: $\vec{F} = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$.

Para la partícula 1 si hacemos el producto vectorial de la velocidad y el campo magnético, obtenemos un vector perpendicular a ambos y con sentido hacia arriba, como la trayectoria se curva en ese sentido es porque la carga de la partícula 1 es positiva.

Para la partícula 2, razonando de forma similar a como se ha hecho en la partícula 1, al hacer el producto vectorial del vector velocidad y el campo magnético, obtenemos un vector perpendicular a ambos y con sentido hacia la izquierda, como la trayectoria se curva hacia la derecha es porque la carga de la partícula 2 es negativa.

Para la partícula 3 si hacemos el producto vectorial de la velocidad y el campo magnético, obtenemos un vector perpendicular a ambos y con sentido hacia la derecha, como la trayectoria se curva en ese sentido es porque la carga de la partícula 3 es positiva.

b) La partícula más rápida es la que sufre una fuerza mayor, tal y como se deduce de la expresión de la fuerza de Lorentz.

$$\vec{F} = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$

Por tanto, la más rápida es aquella cuya trayectoria se curva más, es decir, la partícula 2.

13. Una carga negativa penetra en una región con un campo eléctrico y otro magnético sin desviarse. Si la partícula fuera positiva, ¿se desviaría?, ¿y si lo hiciera, hacia dónde se desviaría? Justifica la respuesta.

Si la partícula con carga negativa no se desvía, es porque la fuerza eléctrica y la fuerza magnética se compensan. Por ejemplo, si la partícula se mueve horizontalmente hacia la derecha y el campo eléctrico es vertical hacia abajo, la fuerza eléctrica es vertical y hacia arriba (la carga es negativa) y la fuerza magnética debe ser vertical y hacia abajo. Entonces, el campo magnético será perpendicular al plano que definen la velocidad y el campo eléctrico, tal que:

$$\vec{F}_E + \vec{F}_M = 0 \rightarrow \vec{F}_E = \vec{F}_M \rightarrow \cancel{q} \cdot \vec{E} = \cancel{q} \cdot \vec{v} \times \vec{B} \rightarrow \vec{E} = \vec{v} \times \vec{B}$$

En nuestro caso, para que esto ocurra el campo magnético debe entrar en el papel.

Si la carga es un protón el resultado no varía, porque en este caso la fuerza eléctrica estaría dirigida hacia abajo, en el sentido del campo eléctrico, y la fuerza magnética estaría dirigida hacia arriba. Igual que en el caso anterior, la fuerza neta sería nula.

14. Un ion de potasio, K^+, penetra en un campo magnético uniforme de intensidad $\vec{B} = 0{,}2\,\vec{k}$ T con una velocidad $\vec{v} = 16 \cdot 10^4\ \vec{i}$ m/s. Si describe una trayectoria circular de 65 cm de diámetro, calcula:

a) La masa de la partícula.

b) El módulo, dirección y sentido del campo eléctrico que habría que aplicar en esa región para que el ion no se desvíe.

Dato: $q_e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C.

a) Si describe una trayectoria circular, es porque sufre una fuerza de Lorentz donde podemos identificar dicha fuerza con la fuerza centrípeta. Por tanto, podemos escribir:

$$F_C = F_{\text{Lorentz}} \rightarrow \frac{m \cdot v^{\cancel{2}}}{r} = |q| \cdot \cancel{v} \cdot B \rightarrow \frac{m \cdot v}{r} = |q| \cdot B \rightarrow m = \frac{|q| \cdot B \cdot r}{v} = \frac{1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \cdot 0{,}2\ \text{T} \cdot 0{,}65\ \text{m}}{16 \cdot 10^4\ \text{m/s}} = 1{,}3 \cdot 10^{-25}\ \text{kg}$$

b) Para que el ion no se desvíe la fuerza magnética debe ser del mismo módulo y dirección que la fuerza eléctrica, pero de sentido opuesto. Es decir:

$$\vec{F}_E + \vec{F}_M = 0 \rightarrow \vec{F}_E = -\vec{F}_M \rightarrow \cancel{q} \cdot \vec{E} = -\cancel{q} \cdot \vec{v} \times \vec{B} \rightarrow \vec{E} = -\vec{v} \times \vec{B} = -16 \cdot 10^4\ \vec{i}\ \text{m/s} \times 0{,}2\ \vec{k}\ \text{T} = 32\,000\ \vec{j}\ \text{N/C}$$

El campo eléctrico debe ser perpendicular tanto a la velocidad como al campo magnético, y su sentido debe ser el opuesto al que indica el producto vectorial de la velocidad por el campo magnético.

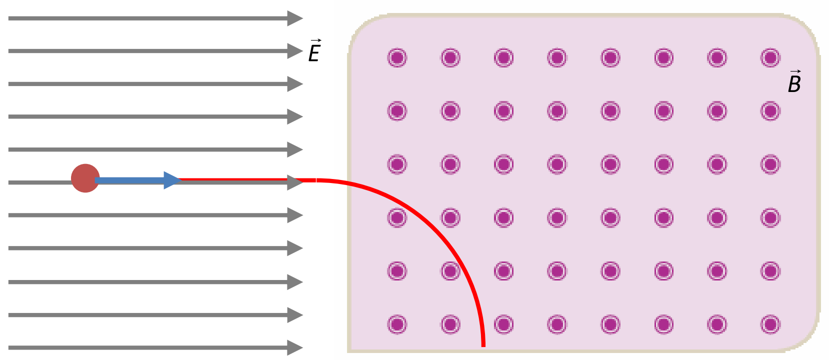
15. Una partícula α en reposo es acelerada por una diferencia de potencial de 2500 V. A continuación, se introduce en un campo magnético de 125 mT perpendicular a su velocidad.

a) Dibuja un esquema de la trayectoria de la partícula y calcula la velocidad con la que penetra en el campo magnético.

b) Calcula el radio de la trayectoria.

Datos: $m_\alpha = 6{,}7 \cdot 10^{-27}$ kg; $q_\alpha = 3{,}2 \cdot 10^{-19}$ C.

a) Un esquema de la situación presentada sería el siguiente. Si el campo sale del papel:



En la primera parte la partícula es acelerada debido a la existencia de un campo eléctrico. La diferencia de potencial es de 2500 V. Al principio, la partícula solo tiene energía potencial debido a esta diferencia de potencial al final de la zona donde está el campo eléctrico, solo posee energía cinética. Por tanto, aplicando el principio de conservación de la energía en la zona del campo eléctrico podemos calcular la velocidad que adquiere:

$$E_P = E_C \rightarrow q_\alpha \cdot V = \frac{1}{2} \cdot m_\alpha \cdot v^2 \rightarrow v = \sqrt{\frac{2 \cdot q_\alpha \cdot V}{m_\alpha}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 3{,}2 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \cdot 2500\ \text{V}}{6{,}7 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}}} = 4{,}89 \cdot 10^5\ \text{m/s}$$

Esta es la velocidad con la que penetra en la región donde existe el campo magnético.

b) La trayectoria se curva porque aparece una fuerza de Lorentz dirigida hacia abajo, perpendicular tanto a la velocidad como al campo magnético. Esta fuerza se puede identificar con la fuerza centrípeta y de aquí deducir el radio de la trayectoria:

$$F_C = F_{\text{Lorentz}} \rightarrow \frac{m \cdot v^2}{r} = |q| \cdot v \cdot B \rightarrow r = \frac{m \cdot v^{\cancel{2}}}{|q| \cdot \cancel{v} \cdot B} = \frac{6{,}7 \cdot 10^{-27}\ \text{kg} \cdot 4{,}89 \cdot 10^5\ \text{m/s}}{3{,}2 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \cdot 125 \cdot 10^{-3}\ \text{T}} = 0{,}082\ \text{m} = 8{,}2\ \text{cm}$$

16. Un protón y una partícula α parten del reposo y son acelerados mediante diferencias de potencial distintas. A continuación, entran en el seno de un campo magnético uniforme *B* = 4 T, perpendicular a las velocidades de las partículas. Si ambas partículas describen trayectorias circulares con el mismo radio, calcula:

a) El radio de la trayectoria.

b) El cociente entre las velocidades de las dos partículas (v_α/v_p).

c) La diferencia de potencial con la que se ha acelerado cada partícula.

Datos: $q_p = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C; $m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg; $v_p = 10^7$ m/s; $m_\alpha = 6{,}646 \cdot 10^{-27}$ kg.

a) La fuerza magnética que sufren las partículas es la fuerza centrípeta. Como tenemos el dato de la velocidad del protón, podemos escribir:

$$F_C = F_B \rightarrow \frac{m_p \cdot v_p^2}{r} = |q_p| \cdot v_p \cdot B \rightarrow r = \frac{m_p \cdot v_p^{\cancel{2}}}{|q_p| \cdot \cancel{v_p} \cdot B} \rightarrow r = \frac{m_p \cdot v_p}{|q_p| \cdot B} = \frac{1{,}67 \cdot 10^{-27}\ \text{kg} \cdot 10^7\ \text{m/s}}{1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \cdot 4\ \text{T}} = 2{,}61 \cdot 10^{-2}\ \text{m} = 2{,}61\ \text{cm}$$

b) Escribimos la expresión para el radio para ambas partículas y las igualamos, puesto que nos dicen que el radio de las órbitas descritas es el mismo. Como la partícula α está formada por dos protones y dos neutrones, su carga será el doble que la del protón. Por tanto, obtenemos:

$$\left.\begin{aligned} r &= \frac{m_p \cdot v_p}{|q_p| \cdot B} \\ r &= \frac{m_\alpha \cdot v_\alpha}{|q_\alpha| \cdot B} \end{aligned}\right\} \rightarrow \frac{m_p \cdot v_p}{|q_p| \cdot \cancel{B}} = \frac{m_\alpha \cdot v_\alpha}{|q_\alpha| \cdot \cancel{B}} \rightarrow \frac{v_\alpha}{v_p} = \frac{m_p}{m_\alpha} \cdot \frac{|q_\alpha|}{|q_p|} = \frac{1{,}67 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}}{6{,}646 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}} \cdot \frac{2 \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \text{C}}{1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \text{C}} \simeq 0{,}5$$

c) La diferencia de potencial con la que se ha acelerado cada partícula se puede calcular a partir de la velocidad adquirida aplicando el principio de conservación de la energía.

Para el protón:

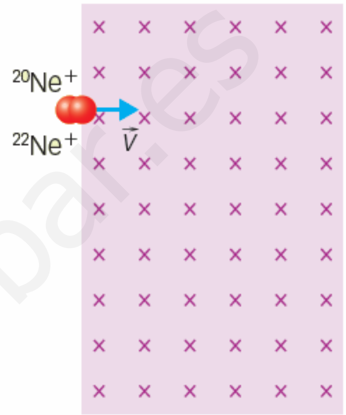
$$E_C = E_P \rightarrow \frac{1}{2}\cdot m_p \cdot v_p^2 = q_p \cdot V_p \rightarrow V_p = \frac{m_p \cdot v_p^2}{2\cdot q_p} = \frac{1{,}67\cdot 10^{-27}\ \text{kg}\cdot\left(10^7\ \text{m/s}\right)^2}{2\cdot 1{,}602\cdot 10^{-19}\ \text{C}} = 5{,}2\cdot 10^5\ \text{V}$$

Para la partícula α:

$$E_C = E_P \rightarrow \frac{1}{2}\cdot m_\alpha \cdot v_\alpha^2 = q_\alpha \cdot V_\alpha \rightarrow V_\alpha = \frac{m_\alpha \cdot v_\alpha^2}{2\cdot q_\alpha} = \frac{6{,}646\cdot 10^{-27}\ \text{kg}\cdot\left(0{,}5\cdot 10^7\ \text{m/s}\right)^2}{2\cdot 2\cdot 1{,}602\cdot 10^{-19}\ \text{C}} = 2{,}6\cdot 10^5\ \text{V}$$

La partícula α ha sido acelerada con un potencial igual a la mitad del empleado para acelerar el protón.

17. El espectrómetro de masas es muy útil en la separación de isótopos. Las partículas cargadas llegan con una velocidad dentro de un campo magnético uniforme. Conocida la velocidad con la que penetran en el campo magnético, a partir de la trayectoria, podemos calcular su masa.



Un haz de iones compuesto por los isótopos de neón: $^{20}Ne^+$ y $^{22}Ne^+$, entra en el espectrómetro de masas de la figura. La velocidad de los iones es $2\cdot 10^5$ m/s y el campo magnético del espectrómetro es de 0,25 T, perpendicular hacia el interior del plano del dibujo.

a) ¿Qué tipo de trayectoria describe cada uno de los iones dentro del campo? ¿Qué trabajo realizará la fuerza que ejerce el campo magnético en esta trayectoria? Justifica la respuesta.

b) Calcula a qué distancia del punto de entrada impactará cada uno de los iones.

Datos: $m(^{22}Ne^+) = 22{,}0$ u; $m(^{20}Ne^+) = 20{,}0$ u; $q(^{22}Ne^+) = q(^{20}Ne^+) = 1{,}60\cdot 10^{-19}$ C; 1 u $= 1{,}66\cdot 10^{-27}$ kg.

a) Los iones describen una trayectoria curva dentro del espectrómetro, ya que tienen carga eléctrica y en el espectrómetro hay un campo magnético. Sufren una fuerza de Lorentz dada por la siguiente expresión:

$$F_B = q\cdot \vec{v}\times\vec{B}$$

La trayectoria curva que siguen tiene un radio que se puede deducir identificando la fuerza magnética que sufren los iones con la fuerza centrípeta. Como la velocidad es perpendicular al campo magnético:

$$F_C = F_B \rightarrow \frac{m_{\text{Ion}}\cdot v_{\text{Ion}}^2}{r} = |q_{\text{Ion}}|\cdot v_{\text{Ion}}\cdot B \rightarrow r = \frac{m_{\text{Ion}}\cdot v_{\text{Ion}}^{\cancel{2}}}{|q|\cdot \cancel{v_{\text{Ion}}}\cdot B} \rightarrow r = \frac{m_{\text{Ion}}\cdot v_{\text{Ion}}}{|q_{\text{Ion}}|\cdot B}$$

Ambos iones tienen igual carga eléctrica, pero como tienen diferente masa, el radio de la curva que siguen será diferente. El ion con una masa mayor se desviará menos, puesto que la fuerza es la misma para ambos:

$$r\left(^{22}\text{Ne}^+\right) = \frac{m\left(^{22}\text{Ne}^+\right)\cdot v_{\text{Ion}}}{|q_{\text{Ion}}|\cdot B} = \frac{22\ \cancel{\text{u}}\cdot\dfrac{1{,}66\cdot 10^{-27}\ \text{kg}}{1\ \cancel{\text{u}}}\cdot 2\cdot 10^5\ \text{m/s}}{1{,}602\cdot 10^{-19}\ \text{C}\cdot 0{,}25\ \text{T}} = 0{,}1824\ \text{m} = 18{,}24\ \text{cm}$$

$$r\left(^{20}\text{Ne}^+\right) = \frac{m\left(^{20}\text{Ne}^+\right)\cdot v_{\text{Ion}}}{|q_{\text{Ion}}|\cdot B} = \frac{20\ \cancel{\text{u}}\cdot\dfrac{1{,}66\cdot 10^{-27}\ \text{kg}}{1\ \cancel{\text{u}}}\cdot 2\cdot 10^5\ \text{m/s}}{1{,}602\cdot 10^{-19}\ \text{C}\cdot 0{,}25\ \text{T}} = 0{,}1658\ \text{m} = 16{,}58\ \text{cm}$$

El radio es mayor para el ion más masivo, lo que indica que se desvía menos.

La fuerza magnética no realiza trabajo, puesto que la velocidad de los iones no varía al entrar en el espectrómetro.

b) La distancia a la que impactará cada ion respecto al punto de entrada será igual al diámetro de la órbita descrita. Para cada ion:

$$d\left({}^{22}\text{Ne}^{+}\right) = 2 \cdot r\left({}^{22}\text{Ne}^{+}\right) = 2 \cdot 18{,}24\ \text{cm} = 36{,}48\ \text{cm}$$

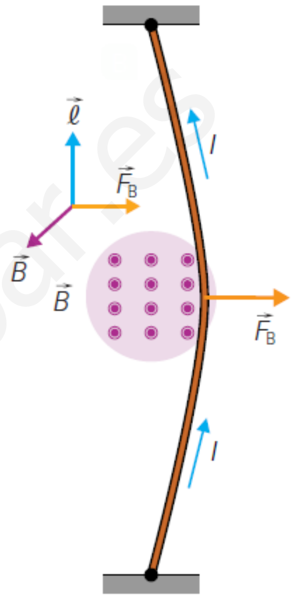
$$d\left({}^{20}\text{Ne}^{+}\right) = 2 \cdot r\left({}^{20}\text{Ne}^{+}\right) = 2 \cdot 16{,}58\ \text{cm} = 33{,}16\ \text{cm}$$

18. Considera un conductor rectilíneo indefinido por el que circula una corriente eléctrica $I = 1$ A en el interior de un campo magnético uniforme $B = 4$ T. Si el conductor está dispuesto perpendicular al campo magnético:

a) Dibuja en un esquema el campo B, el conductor (indicando el sentido de la corriente) y la fuerza que ejerce el campo magnético sobre el conductor.

b) Calcula el módulo de la fuerza que ejerce el campo magnético sobre un trozo de conductor rectilíneo de longitud $\ell = 2$ m.

c) Y si se coloca el conductor paralelo al campo magnético, ¿cuánto valdría el módulo de la fuerza?



a) Respuesta gráfica. La fuerza que ejerce el campo magnético sobre el conductor es perpendicular tanto al campo magnético como al conductor.

b) La fuerza que ejerce el campo magnético sobre el conductor viene dada por la siguiente expresión:

$$\vec{F}_B = I \cdot \vec{\ell} \times \vec{B} \rightarrow F = I \cdot \ell \cdot B = 1\ \text{A} \cdot 2\ \text{m} \cdot 4\ \text{T} = 8\ \text{N}$$

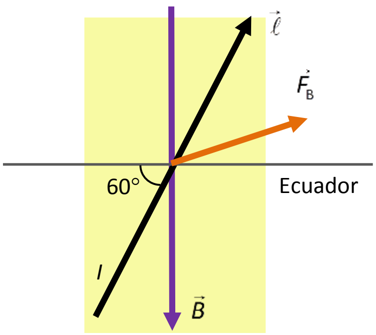
c) Si el conductor se coloca paralelo al campo, no existirá ninguna fuerza magnética, puesto que el producto vectorial de la expresión anterior será cero, ya que ambos vectores formarán 0º o 180º.

$$\vec{F}_B = I \cdot \vec{\ell} \times \vec{B} \rightarrow F = I \cdot \ell \cdot B \cdot \text{sen}\ 0° = 0$$

19. Sabiendo que la Tierra ejerce un campo magnético de intensidad 0,5 · 10^{-4} T, calcula la fuerza a la que se ve sometido un tramo de cable de alta tensión que, en dirección suroeste-noreste y formando un ángulo de 60° con el ecuador, se extiende entre dos torres separadas 150 m si transporta una corriente de 1 kA. ¿Influye en algo el sentido en que circula la corriente? Razona la respuesta.

Si el cable forma 60° con el ecuador, entonces, si suponemos que el campo magnético terrestre está orientado en la dirección norte-sur, la fuerza que sufre el conductor se puede calcular mediante la siguiente expresión:

$$\vec{F}_B = I \cdot \vec{\ell} \times \vec{B} \rightarrow \left|\vec{F}_B\right| = I \cdot \ell \cdot B \cdot \text{sen}\ 150° =$$
$$= 1000\ \text{A} \cdot 150\ \text{m} \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-4}\ \text{T} \cdot \text{sen}\ 150° = 3{,}75\ \text{N}$$



El sentido en el que circula la corriente influye en el sentido de la fuerza que sufre el cable, pero no sobre el módulo de la fuerza. En el dibujo, la fuerza ejercida es perpendicular al plano que forman el campo magnético y el cable, y está dirigida hacia el suelo. Si el sentido de la corriente se invierte, la fuerza ejercida estará dirigida en sentido opuesto.

20. Discute si hay alguna posibilidad de que el cable de alta tensión del que se trata en el ejercicio anterior no sufra el efecto del campo magnético terrestre.

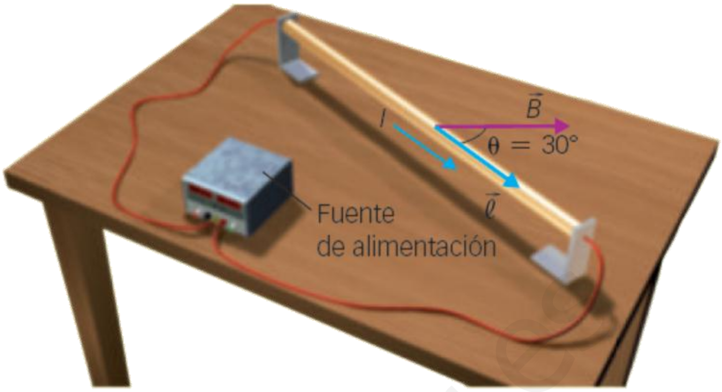
Para que el cable del ejemplo anterior no sufra el efecto del campo magnético terrestre debe orientarse de manera que la fuerza magnética sea nula. Esto solamente ocurre si está orientado de forma paralela al campo magnético, es decir, si la corriente circula en la dirección y sentido norte-sur o sur-norte.

21. **Hacemos un montaje de laboratorio en el que un conductor rectilíneo paralelo a la mesa y apoyado sobre unos soportes que lo levantan 3 cm transporta una corriente de 5 A. Sobre la mesa colocamos un imán que genera un campo magnético de 1,5 T que forma un ángulo de 30° con el conductor y apunta hacia la derecha. Calcula:**

a) El módulo de la fuerza por unidad de longitud que actúa sobre el conductor.

b) Si el conductor tiene una longitud de 50 cm, determina en qué sentido debe circular la corriente y cuál debe ser su masa para que pueda levitar sin necesidad de soportes.

Dato: $g = 9{,}8\ \text{m/s}^2$.



a) La fuerza magnética por unidad de longitud se calcula mediante la expresión:

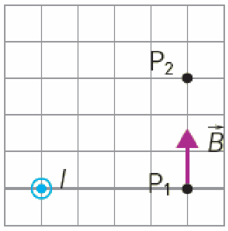
$$\vec{F} = I \cdot \vec{L} \times \vec{B} \rightarrow |F| = I \cdot L \cdot B \cdot \text{sen}\,\alpha \rightarrow \frac{|F|}{L} = I \cdot B \cdot \text{sen}\,\alpha = 5\ \text{A} \cdot 1{,}5\ \text{T} \cdot \text{sen}\ 30° = 3{,}75\ \text{N}$$

La fuerza está dirigida hacia arriba, pues es perpendicular tanto al campo magnético como a la dirección en que se produce la corriente. El sentido está indicado por el producto vectorial $\vec{L} \times \vec{B}$.

b) Para que pueda levitar sin soportes, la fuerza magnética debe ser igual en módulo y de sentido opuesto a la fuerza gravitatoria. Como hemos visto en el apartado anterior, si la corriente circula en el sentido indicado por la figura, la fuerza magnética tiene sentido vertical y hacia arriba. Es decir, para que el cable levite:

$$F_G = F_M \rightarrow m \cdot g = I \cdot L \cdot B \cdot \text{sen}\,\alpha \rightarrow m = \frac{I \cdot L \cdot B \cdot \text{sen}\,\alpha}{g} = \frac{5\ \text{A} \cdot 0{,}5\ \text{m} \cdot 1{,}5\ \text{T} \cdot \text{sen}\ 30°}{9{,}8\ \text{m/s}^2} = 0{,}191\ \text{kg} = 191\ \text{g}$$

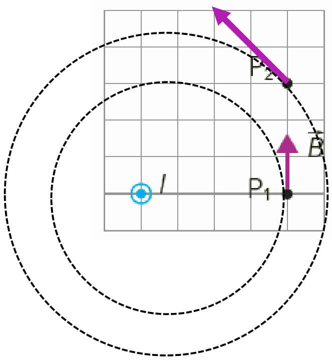
22. **Un hilo de corriente *I* cruza perpendicularmente el plano del dibujo. En el punto P_1, situado a una distancia *d* del conductor, el campo magnético vale $B = 8\ \mu\text{T}$.**



a) Dibuja la dirección y sentido del campo en el punto P_2 situado a una distancia *d* de P_1.

b) Calcula el valor del campo magnético en dicho punto.

a) Si la corriente sale del papel, entonces el campo magnético está contenido en el plano del papel y está dirigido en el sentido opuesto al de las agujas del reloj alrededor del hilo de corriente. En P_1 el campo es vertical, y en P_2 el campo es perpendicular a la línea que une P_2 con el hilo de corriente.



b) Podemos relacionar ambos campos. Del dibujo sabemos, además:

$$d^2 + \left(\frac{3 \cdot d}{4}\right)^2 = r_{P_2}^2 \rightarrow \frac{25}{16} \cdot d^2 = r_{P_2}^2 \rightarrow r_{P_2} = \frac{5}{4} \cdot d$$

El valor del campo en P_1 se calcula integrando a lo largo de una línea de campo situada a una distancia *d* de P_1. En P_1 el campo vale:

$$\int \vec{B}_1 \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \cdot I \rightarrow \int B_1 \cdot d\ell = \mu_0 \cdot I \rightarrow B_1 \cdot \int d\ell = \mu_0 \cdot I \rightarrow B_1 \cdot 2\pi \cdot r = \mu_0 \cdot I \rightarrow B_1 = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot d}$$

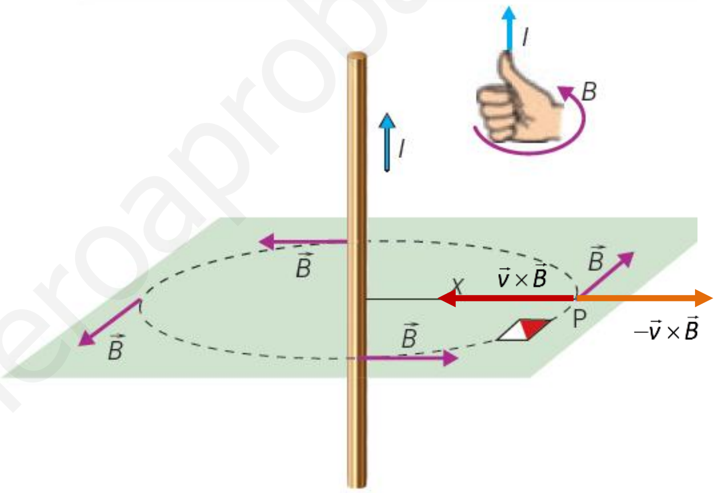
Análogamente para P_2:

$$B_2 = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot r} = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot \frac{5}{4} \cdot d}$$

Por tanto, relacionando los campos en ambos puntos

$$\frac{B_2}{B_1} = \frac{\dfrac{\cancel{\mu_0 \cdot I}}{\cancel{2\pi} \cdot \frac{5}{4} \cdot \cancel{d}}}{\dfrac{\cancel{\mu_0 \cdot I}}{\cancel{2\pi} \cdot \cancel{d}}} \rightarrow B_2 = \frac{B_1}{\frac{5}{4}} = \frac{8\ \mu\text{T}}{\sqrt{2}} = 6{,}4\ \mu\text{T}$$

23. Sea un hilo recto recorrido por una corriente eléctrica *I*. Una carga eléctrica negativa se mueve paralela y próxima al hilo en el mismo sentido que la corriente. Indica si será atraída o repelida por el hilo.



El hilo genera a su alrededor un campo magnético. Las líneas del campo definen un plano perpendicular al hilo. Si la carga se mueve paralelamente al hilo, sufrirá una fuerza de Lorentz, pues su velocidad y campo magnético son perpendiculares.

$$\vec{F}_B = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$$

El producto vectorial de la velocidad por el campo magnético tiene dirección hacia el hilo. Por tanto, como la carga es negativa, sufrirá una fuerza hacia fuera, es decir, será repelida por el hilo.

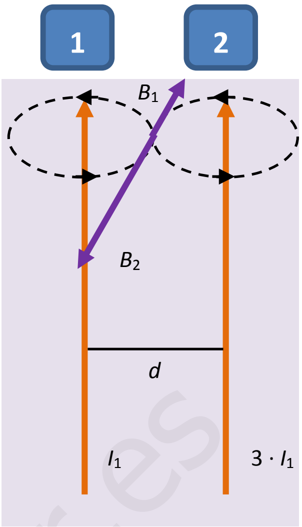
24. Se disponen dos hilos paralelos e infinitos, separados una distancia *d*, de tal forma que por uno de los conductores circula el triple de corriente que por el otro: I_1 e $I_2 = 3 \cdot I_1$, respectivamente. Teniendo en cuenta que ambas corrientes circulan en el mismo sentido, calcula, entre ambos hilos y en el plano en el que se encuentran:

a) El valor de $\vec{B}$ en módulo, dirección y sentido en el punto medio de ambos hilos.

b) Los puntos en los que $\vec{B}$ es nulo.

c) Repite los apartados a) y b) si la intensidad en el segundo conductor I_2 circula en sentido contrario.

En el punto medio el campo creado por el hilo 2 tiene la misma dirección que el campo creado por el hilo 1, pero sentido opuesto. El módulo del campo creado por el hilo 2 es, además, el triple del módulo del campo creado por el hilo 1. El campo creado por el hilo 1, según el dibujo, entra en el papel, mientras que el campo creado por el hilo 2 sale del papel.



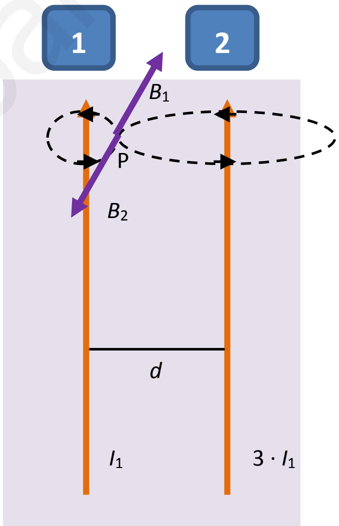
El campo creado por los hilos vale:

$$B_1 = \frac{\mu_0 \cdot I_1}{\cancel{2}\pi \cdot \frac{d}{\cancel{2}}} = \frac{\mu_0 \cdot I_1}{\pi \cdot d}\ ;\ B_2 = \frac{\mu_0 \cdot I_2}{\cancel{2}\pi \cdot \frac{d}{\cancel{2}}} = \frac{\mu_0 \cdot 3 \cdot I_1}{\pi \cdot d}$$

Por tanto, el módulo del campo total, como ambos campos tienen la misma dirección y sentidos opuestos, se obtiene restando ambos módulos:

$$B_T = B_2 - B_1 = \frac{\mu_0 \cdot 3 \cdot I_1}{\pi \cdot d} - \frac{\mu_0 \cdot I_1}{\pi \cdot d} = \frac{\mu_0 \cdot I_1}{\pi \cdot d} \cdot (3-1) = \frac{2 \cdot \mu_0 \cdot I_1}{\pi \cdot d}$$

a) Entre ambos hilos, el campo magnético total será nulo cuando ambos módulos sean iguales. Esto ocurre en un punto P situado más cerca del hilo 1 que del hilo 2. Si ambos módulos son iguales:

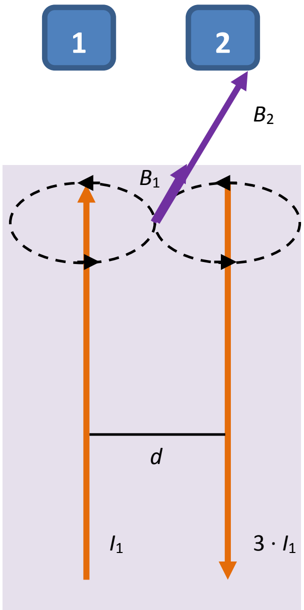


$$B_1 = B_2 \rightarrow \frac{\cancel{\mu_0 \cdot I_1}}{\cancel{\pi} \cdot r_1} = \frac{\cancel{\mu_0} \cdot 3 \cdot \cancel{I_1}}{\cancel{\pi} \cdot (d - r_1)} \rightarrow \frac{1}{r_1} = \frac{3}{d - r_1} \rightarrow$$
$$\rightarrow 3 \cdot r_1 = d - r_1 \rightarrow 4 \cdot r_1 = d \rightarrow r_1 = \frac{d}{4}$$

Entonces:

$$r_2 = d - r_1 = d - \frac{d}{4} = \frac{3 \cdot d}{4}$$

b) En el punto medio el campo creado por el hilo 2 tiene la misma dirección y sentido que el campo creado por el hilo 1. El módulo del campo creado por el hilo 2 es, además, el triple del módulo del campo creado por el hilo 1. Los campos creados por ambos hilos, según el dibujo, entran en el papel.



El campo creado por los hilos vale:

$$B_1 = \frac{\mu_0 \cdot I_1}{\cancel{2}\pi \cdot \frac{d}{\cancel{2}}} = \frac{\mu_0 \cdot I_1}{\pi \cdot d}\ ;\ B_2 = \frac{\mu_0 \cdot I_2}{\cancel{2}\pi \cdot \frac{d}{\cancel{2}}} = \frac{\mu_0 \cdot 3 \cdot I_1}{\pi \cdot d}$$

Por tanto, el módulo del campo total, como ambos campos tienen la misma dirección y sentidos, se obtiene sumando ambos módulos:

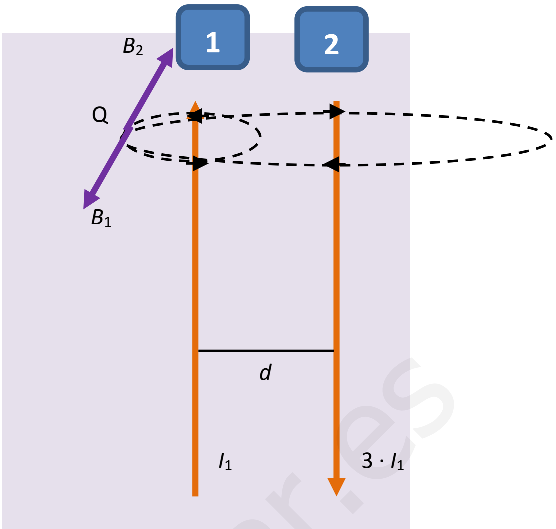
$$B_T = B_1 + B_2 = \frac{\mu_0 \cdot I_1}{\pi \cdot d} + \frac{\mu_0 \cdot 3 \cdot I_1}{\pi \cdot d} = \frac{4 \cdot \mu_0 \cdot I_1}{\pi \cdot d}$$

Ahora, si la intensidad por el hilo 2 circula en sentido contrario, habrá un punto Q situado «fuera» de los hilos donde los campos magnéticos tendrán sentidos opuestos y el mismo módulo.

En este caso podemos escribir:

$$B_1 = B_2 \rightarrow \frac{\cancel{\mu_0} \cdot I_1}{\cancel{\pi} \cdot r'_1} = \frac{\cancel{\mu_0} \cdot 3 \cdot \cancel{I_1}}{\cancel{\pi} \cdot (d + r_1')} \rightarrow \frac{1}{r'_1} = \frac{3}{d + r_1'} \rightarrow$$

$$\rightarrow 3 \cdot r_1' = d + r_1' \rightarrow 2 \cdot r_1' = d \rightarrow r_1' = \frac{d}{2}$$



En el punto Q el campo magnético creado por el hilo 1 sale del papel y el campo magnético creado por el hilo 2 entra en el papel.

Entre los hilos no existirá ningún punto donde el campo magnético total sea nulo, puesto que ambos campos tienen el mismo sentido.

25. Tenemos dos hilos conductores, rectos, paralelos y de longitud infinita en el vacío separados una distancia $d = 2$ m. Por los conductores circula corriente en el mismo sentido y la fuerza medida a lo largo del cable es de $12 \cdot 10^{-7}$ N/m.

a) Si por el conductor 1 pasa una corriente $I_1 = 3$ A. Calcula la corriente que pasa por el conductor 2.

b) Calcula el campo magnético en un punto P situado entre los cables a $d/4$ del conductor 1.

c) Representa gráficamente las fuerzas por unidad de longitud en los hilos y el campo en el punto P.

Dato: $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ T · m/A.

a) Como las corrientes tienen el mismo sentido, aparece una fuerza de atracción entre los hilos. La fuerza por unidad de longitud se puede expresar así:

$$\frac{F}{L} = \frac{\mu_0 \cdot I_1 \cdot I_2}{2\pi \cdot d}$$

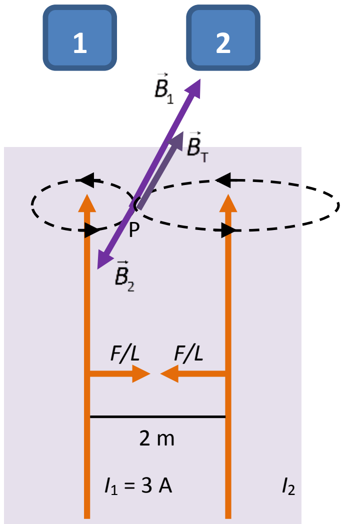
De esta expresión podemos deducir el valor de I_2.

$$\frac{F}{L} = \frac{\mu_0 \cdot I_1 \cdot I_2}{2\pi \cdot d} \rightarrow I_2 = \frac{F}{L} \cdot \frac{2\pi \cdot d}{\mu_0 \cdot I_1} = 12 \cdot 10^{-7}\ \text{N/m} \cdot \frac{2\cancel{\pi} \cdot 2\ \text{m}}{4\cancel{\pi} \cdot 10^{-7}\ \frac{\text{T} \cdot \text{m}}{\text{A}} \cdot 3\ \text{A}} = 4\ \text{A}$$

b) El campo magnético total en el punto pedido se calcula a partir de los campos magnéticos que crea cada conductor:

$$\vec{B}_\text{T} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$$

Como las corrientes tienen el mismo sentido, en medio de ambas los campos magnéticos tendrán la misma dirección y sentidos opuestos. El módulo del campo magnético total se obtiene entonces restando los módulos de ambos campos magnéticos.



$$B_\text{T} = B_1 - B_2 = \frac{\mu_0 \cdot I_1}{2\pi \cdot \frac{d}{4}} - \frac{\mu_0 \cdot I_2}{2\pi \cdot \left(d - \frac{d}{4}\right)} = \frac{\mu_0 \cdot I_1}{2\pi \cdot \frac{d}{4}} - \frac{\mu_0 \cdot I_2}{2\pi \cdot \frac{3 \cdot d}{4}} = \frac{4 \cdot \mu_0}{2\pi \cdot d} \cdot \left(I_1 - \frac{I_2}{3}\right) =$$

$$= \frac{4 \cdot 4\cancel{\pi} \cdot 10^{-7}\ \frac{\text{T} \cdot \text{m}}{\text{A}}}{2\cancel{\pi} \cdot 2\ \text{m}} \cdot \left(3\ \text{A} - \frac{4}{3}\ \text{A}\right) = 6{,}\widehat{6} \cdot 10^{-7}\ \text{T}$$

c) Respuesta en el esquema de la derecha.

26. Dos hilos conductores largos y rectos se colocan paralelos y separados una distancia de 8 cm. Por los hilos circula una corriente de 10 A y 20 A respectivamente en el mismo sentido.

a) Calcula la fuerza por unidad de longitud que se ejercen entre sí los dos conductores. Indica su dirección y sentido.

b) Calcula el campo magnético en un punto P equidistante a ambos hilos y contenido en el plano de los conductores. Indica en un esquema la dirección y sentido de dicho campo.

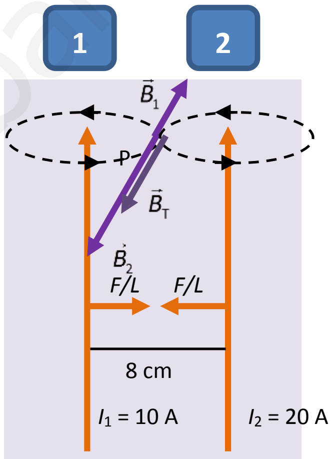
Dato: $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ T · m/A = $4\pi \cdot 10^{-7}$ N/A².

a) Si por los hilos circula corriente en el mismo sentido, aparecerá una fuerza de atracción entre ambos.

$$\frac{F}{L} = \frac{\mu_0 \cdot I_1 \cdot I_2}{2\pi \cdot d} = \frac{4\cancel{\pi} \cdot 10^{-7}\ \frac{\text{T}\cdot\text{m}}{\text{A}} \cdot 10\ \text{A} \cdot 20\ \text{A}}{2\cancel{\pi} \cdot 0{,}08\ \text{m}} = 5 \cdot 10^{-4}\ \text{N/m}$$

La dirección será en cada punto, perpendicular al hilo y dirigida hacia el otro hilo por el que circula la corriente.

b) En el punto medio los campos magnéticos creados por ambos hilos tendrán la misma dirección y sentidos opuestos. Tendrá mayor módulo el que produce el hilo por el que circula una mayor intensidad de corriente, es decir, el hilo 2. Como la intensidad por el hilo 2 es el doble que por el hilo 1, el módulo del campo magnético creado por el hilo 2 será el doble del módulo del campo magnético creado por el hilo 1. Entonces podemos escribir:



$$\vec{B}_T = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 \rightarrow B_T = B_2 - B_1 = B_2 - \frac{B_2}{2} = \frac{B_2}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\mu_0 \cdot I_2}{\cancel{2}\pi \cdot \frac{d}{\cancel{2}}} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{4\cancel{\pi} \cdot 10^{-7}\ \frac{\text{T}\cdot\text{m}}{\text{A}} \cdot 20\ \text{A}}{\cancel{\pi} \cdot 0{,}08\ \text{m}} = 5 \cdot 10^{-5}\ \text{T}$$

El campo total estará dirigido hacia fuera del papel, como $\vec{B}_2$.

27. Considera un anillo de cobre de 4 cm de radio y una corriente de 2 A.

a) Si colocamos otro anillo concéntrico al primero por el que circula una corriente de 1,5 A, calcula el radio para que el campo magnético total en el centro sea cero.

b) Y si colocamos un hilo recto de longitud indefinida que lleva 10,4 A, ¿a qué distancia del centro y cómo se debería colocar el hilo para que anule el campo en el centro del anillo? Haz un esquema.

Dato: $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ N/A².

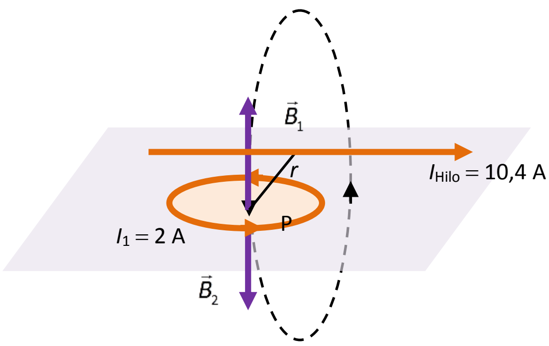
a) El campo que crea un anillo en su centro puede calcularse mediante la siguiente expresión:

$$B_1 = \frac{\mu_0 \cdot I_1}{2 \cdot R_1}$$

Entonces, para anular este campo magnético el segundo anillo debe crear un campo magnético igual en módulo y dirección y de sentido opuesto al primero. Es decir, la corriente debe circular en sentido opuesto al primer anillo y el módulo debe valer:

$$B_2 = B_1 \rightarrow \frac{\cancel{\mu_0} \cdot I_2}{\cancel{2} \cdot R_2} = \frac{\cancel{\mu_0} \cdot I_1}{\cancel{2} \cdot R_1} \rightarrow R_2 = \frac{I_2}{I_1} \cdot R_1 = \frac{1{,}5\ \text{A}}{2\ \text{A}} \cdot 4\ \text{cm} = 3\ \text{cm}$$

b) El hilo debe colocarse paralelo al plano que define el anillo. De esta manera el campo magnético creado por el hilo puede compensar el que crea el anillo. Observa el esquema.



El módulo del campo magnético que crea el hilo debe ser igual al del campo magnético que crea el anillo. Entonces:

$$B_{Hilo} = B_1 \rightarrow \frac{\cancel{\mu_0} \cdot I_{Hilo}}{\cancel{2}\pi \cdot r} = \frac{\cancel{\mu_0} \cdot I_1}{\cancel{2} \cdot R_1} \rightarrow$$

$$\rightarrow r = \frac{I_{Hilo}}{I_1} \cdot \frac{R_1}{\pi} = \frac{10{,}4\ \text{A}}{2\ \text{A}} \cdot \frac{4\ \text{cm}}{\pi} = 6{,}62\ \text{cm}$$

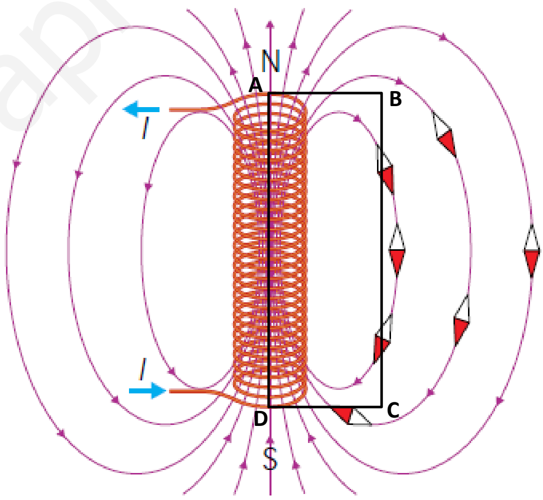
28. Por dos solenoides circula la misma corriente. Uno de ellos tiene 200 espiras, una longitud de 20 cm y un diámetro 0,5 cm. El otro solenoide tiene la mitad de espiras que el primero, una longitud de 5 cm y un diámetro de 0,3 cm. Indica si la siguiente afirmación es verdadera o falsa. Justifica la respuesta.

«El campo magnético en el interior del solenoide 1 es mayor que en el interior del solenoide 2».

Para calcular el campo magnético en el interior del solenoide aplicamos la ley de Ampère. A continuación consideramos un rectángulo como el de la figura, e integramos sobre el perímetro del rectángulo.

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot \sum_k I_k \rightarrow$$

$$\rightarrow \int_A^B B \cdot dl + \int_B^C B \cdot dl + \int_C^D B \cdot dl + \int_D^A B \cdot dl = \mu_0 \cdot N \cdot I$$



En los tramos AB y CD la integral es nula porque ahí el campo magnético $\vec{B}$ es perpendicular a $d\vec{l}$.

En BC también es nula porque el campo fuera del solenoide es prácticamente cero. Por tanto:

$$\int_A^B B \cdot dl + \int_B^C B \cdot dl + \int_C^D B \cdot dl + \int_D^A B \cdot dl = \mu \cdot N \cdot I \rightarrow$$

$$\rightarrow B \cdot \int_D^A dl = \mu \cdot N \cdot I \rightarrow B \cdot L = \mu \cdot N \cdot I \rightarrow B = \frac{\mu \cdot N \cdot I}{L}$$

Entonces podemos comparar los módulos de los campos magnéticos creados por ambos solenoides:

$$\frac{B_1}{B_2} = \frac{\cancel{\mu} \cdot N_1 \cdot \cancel{I}}{\cancel{\mu} \cdot N_2 \cdot \cancel{I}} \cdot \frac{L_2}{L_1} = \frac{N_1}{N_2} \cdot \frac{L_2}{L_1}$$

La relación entre los módulos de los campos magnéticos depende del número de espiras y de la longitud, puesto que la corriente es la misma en ambos.

$$\frac{B_1}{B_2} = \frac{N_1}{N_2} \cdot \frac{L_2}{L_1} = \frac{200}{100} \cdot \frac{5\ \text{cm}}{20\ \text{cm}} = \frac{1}{2}$$

Como vemos, el campo magnético en el interior del segundo solenoide es mayor que en el primer solenoide, exactamente el doble.

29. Un toroide de 10 cm de radio está formado por 1000 espiras.

a) Calcula la corriente que debe circular por el toroide para que el campo en el círculo central sea de 3 mT.

b) Y si el núcleo del toroide fuese de hierro dulce, ¿cuánta corriente debería circular por el toroide?

Datos: $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ N · A^{-2}; $\mu_{r\ \text{hierro dulce}} = 5000$.

a) Aplicamos la ley de Ampère e integramos en una circunferencia de radio R, centrada en el centro del toroide para calcular el campo en el interior de un toroide:

$$\int \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu\cdot\sum_{k} I_k \rightarrow \int B\cdot dl = \mu_0\cdot N\cdot I \rightarrow B\cdot\int dl = \mu_0\cdot N\cdot I \rightarrow B\cdot 2\pi\cdot R = \mu_0\cdot N\cdot I \rightarrow B = \frac{\mu_0\cdot N\cdot I}{2\pi\cdot R}$$

Sustituimos los datos:

$$B = \frac{\mu_0\cdot N\cdot I}{2\pi\cdot R} \rightarrow I = \frac{B\cdot 2\pi\cdot R}{\mu_0\cdot N} = \frac{3\cdot 10^{-3}\ \text{T}\cdot 2\cancel{\pi}\cdot 0{,}10\ \text{m}}{4\cancel{\pi}\cdot 10^{-7}\ \dfrac{\text{N}}{\text{A}^2}\cdot 1000} = 1{,}5\ \text{A}$$

b) Si el toroide es de hierro dulce, el campo varía:

$$B = \frac{\mu\cdot N\cdot I}{2\pi\cdot R} \rightarrow I = \frac{B\cdot 2\pi\cdot R}{\mu_0\cdot\mu_r\cdot N} = \frac{3\cdot 10^{-3}\ \text{T}\cdot 2\cancel{\pi}\cdot 0{,}10\ \text{m}}{4\cancel{\pi}\cdot 10^{-7}\ \dfrac{\text{N}}{\text{A}^2}\cdot 5000\cdot 1000} = 3\cdot 10^{-4}\ \text{A}$$

30. Explica qué quiere decir que el campo magnético es no conservativo.

a) Que la energía no se conserva.

b) Que no existe un potencial escalar del que se derive el campo.

c) Que no existe un potencial vectorial del que se derive el campo.

Respuesta correcta: b. Que no sea conservativo significa que no podemos definir un potencial escalar del que se derive el campo. En este caso podremos definir un potencial vector, pero no escalar.

31. ¿En qué se diferencian las líneas del campo eléctrico y las líneas del campo magnético?

a) En que unas nacen en las cargas eléctricas, y otras, no.

b) En que las líneas del campo eléctrico son abiertas y las del campo magnético son cerradas.

c) En que las líneas del campo eléctrico son tangentes al campo y las del campo magnético son perpendiculares al campo.

Respuesta correcta: b. Las líneas del campo eléctrico son abiertas, pues existen cargas libres, mientras que las líneas del campo magnético son cerradas. Esto implica que no existen polos magnéticos aislados.

32. Explica el efecto de un campo magnético sobre una carga eléctrica en reposo. ¿Qué ocurre si está en movimiento?

Un campo magnético no ejerce ninguna influencia sobre una carga eléctrica en reposo. Sin embargo, si la carga se mueve, entonces el campo magnético ejercerá una fuerza magnética sobre la carga cuyo valor vendrá dado por la fuerza de Lorentz:

$$\vec{F}_B = q\cdot\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)$$

33. Justifica si las siguientes afirmaciones, referentes a una partícula cargada, son verdaderas o falsas:

a) Si se mueve en un campo magnético uniforme, su velocidad aumenta a medida que se desplaza en la dirección de las líneas del campo.

b) Si se mueve en una región en la que coexisten un campo magnético y un campo eléctrico, se puede mover sin experimentar ninguna fuerza.

c) El trabajo que realiza el campo eléctrico para desplazar esa partícula depende del camino seguido.

a) Falso. La velocidad de la partícula no cambia de módulo. Además, si se desplaza siguiendo la dirección de las líneas del campo, no sufrirá fuerza alguna.

b) Verdadero. Puede ocurrir que la fuerza eléctrica y magnética se compensen si tienen igual dirección y módulo y sentidos opuestos. En ese caso la partícula se moverá sin sufrir ninguna fuerza neta.

c) Falso. El campo eléctrico es conservativo y el trabajo necesario para desplazar una carga depende únicamente de la posición final y de la posición inicial, no del camino seguido por la partícula.

34. Un electrón se mueve con una velocidad 4 · 10⁶ m · s⁻¹ en el seno de un campo magnético uniforme de 2,8 T. Si el campo ejerce una fuerza sobre el electrón de 4 · 10⁻¹³ N, determina la componente de la velocidad del electrón en la dirección del campo.

Dato: $q_e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C.

El módulo de la fuerza magnética sufrida por el electrón viene dado por la expresión de Lorentz:

$$\vec{F}_L = q\cdot\left(\vec{v}\times\vec{B}\right) = q\cdot\left[\left(\vec{v}_{\text{Paralela}}+\vec{v}_{\text{Perpendicular}}\right)\times\vec{B}\right] = q\cdot\left[\left(\vec{v}_{\text{Perpendicular}}\right)\times\vec{B}\right] \to F = q\cdot v_{\text{Perpendicular}}\cdot B \to$$

$$\to v_{\text{Perpendicular}} = \frac{F}{q\cdot B} = \frac{4\cdot10^{-13}\ \text{N}}{1{,}602\cdot10^{-19}\ \text{C}\cdot 2{,}8\ \text{T}} = 8{,}92\cdot10^{5}\ \text{m/s}$$

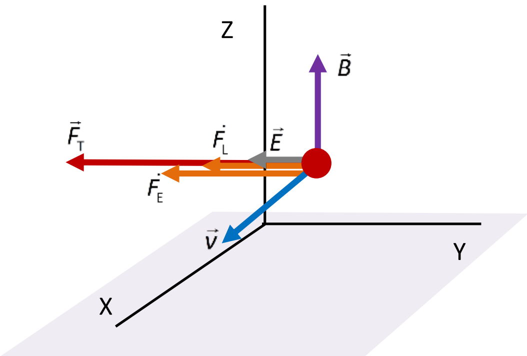
Por tanto, podemos calcular la otra componente de la velocidad, pues sabemos el módulo de la velocidad:

$$\vec{v} = \vec{v}_{\text{Paralela}} + \vec{v}_{\text{Perpendicular}} \to v^2 = \left(v_{\text{Paralela}}\right)^2 + \left(v_{\text{Perpendicular}}\right)^2 \to$$

$$\to v_{\text{Paralela}} = \sqrt{v^2-\left(v_{\text{Perpendicular}}\right)^2} = \sqrt{\left(4\cdot10^{6}\ \text{m/s}\right)^2-\left(8{,}92\cdot10^{5}\ \text{m/s}\right)^2} = 3{,}90\cdot10^{6}\ \text{m/s}$$

35. Una partícula cargada de 4 μC entra en una región del espacio en la que coexisten un campo eléctrico uniforme $\vec{E} = -3\vec{j}$ N/C y un campo magnético uniforme $\vec{B} = 2\vec{k}$ mT con una velocidad $\vec{v} = 10^3\,\vec{i}$ m/s. Calcula la fuerza total que actúa sobre la partícula. Haz un esquema.

La partícula sufre una fuerza eléctrica con dirección horizontal y hacia la izquierda, en el mismo sentido que el campo eléctrico, puesto que la carga eléctrica es positiva. Además, sufre una fuerza magnética que es perpendicular tanto a la velocidad como al campo magnético. Es decir, tiene la dirección que se muestra en el esquema, en la dirección negativa del eje Y.



Calculamos la fuerza eléctrica:

$$\vec{F}_E = q\cdot\vec{E} = 4\cdot10^{-6}\ \text{C}\cdot\left(-3\vec{j}\ \text{N/C}\right) = -1{,}2\cdot10^{-5}\ \vec{j}\ \text{N}$$

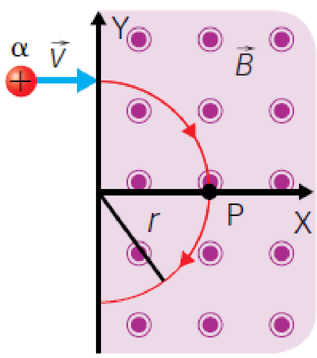
Calculamos la fuerza magnética:

$$\vec{F}_B = q\cdot\left(\vec{v}\times\vec{B}\right) = 4\cdot10^{-6}\ \text{C}\cdot\left(10^3\ \vec{i}\ \text{m/s}\times 2\cdot10^{-3}\ \vec{k}\ \text{T}\right) = -8\cdot10^{-6}\ \vec{j}\ \text{N}$$

Como ambas tienen la misma dirección y sentido, la fuerza total que actúa sobre la partícula vendrá dada por la suma vectorial de estas dos fuerzas:

$$\vec{F}_T = \vec{F}_E + \vec{F}_B = -1{,}2\cdot10^{-5}\ \vec{j}\ \text{N} - 8\cdot10^{-6}\ \vec{j}\ \text{N} = -2\cdot10^{-5}\ \vec{j}\ \text{N}$$

36. En una región del espacio donde hay un campo magnético $\vec{B}$ orientado hacia arriba entra perpendicularmente una partícula α, cuya energía cinética es 5 · 10⁻¹⁷ J. Este campo magnético curva su trayectoria con un radio r = 3 cm. Calcula:



a) El valor del campo magnético.

b) El módulo, la dirección y el sentido de la fuerza magnética en el punto P.

c) El valor que debería tener un campo eléctrico (módulo, dirección y sentido) que colocado en la misma región del espacio haga que la partícula α continúe su trayectoria rectilínea sin desviarse.

Datos: $m_\alpha = 6{,}64 \cdot 10^{-27}$ kg; $q_\alpha = +3{,}20 \cdot 10^{-19}$ C.

a) La partícula α sufre una fuerza magnética que la hace girar, esta fuerza tiene la dirección del eje Y, y sentido el negativo del eje Y. Por tanto, esta fuerza hace girar a la partícula α en sentido horario.

No sabemos la velocidad de la partícula α, pero podemos deducirla a partir de la energía cinética:

$$E_C = \frac{1}{2} m_\alpha \cdot v_\alpha^2 \rightarrow v_\alpha = \sqrt{\frac{2 \cdot E_C}{m_\alpha}}$$

Como la partícula se mueve en una dirección perpendicular al campo magnético, podemos escribir la siguiente expresión identificando la fuerza de Lorentz con la fuerza centrípeta:

$$\vec{F}_B = q \cdot \left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \rightarrow F_C = F_B \rightarrow \frac{m_\alpha \cdot v_\alpha^{\cancel{2}}}{r} = |q_\alpha| \cdot \cancel{v_\alpha} \cdot B \rightarrow$$

$$\rightarrow B = \frac{m_\alpha \cdot v_\alpha}{|q_\alpha| \cdot r} \rightarrow B = \frac{m_\alpha \cdot v_\alpha}{|q_\alpha| \cdot r} = \frac{m_\alpha \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot E_C}{m_\alpha}}}{|q_\alpha| \cdot r} = \frac{\sqrt{2 \cdot E_C \cdot m_\alpha}}{|q_\alpha| \cdot r} = \frac{\sqrt{2 \cdot 5 \cdot 10^{-17}\ \text{J} \cdot 6{,}64 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}}}{3{,}20 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \cdot 0{,}03\ \text{m}} = 8{,}49 \cdot 10^{-2}\ \text{T} = 84{,}9\ \text{mT}$$

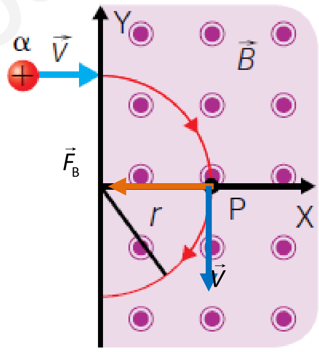
b) En ese punto la fuerza magnética es perpendicular tanto al campo magnético como a la velocidad de la partícula:

$$\vec{F}_B = q \cdot \left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \rightarrow F_L = q \cdot v \cdot B \cdot \text{sen } 90^\circ =$$

$$= q \cdot v \cdot B = q \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot E_C}{m_\alpha}} \cdot B =$$

$$= 3{,}20 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 5 \cdot 10^{-17}\ \text{J}}{6{,}64 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}}} \cdot 8{,}49 \cdot 10^{-2}\ \text{T} =$$

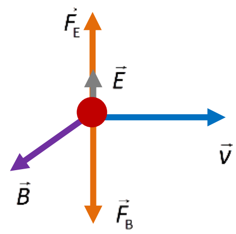
$$= 3{,}33 \cdot 10^{-15}\ \text{N}$$



La dirección de esta fuerza en el punto P es la dirección del eje X. El sentido de la fuerza es el del producto vectorial de la velocidad por el campo magnético. Es decir, el sentido negativo del eje X.

c) Para que la partícula continúe moviéndose sin desviarse la fuerza neta debe ser cero; es decir, la fuerza eléctrica debe ser igual y de sentido contrario a la fuerza magnética. Entonces podemos escribir:

$$F_E = F_L \rightarrow q \cdot E = F_L \rightarrow E = \frac{F_L}{q} = \frac{3{,}33 \cdot 10^{-15}\ \text{N}}{3{,}20 \cdot 10^{-19}\ \text{C}} = 1{,}04 \cdot 10^4\ \text{N/C}$$



La dirección debe ser la misma que la de la fuerza de Lorentz (ver esquema). El sentido debe ser tal que la fuerza eléctrica sea opuesta a la fuerza de Lorentz o fuerza magnética.

37. Se aceleran iones $^2H^+$ en línea recta mediante una diferencia de potencial de 3000 V. A continuación penetran en un campo magnético de 0,2 T perpendicular a la velocidad de los iones. Calcula:

a) La velocidad con que los iones penetran en el campo.

b) El radio de la órbita circular que describen los iones.

Datos: $q = +1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C; $m = 3{,}34 \cdot 10^{-27}$ kg.

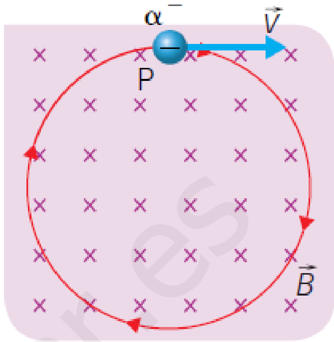
a) Los iones adquieren una energía cinética debido al potencial al que se someten. Entonces podemos deducir el valor de la velocidad sin tener en cuenta efectos relativistas:

$$E_C = q \cdot V = \frac{1}{2} m \cdot v^2 \rightarrow v = \sqrt{\frac{2 \cdot q \cdot V}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \cdot 3000\ \text{V}}{3{,}34 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}}} = 5{,}36 \cdot 10^5\ \text{m/s}$$

b) Al moverse a continuación en un campo magnético, los iones sufren una fuerza de Lorentz, dada por la siguiente expresión:

$$F_L = F_C \rightarrow \frac{m \cdot v^{\cancel{2}}}{r} = q \cdot \cancel{v} \cdot B \cdot \text{sen } 90° \rightarrow r = \frac{m \cdot v}{q \cdot B} = \frac{3{,}34 \cdot 10^{-27}\ \text{kg} \cdot 5{,}36 \cdot 10^{5}\ \text{m/s}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \cdot 0{,}2\ \text{T}} = 0{,}056\ \text{m} = 5{,}6\ \text{cm}$$

38. Una partícula α, de 12,1 keV de energía cinética, se mueve en una órbita circular en el seno de un campo magnético de 0,75 T perpendicular al plano de la órbita. Determina:



a) El vector fuerza magnética en el punto P.

b) El radio de la órbita, la velocidad angular y el periodo del movimiento.

Datos: $q_\alpha = 6{,}408 \cdot 10^{-19}$ C; $m_\alpha = 6{,}64 \cdot 10^{-27}$ kg, 1 eV = $1{,}602 \cdot 10^{-19}$ J.

a) El vector fuerza magnética viene dado por la expresión de Lorentz:

$$\vec{F}_B = q \cdot \left(\vec{v} \times \vec{B}\right)$$

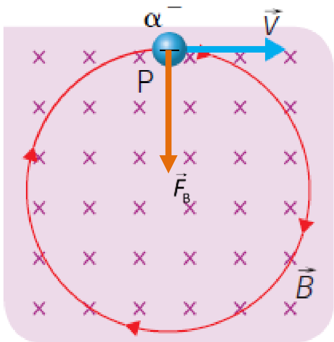
Tiene dirección del eje Y y sentido hacia arriba, tal y como está representado en el dibujo. Como la velocidad y el campo magnético son perpendiculares, su módulo vendrá dado por:

$$\vec{F}_B = q \cdot \left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \rightarrow F_B = q \cdot v \cdot B$$

No conocemos la velocidad de la partícula, pero sí su energía cinética. Por tanto:

$$E_C = \frac{1}{2} m \cdot v^2 \rightarrow v = \sqrt{\frac{2 \cdot E_C}{m}}$$

Sustituyendo en la expresión anterior:



$$\vec{F}_B = q_\alpha \cdot \left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \rightarrow F_B = q_\alpha \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot E_C}{m}} \cdot B =$$

$$= 6{,}408 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot 12{,}1 \cdot 10^{3}\ \cancel{\text{eV}} \cdot \dfrac{1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \text{J}}{1\ \cancel{\text{eV}}}}{6{,}64 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}}} \cdot 0{,}75\ \text{T} =$$

$$= 3{,}67 \cdot 10^{-13}\ \text{N}$$

Por tanto, el vector fuerza magnética será:

$$\vec{F}_B = -3{,}67 \cdot 10^{-13}\ \vec{j}\ \text{N}$$

b) Para calcular el radio de la órbita podemos identificar la fuerza de Lorentz con la fuerza centrípeta:

$$F_C = F_B \rightarrow \frac{m_\alpha \cdot v_\alpha^{\cancel{2}}}{r} = |q_\alpha| \cdot \cancel{v_\alpha} \cdot B \rightarrow r = \frac{m_\alpha \cdot v_\alpha}{|q_\alpha| \cdot B} = \frac{m_\alpha \cdot \sqrt{\dfrac{2 \cdot E_C}{m_\alpha}}}{|q_\alpha| \cdot B} = \frac{\sqrt{2 \cdot E_C \cdot m_\alpha}}{|q_\alpha| \cdot B} =$$

$$= \frac{\sqrt{2 \cdot 12{,}1 \cdot 10^{3}\ \cancel{\text{eV}} \cdot \dfrac{1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \text{J}}{1\ \cancel{\text{eV}}} \cdot 6{,}64 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}}}{6{,}408 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \cdot 0{,}75\ \text{T}} = 1{,}06 \cdot 10^{-2}\ \text{m} = 1{,}06\ \text{cm}$$

La velocidad angular se calcula conociendo la velocidad lineal y el radio:

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{\sqrt{\dfrac{2 \cdot E_C}{m_\alpha}}}{r} = \frac{\sqrt{\dfrac{2 \cdot 12{,}1 \cdot 10^{3}\ \cancel{\text{eV}} \cdot \dfrac{1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \text{J}}{1\ \cancel{\text{eV}}}}{6{,}64 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}}}}{1{,}06 \cdot 10^{-2}\ \text{m}} = 7{,}21 \cdot 10^{7}\ \text{rad/s}$$

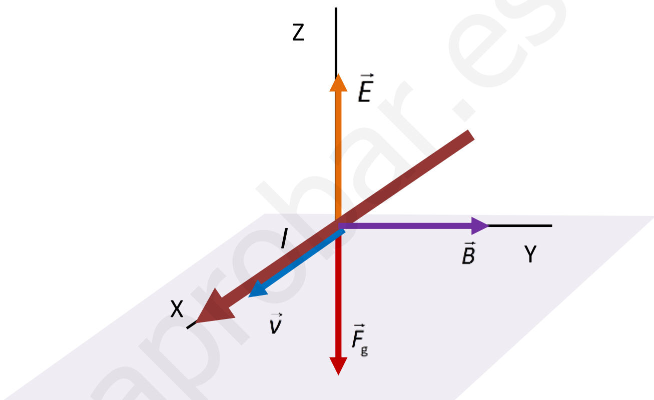
El periodo del movimiento será:

$$v=\frac{2\pi\cdot r}{T}\rightarrow T=\frac{2\pi\cdot r}{v}=\frac{2\pi\cdot r}{\sqrt{\frac{2\cdot E_C}{m_\alpha}}}=\frac{2\pi\cdot 1{,}06\cdot 10^{-2}\ \text{m}}{\sqrt{\frac{2\cdot 12{,}1\cdot 10^{3}\ \cancel{\text{eV}}\cdot\frac{1{,}602\cdot 10^{-19}\ \text{J}}{1\ \cancel{\text{eV}}}}{6{,}64\cdot 10^{-27}\ \text{kg}}}}=8{,}72\cdot 10^{-8}\ \text{s}$$

39. Un hilo recto situado a lo largo del eje OX está en presencia del campo magnético uniforme $\vec{B}=0{,}5\ \vec{j}\ \text{T}$. Deduce el sentido y el valor que debe tener la corriente para que la fuerza magnética sea de sentido contrario a la fuerza gravitatoria, $\vec{F}_g=-\vec{F}_g\ \vec{k}$ y equilibre el peso del hilo.

Datos: $g=9{,}8\ \text{m s}^{-2}$; $L=0{,}4$ m; $m=1{,}6$ g.

La corriente debe circular en el sentido que se indica en el esquema: en el sentido positivo del eje X. De esta manera el producto vectorial de la velocidad por el campo magnético tiene sentido vertical y hacia arriba, opuesto a la fuerza gravitatoria que sufre el cable.



El módulo de esta fuerza magnética puede calcularse así:

$$\vec{F}_L=q\cdot(\vec{v}\times\vec{B})\rightarrow F_L=q\cdot v\cdot B\cdot\text{sen }90^\circ=$$
$$=q\cdot v\cdot B=(I\cdot t)\cdot v\cdot B=I\cdot \underbrace{t\cdot v}_{L}\cdot B$$

Si el módulo de la fuerza magnética es igual a la fuerza gravitatoria:

$$F_L=F_g\rightarrow I\cdot \underbrace{t\cdot v}_{L}\cdot B=m\cdot g\rightarrow I=\frac{m\cdot g}{L\cdot B}=\frac{1{,}6\cdot 10^{-3}\ \text{kg}\cdot 9{,}8\ \text{m/s}^2}{0{,}4\ \text{m}\cdot 0{,}5\ \text{T}}=0{,}0784\ \text{A}$$

40. Explica cómo se podría deducir sin tocarlo que por un conductor circula una corriente.

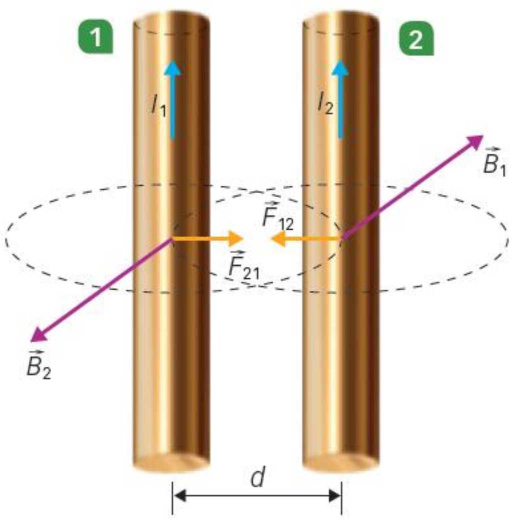
Por ejemplo, midiendo si existe un campo magnético alrededor del conductor. Podríamos acercar una aguja imantada y comprobar si se orienta en relación al hilo conductor.

41. Los axones son una parte de las neuronas que transmiten el impulso nervioso. Por un axón circula una corriente eléctrica produciendo un campo magnético equivalente al que produciría un hilo conductor rectilíneo e infinito. Tenemos dos axones paralelos por los que circula una corriente de $1{,}5\cdot 10^{-5}$ A en el mismo sentido.

a) Haz un esquema en el que se represente el campo magnético que produce cada axón en la posición que ocupa el otro y la fuerza que actúa sobre cada uno causada por la corriente que circula por el otro.

b) Calcula el módulo de la fuerza que actúa sobre 2 cm del axón 2 si el campo magnético que produce el axón 1 en la posición del axón 2 es 10^{-10} T.

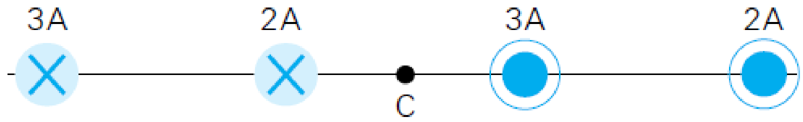
a) Respuesta en el esquema adjunto.



b) La fuerza magnética ejercida sobre un conductor depende del valor del campo magnético creado en la posición del conductor:

$$\vec{F}_L=q\cdot(\vec{v}\times\vec{B})\rightarrow F_L=q\cdot v\cdot B=(I\cdot t)\cdot v\cdot B=I\cdot \underbrace{t\cdot v}_{L}\cdot B\rightarrow$$
$$\rightarrow F=I\cdot L\cdot B=1{,}5\cdot 10^{-5}\ \text{A}\cdot 0{,}02\ \text{m}\cdot 10^{-10}\ \text{T}=3\cdot 10^{-17}\ \text{N}$$

42. **Tenemos cuatro hilos rectos paralelos y largos, separados 5 cm entre sí que transportan corrientes eléctricas de las intensidades indicadas en la figura. Calcula:**



a) **La fuerza sobre el primer hilo debida a los otros tres.**

b) **El campo magnético en el punto medio C debido a la corriente en los cuatro hilos.**

c) **Qué corriente debería transportar un anillo de 2 cm de radio cuyo centro coincida con el punto C para generar un campo magnético que anule el de los cuatro hilos.**

Dato: $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ N/A².

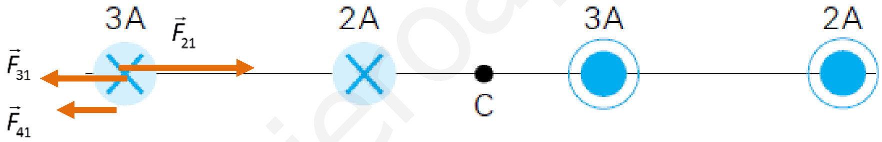
a) Sobre el hilo 1 el hilo 2 ejerce una fuerza de atracción, pues la corriente circula en el mismo sentido. Por el contrario, los hilos 3 y 4 ejercen fuerzas de repulsión. Entonces, la fuerza neta tendrá como módulo la fuerza que ejerce el hilo 2 menos la fuerza que ejerce el hilo 3 menos la fuerza que ejerce el hilo 4.

$$\vec{F}_B = q \cdot \left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \rightarrow F_B = q \cdot v \cdot B = \left(I \cdot t\right) \cdot v \cdot B = I \cdot \underbrace{t \cdot v}_{L} \cdot B \rightarrow F_B = I \cdot L \cdot B$$

Y el campo magnético creado por un hilo viene dado por la expresión:

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot r}$$

Si consideramos el eje X dirigido hacia la derecha, en el plano del papel:



$$\vec{F}_1 = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{31} + \vec{F}_{41} = F_{21}\ \vec{i} - F_{31}\vec{i} - F_{41}\vec{i}$$

$$\vec{F}_1 = F_{21}\ \vec{i} - F_{31}\vec{i} - F_{41}\vec{i} \rightarrow \frac{\vec{F}_1}{L} = \frac{F_{21}}{L}\vec{i} - \frac{F_{31}}{L}\vec{i} - \frac{F_{41}}{L}\vec{i} = \frac{\mu \cdot I_1 \cdot I_2}{2\pi \cdot d_{21}}\vec{i} - \frac{\mu \cdot I_1 \cdot I_3}{2\pi \cdot d_{31}}\vec{i} - \frac{\mu \cdot I_1 \cdot I_4}{2\pi \cdot d_{41}}\vec{i} =$$

$$= \frac{\mu \cdot I_1}{2\pi} \cdot \left(\frac{I_2}{d_{21}} - \frac{I_3}{d_{31}} - \frac{I_4}{d_{41}}\right) = \frac{4\cancel{\pi} \cdot 10^{-7}\ \text{A/m}^2 \cdot 3\ \text{A}}{2\cancel{\pi}} \cdot \left(\frac{2\ \text{A}}{0{,}05\ \text{m}} - \frac{3\ \text{A}}{0{,}10\ \text{m}} - \frac{2\ \text{A}}{0{,}15\ \text{m}}\right)\vec{i} = -2 \cdot 10^{-6}\ \vec{i}\ \text{N}$$

b) En el punto medio las contribuciones de los cuatro hilos se suman, pues el campo magnético ejercido por todos ellos tiene el mismo sentido: hacia abajo según el dibujo. Por tanto, el campo magnético total estará dirigido hacia arriba y su valor vendrá dado por la suma de los módulos de todos los campos:

$$\vec{B}_T = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3 + \vec{B}_4 \rightarrow B_T = B_1 + B_2 + B_3 + B_4 = \frac{\mu_0 \cdot I_1}{2\pi \cdot r_1} + \frac{\mu_0 \cdot I_2}{2\pi \cdot r_2} + \frac{\mu_0 \cdot I_3}{2\pi \cdot r_3} + \frac{\mu_0 \cdot I_4}{2\pi \cdot r_4} =$$

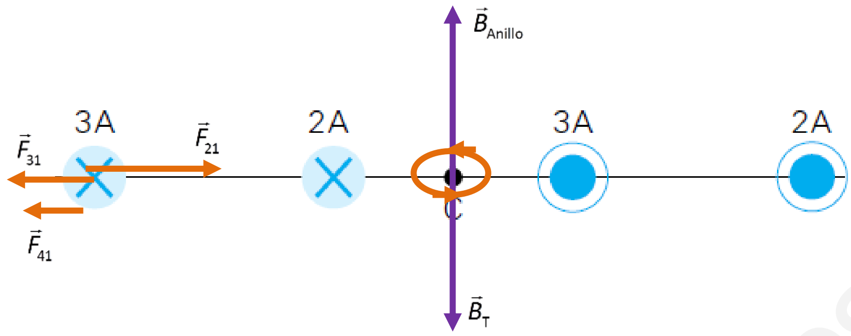
$$= \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \left(\frac{I_1}{r_1} + \frac{I_2}{r_2} + \frac{I_3}{r_3} + \frac{I_4}{r_4}\right) = \frac{4\cancel{\pi} \cdot 10^{-7}\ \text{A/m}^2}{2\cancel{\pi}} \cdot \left(\frac{3}{0{,}075\ \text{m}} + \frac{2}{0{,}025\ \text{m}} + \frac{3}{0{,}025\ \text{m}} + \frac{2}{0{,}075\ \text{m}}\right) = 5{,}\widehat{3} \cdot 10^{-5}\ \text{T}$$

Es decir:

$$\vec{B}_T = -5{,}\widehat{3} \cdot 10^{-5}\ \vec{j}\ \text{T}$$

c) Para que el campo magnético que cree el anillo anule este campo magnético, debe ser igual en módulo y dirección, y con sentido opuesto.

Para que el campo esté dirigido hacia arriba según el esquema anterior, el anillo debe estar situado en un plano perpendicular al papel, es decir, paralelo al plano que contiene a los cuatro hilos. Además, el sentido de la corriente debe ser el indicado en el esquema.



El campo magnético que crea el anillo viene dado por la siguiente expresión:

$$B_{\text{Anillo}} = \frac{\mu_0 \cdot I}{2 \cdot R}$$

Entonces, para que el módulo del campo magnético creado por el anillo sea igual al módulo del campo magnético total creado por los cuatro hilos conductores, tiene que circular la siguiente intensidad de corriente:

$$\vec{B}_{\text{T}} = -\vec{B}_{\text{Anillo}} \rightarrow B_{\text{T}} = B_{\text{Anillo}} \rightarrow B_{\text{T}} = \frac{\mu_0 \cdot I}{2 \cdot R} \rightarrow I = \frac{2 \cdot R \cdot B_{\text{T}}}{\mu_0} = \frac{2 \cdot 0{,}02 \text{ m} \cdot 5{,}\widehat{3} \cdot 10^{-5} \text{ T}}{4\pi \cdot 10^{-7} \text{ A/m}^2} = 1{,}70 \text{ A}$$

43. Un electrón en reposo es acelerado por una diferencia de potencial de 75 V. Después, avanza a 25 cm paralelo a un cable rectilíneo por el que circula una corriente de 30 A. Calcula.

a) La velocidad que adquirió el electrón libre debido a la diferencia de potencial.

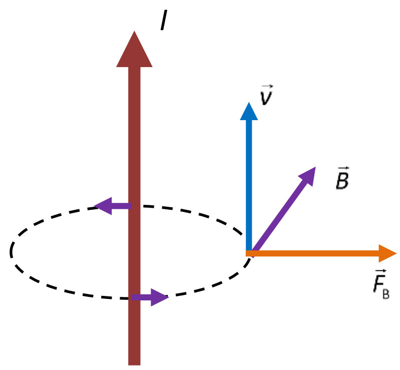
b) La fuerza, debida al campo magnético creado por el cable, que actúa sobre el electrón.

Datos: $m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ kg; $q_e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ T · m/A.

a) El electrón adquiere energía cinética a costa de disminuir su energía potencial. La energía cinética que gana es igual a la energía potencial que pierde. Podemos escribir:

$$\Delta E_{\text{C}} = -\Delta E_{\text{P}} \rightarrow \frac{1}{2} m \cdot v^2 = |q| \cdot V \rightarrow v = \sqrt{2 \cdot \frac{|q| \cdot V}{m}} = \sqrt{2 \cdot \frac{1{,}602 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 75 \text{ V}}{9{,}11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}}} = 5{,}13 \cdot 10^6 \text{ m/s}$$

b) La fuerza que actúa sobre el electrón es la fuerza de Lorentz. Depende del valor del campo magnético creado por el hilo conductor. Si el electrón se mueve en una dirección paralela al hilo conductor, su velocidad será perpendicular al campo magnético creado por el conductor, tal y como se observa en el esquema.



El campo magnético que crea un hilo conductor a una distancia r de este viene dado por la expresión:

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot r}$$

Por tanto, la fuerza magnética valdrá:

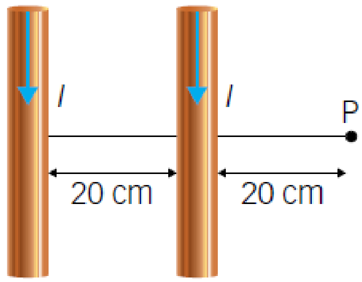
$$\vec{F}_{\text{B}} = q \cdot \left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \rightarrow F_{\text{B}} = q \cdot v \cdot B = q \cdot v \cdot \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot r} = 1{,}6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 5{,}13 \cdot 10^6 \text{ m/s} \cdot \frac{4\cancel{\pi} \cdot 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A} \cdot 30 \text{ A}}{2\cancel{\pi} \cdot 0{,}25 \text{ m}} = 1{,}97 \cdot 10^{-17} \text{ N}$$

44. **Contenidos en el plano XY hay dos cables rectilíneos, largos y paralelos entre sí por los que circula una corriente en el mismo sentido de 4 A y 6 A, respectivamente. Determina:**

a) El campo magnético total en el punto P.

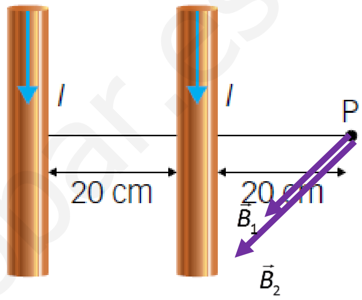
b) La fuerza sobre un electrón que pasa a una velocidad $\vec{v} = -10^6\ \vec{i}$ m/s por el punto P.

Datos: $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ T · m/A; $q_e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C.



a) En el punto P los campos magnéticos creados por los hilos tienen ambos la misma dirección y sentido. Saliendo del papel.

El módulo del campo magnético total se obtiene sumando los módulos de cada uno de los campos magnéticos creados por cada hilo, es decir:



$$B = \frac{\mu_0 \cdot I_1}{2\pi \cdot r_1} + \frac{\mu_0 \cdot I_2}{2\pi \cdot r_2} = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \left(\frac{I_1}{r_1} + \frac{I_2}{r_2}\right) =$$

$$= \frac{4\cancel{\pi} \cdot 10^{-7}\ \text{T} \cdot \text{m/A}}{2\cancel{\pi}} \cdot \left(\frac{4\ \text{A}}{0{,}2\ \text{m}} + \frac{6\ \text{A}}{0{,}2\ \text{m} + 0{,}2\ \text{m}}\right) = 7 \cdot 10^{-6}\ \text{T}$$

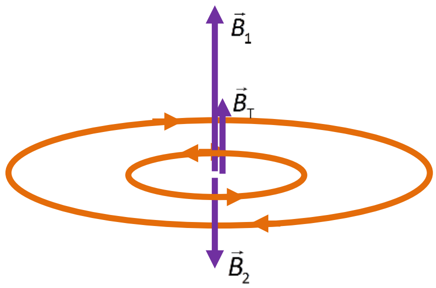
En forma vectorial:

$$\vec{B} = 7 \cdot 10^{-6}\ \vec{k}\ \text{T}$$

b) La fuerza sobre el electrón se calcula aplicando la expresión de la fuerza de Lorentz utilizando el campo magnético anterior, calculado en el punto P:

$$\vec{F}_B = q \cdot \left(\vec{v} \times \vec{B}\right) = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \cdot \left(-10^6\ \vec{i}\ \text{m/s} \times 7 \cdot 10^{-6}\ \vec{k}\ \text{T}\right) = 1{,}12 \cdot 10^{-18}\ \vec{j}\ \text{N}$$

45. **Calcula el campo magnético en el centro de dos espiras concéntricas de 40 cm y 80 cm de radio por las que circula una corriente de 2,4 A en sentidos contrarios. Dibújalas e indica el sentido de la corriente y del campo.**
Dato: $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ N · A^{-2}.



Denominamos espira 1 a la de menor radio, y espira 2 a la mayor.

Como se aprecia en el dibujo, los campos magnéticos creados por las espiras tienen ambos la misma dirección, pero sentidos opuestos. Por tanto, el campo magnético total estará dirigido hacia donde está dirigido el campo de mayor módulo; es decir, hacia donde está dirigido el campo magnético que crea la espira 1, pues en el centro es mayor el campo que crea la espira 1 que el que crea la espira 2, ya que esta tiene un radio mayor.

El módulo del campo magnético que crea una espira en su centro es:

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I}{2 \cdot R}$$

Por tanto:

$$B_T = B_1 - B_2 = \frac{\mu_0 \cdot I_1}{2 \cdot R_1} - \frac{\mu_0 \cdot I_2}{2 \cdot R_2} = \frac{\mu_0 \cdot I}{2} \cdot \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}\ \text{N/A}^2 \cdot 2{,}4\ \text{A}}{2} \cdot \left(\frac{1}{0{,}4\ \text{m}} - \frac{1}{0{,}8\ \text{m}}\right) = 1{,}88 \cdot 10^{-6}\ \text{T}$$

La dirección del campo magnético es perpendicular al plano determinado por las espiras. Y su sentido, hacia arriba.

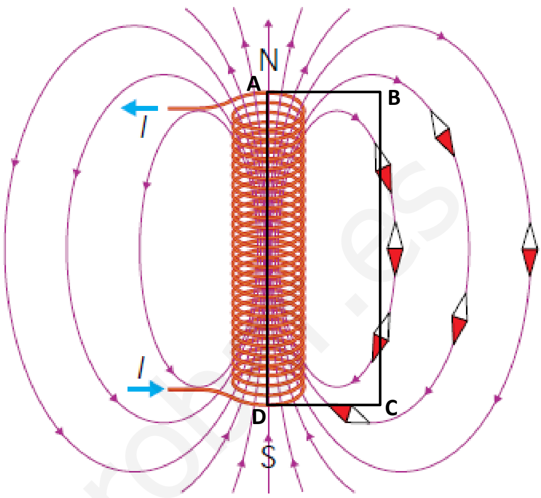
46. **Un solenoide largo que transporta una corriente de 10 A tiene 50 vueltas/cm. Calcula el campo magnético en el interior del solenoide. ¿Y si estuviera lleno de plata?**

Datos: $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ T · m/A; $\mu_{r\ plata} = 0{,}999\ 97$.

Para calcular el campo magnético en el interior del solenoide aplicamos la ley de Ampère. A continuación consideramos un rectángulo como el de la figura, e integramos sobre el perímetro del rectángulo.

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \cdot \sum_k I_k \rightarrow$$

$$\rightarrow \int_A^B B \cdot dl + \int_B^C B \cdot dl + \int_C^D B \cdot dl + \int_D^A B \cdot dl = \mu_0 \cdot N \cdot I$$



En los tramos AB y CD la integral es nula porque ahí el campo magnético $\vec{B}$ es perpendicular a $d\vec{l}$.

En BC también es nula porque el campo fuera del solenoide es prácticamente cero. Por tanto:

$$\int_A^B B \cdot dl + \int_B^C B \cdot dl + \int_C^D B \cdot dl + \int_D^A B \cdot dl = \mu \cdot N \cdot I \rightarrow$$

$$\rightarrow B \cdot \int_D^A dl = \mu \cdot N \cdot I \rightarrow B \cdot L = \mu \cdot N \cdot I \rightarrow B = \frac{\mu \cdot N \cdot I}{L}$$

Entonces:

$$B = \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I}{L} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}\ \text{T} \cdot \text{m/A} \cdot 50 \cdot 10\ \text{A}}{0{,}01\ \text{m}} = 6{,}28 \cdot 10^{-2}\ \text{T}$$

Si el solenoide está lleno de plata:

$$B = \frac{\mu \cdot N \cdot I}{L} = \frac{\mu_0 \cdot \mu_{r\ plata} \cdot N \cdot I}{L} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7}\ \text{T} \cdot \text{m/A} \cdot 0{,}999\ 97 \cdot 50 \cdot 10\ \text{A}}{0{,}01\ \text{m}} = 6{,}2798 \cdot 10^{-2}\ \text{T}$$

Por tanto, si está lleno de plata, la variación en el valor del campo magnético es insignificante ya que la $\mu_{r\ plata}$ es prácticamente 1.

FÍSICA EN TU VIDA

1. **¿Qué quiere decir que la cabeza lectora es un pequeño electroimán? ¿Cómo funciona un electroimán?**

Quiere decir que se comporta como un imán cuando circula la corriente eléctrica: atrayendo o repeliendo otros imanes y creando un campo magnético a su alrededor.

2. **¿Cómo se almacena la información en un disco duro?**

En un disco duro la información se almacena magnetizando el material. Para leer la información se analiza esa magnetización.

3. **¿Por qué se dota a los platos de una elevada velocidad de rotación (hasta 7200 revoluciones por minuto? ¿Qué se consigue con ello?**

Con una elevada velocidad de rotación, la cabeza lectora del disco puede grabar y analizar rápidamente la información magnética sobre la superficie del disco y el acceso a la información es más rápido.

4. **¿Qué utilidad tiene dotar a los discos duros de varios platos donde almacenar la información? ¿No sería mejor usar un solo plato de mayor superficie con una sola cabeza lectora?**

Al utilizar varios discos se consigue almacenar más información en un espacio reducido. Un solo disco haría que el recorrido de la cabeza lectora fuese mayor y entonces la velocidad de grabación de los datos y la velocidad de lectura de la información también sería menor.

5. Busca información sobre varios discos duros disponibles en el mercado y averigua:

a) El tiempo de acceso y la velocidad de transferencia de datos, en MB/s.

b) La velocidad a la que giran los platos. ¿Cómo se modifica este valor en el caso de equipos portátiles? ¿Por qué ocurre esto?

a) Respuesta personal. Podemos buscar en la web de alguno de los principales fabricantes, como Seagate. Ahí comprobamos el tiempo de acceso a la información: en torno a 10 ms. La velocidad de transferencia de datos en discos duros magnéticos es del orden de 180 MB/s.

b) En los equipos de sobremesa es habitual usar discos que giran a 7200 rpm. En el caso de portátiles se emplean muchos discos con una velocidad menor: 5400 rpm. Esto es así para reducir el consumo energético.

PROYECTO SABER HACER

4

Inducción electromagnética

SANTILLANA

Inducción electromagnética

4

PARA COMENZAR

- **¿Por qué disponen los aerogeneradores de motores para orientar las palas del molino?**

  Porque así pueden aprovechar mejor la fuerza del viento, ya que dependiendo de la orientación de las palas, estas girarán a mayor o menor velocidad y producirán más o menos energía eléctrica.

- **¿Por qué se sitúan las centrales eólicas en las cimas de colinas?**

  Porque ahí el viento es habitualmente más intenso.

- **¿En qué centrales eléctricas se genera energía eléctrica de una manera similar al caso de los aerogeneradores?**

  Existen otras centrales donde vapor de agua o una corriente de agua mueve una turbina unidad a un generador de manera que se produce energía eléctrica. Por ejemplo, en las centrales hidroeléctricas o en las centrales térmicas. La ventaja de las centrales eólicas o las hidroeléctricas es que no emiten sustancias contaminantes a la atmósfera.

ACTIVIDADES

1. ¿Cuál es la intensidad de la corriente que pasa por un dispositivo de 2,2 kΩ si se produce una caída de tensión de 110 V?

Aplicando la ley de Ohm:

$$I=\frac{\Delta V}{R}=\frac{110\ \text{V}}{2{,}2\cdot 10^3\ \Omega}=0{,}05\ \text{A}=50\ \text{mA}$$

2. El voltaje eficaz de la corriente que llega a nuestras casas es 230 V. ¿Qué resistencia debe tener un dispositivo para que circule por él una corriente de 2,5 A?

Aplicando la ley de Ohm:

$$I=\frac{\Delta V}{R}\to R=\frac{\Delta V}{I}=\frac{230\ \text{V}}{2{,}5\ \text{A}}=92\ \Omega$$

3. Una espira circular de 20 cm de radio está situada perpendicularmente a un campo magnético de 0,02 T. Calcula el flujo que lo atraviesa. Si giramos la espira 90° de forma que se coloque paralela al campo magnético, ¿cuánto valdría ahora el flujo?

El flujo que atraviesa la espira se calcula a partir del valor del campo magnético y de la superficie de la espira (depende del número de líneas de campo magnético que atraviesan la espira). Si la espira está orientada perpendicularmente al campo magnético, entonces el vector que define la superficie y el campo magnético son paralelos. Por tanto, el flujo magnético será máximo:

$$\phi_B=\vec{B}\cdot\vec{S}=B\cdot S\cdot\cos\alpha=B\cdot\pi\cdot R^2\cdot\cos\alpha=0{,}02\ \text{T}\cdot\pi\cdot(0{,}2\ \text{m})^2\cdot\cos 0^\circ=2{,}51\cdot 10^{-3}\ \text{Wb}$$

Si ahora giramos la espira 90°, el vector que define la superficie de la espira y el campo magnético serán perpendiculares, por lo que el flujo será nulo (mínimo flujo magnético):

$$\phi_B=\vec{B}\cdot\vec{S}=B\cdot S\cdot\cos\alpha=B\cdot\pi\cdot R^2\cdot\cos 90^\circ=0$$

4. Una bobina compuesta por 400 espiras circulares de 40 cm de diámetro gira con una frecuencia de 100 Hz en un campo magnético uniforme de 0,4 T. Determina el flujo magnético que atraviesa la bobina, en función del tiempo.

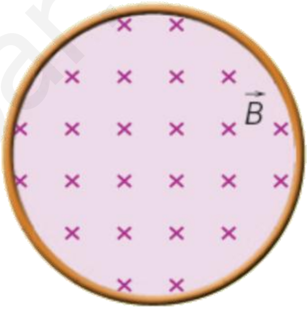
El flujo que atraviesa la espira se calcula a partir del valor del campo magnético y de la superficie total atravesada. Si suponemos que inicialmente las espiras están orientadas perpendicularmente al campo magnético, entonces el vector que define la superficie de cada espira y el campo magnético son paralelos. Por tanto, el flujo será máximo:

$$\phi_{B0} = \vec{B}\cdot\vec{S}_0 = B\cdot S\cdot\cos\alpha = B\cdot 400\cdot\pi\cdot R^2\cdot\cos 0^\circ = 0{,}4\ \text{T}\cdot 400\cdot\pi\cdot(0{,}4\ \text{m})^2\cdot\cos 0^\circ = 25{,}6\pi\ \text{Wb}$$

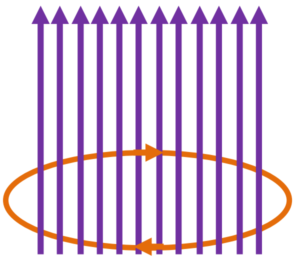
Como la bobina va girando, el flujo magnético que la atraviesa va variando:

$$\phi_B(t) = \vec{B}\cdot\vec{S}(t) = B\cdot S\cdot\cos(\omega\cdot t) = B\cdot 400\cdot\pi\cdot R^2\cdot\cos(2\pi\cdot f\cdot t) =$$
$$= 0{,}4\ \text{T}\cdot 400\cdot\pi\cdot(0{,}4\ \text{m})^2\cdot\cos(2\pi\cdot 100\cdot t) = 25{,}6\pi\cdot\cos(200\pi\cdot t)\ \text{Wb}$$

5. Sea una espira conductora circular, colocada en el seno de un campo magnético perpendicular al plano de la espira, como se indica en la figura. Deduce el sentido de la corriente inducida en la espira si el módulo del campo magnético aumenta con el tiempo. Razona la respuesta.



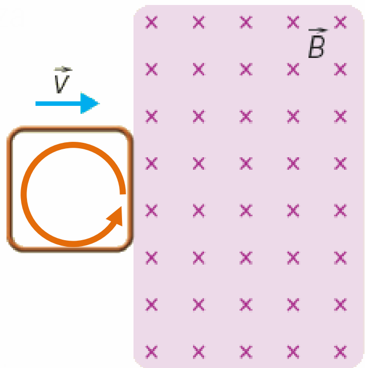
Si el módulo del campo magnético aumenta con el tiempo, en la espira se induce una corriente de tal manera que el campo magnético que crea dicha corriente se oponga a la variación del campo. Como el campo magnético externo aumenta con el tiempo, en la espira el flujo magnético aumenta con el tiempo.



Entonces, según la ley de Lenz: «el sentido de la corriente inducida es tal que se opone a la causa que lo originó»; en la espira se genera una corriente en un sentido que crea un campo magnético en sentido opuesto al campo magnético externo.

En el dibujo se indica el sentido de la corriente en la espira. La corriente circula en el sentido de las agujas del reloj.

6. Una espira cuadrada se desplaza hacia una región del espacio donde existe un campo magnético uniforme perpendicular al plano del papel, como se muestra en la figura. Indica el sentido de la corriente inducida en la espira cuando penetra en la región del campo magnético.



Cuando la espira penetra en la región donde existe el campo magnético, varía el flujo magnético que la atraviesa. Por tanto, se induce en ella una corriente eléctrica. Como mientras la espira está entrando en la región donde existe el campo el flujo magnético va aumentando, en la espira se induce una corriente que produce un campo magnético que se opone al campo magnético existente; es decir, un campo magnético que sale del papel.

Es decir, en el dibujo, en la espira se genera una corriente en sentido opuesto al de las agujas del reloj, tal y como se señala en el esquema.

7. Sea una espira plana circular situada perpendicularmente y enfrente del polo norte de un imán.

a) Razona qué ocurre con el flujo magnético que atraviesa la espira si el imán se aproxima a la espira. ¿Y si el imán se alejara de la espira?

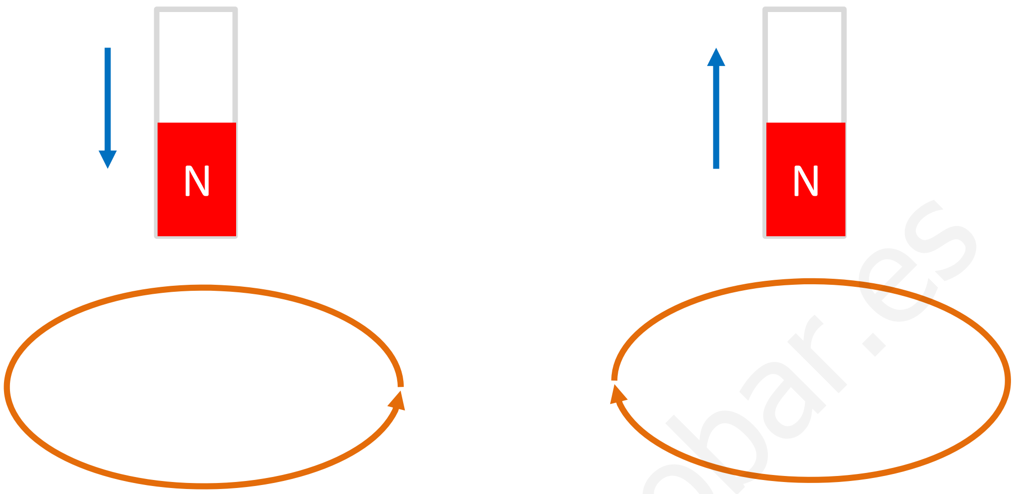
b) Haz un esquema e indica el sentido de la corriente inducida, para el caso en el que el imán se esté aproximando a o alejando de la espira.

a) Si el imán se aproxima a la espira, varía el flujo magnético que atraviesa la espira (aumenta el flujo magnético).

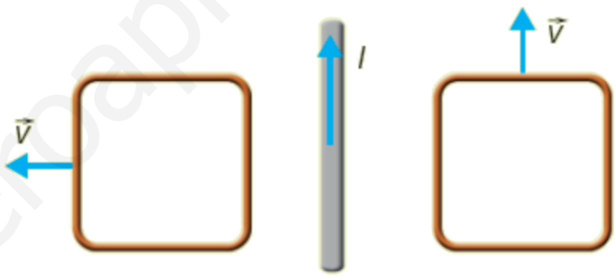
Si el imán se aleja de la espira, disminuye el flujo magnético que atraviesa la espira.

b) Si el imán se aproxima a la espira, se induce en la espira una corriente eléctrica que produce un campo en sentido opuesto al que produce el imán.
Si el imán se aleja de la espira, se induce en la espira una corriente eléctrica que produce un campo en el mismo sentido al que produce el imán.

Respuesta en el esquema adjunto.



8. Tenemos dos espiras colocadas a ambos lados de un hilo vertical indefinido por el que circula una corriente de intensidad *I*. Una de las espiras se mueve con velocidad paralela al hilo y la otra perpendicular a este, como se muestra en la figura. Indica de forma razonada si se inducirá corriente eléctrica en alguna de ellas.



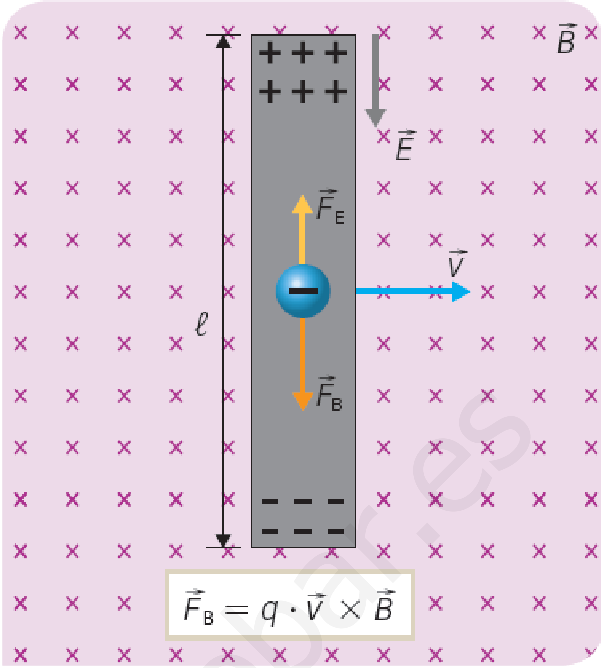
En la espira de la izquierda, la que se aleja del hilo de corriente, sí se inducirá corriente, pues al alejarse del hilo se produce una variación en el flujo magnético que atraviesa la espira. Cada vez habrá menos líneas de campo que la atraviesan, por tanto, el flujo magnético a través de ella disminuirá y se inducirá una corriente en el sentido opuesto a las agujas del reloj, pues así el campo magnético generado por la corriente de la espira tiene el mismo sentido en el plano de la espira que el campo magnético generado por el hilo de corriente.

En la otra espira, la que se mueve de manera paralela al hilo de corriente, no se producirá ninguna corriente inducida, ya que el flujo magnético no varía en la espira, puesto que el campo magnético no varía en las diferentes posiciones de la espira, dada la simetría el campo alrededor del hilo de corriente.

9. Una barra metálica de 50 cm se mueve perpendicularmente a un campo magnético uniforme con una velocidad de 4 m/s. Se observa que entre los extremos de la barra hay una diferencia de potencial de 0,8 V.

a) Calcula la intensidad del campo magnético en la zona.

b) Si la barra metálica se moviese en la misma dirección del campo, ¿cuánto valdría la intensidad del campo magnético?



a) Como la barra se mueve en el seno de un campo magnético, aparecerá una fuerza de Lorentz sobre las cargas del conductor. Esta fuerza depende del valor del campo magnético y de la velocidad de las cargas, es decir, de la velocidad de la barra. Como la barra se mueve perpendicularmente al campo, la velocidad de las cargas y el campo magnético son perpendiculares, y entonces podemos escribir:

$$\vec{F}_B = q \cdot \left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \rightarrow F_B = q \cdot v \cdot B \cdot \text{sen}\,\alpha \rightarrow F_B = q \cdot v \cdot B$$

La fuerza magnética provoca que los electrones se acumulen en un lado del conductor.

Aparece, entonces, un campo eléctrico debido a la acumulación de cargas positivas en un lado de la barra y de cargas negativas en el otro lado. El equilibrio se alcanza cuando la fuerza eléctrica y la fuerza magnética se igualan, es decir:

$$\vec{F}_B = -\vec{F}_E \rightarrow |\cancel{q}| \cdot v \cdot B = |\cancel{q}| \cdot E \rightarrow B = \frac{E}{v}$$

Como el campo eléctrico es constante, puesto que el campo magnético y la velocidad también lo son, podemos escribir:

$$\Delta V = E \cdot L$$

Y sustituyendo en la expresión anterior queda:

$$B = \frac{E}{v} = \frac{\frac{\Delta V}{L}}{v} = \frac{\Delta V}{L \cdot v} = \frac{0{,}8\ \text{V}}{0{,}5\ \text{m} \cdot 4\ \text{m/s}} = 0{,}4\ \text{T}$$

b) Si la barra se mueve en la misma dirección del campo magnético, entonces la velocidad y el campo magnético son paralelos y su producto vectorial es nulo, por lo que no aparecerá una fuerza de Lorentz sobre las cargas del conductor. De este modo no aparecerá el campo eléctrico y, por consiguiente, no existirá diferencia de potencial entre los extremos de la barra.

10. Sea una bobina circular y plana de 2,5 cm de radio construida con 25 espiras cuyo eje es paralelo a un campo magnético uniforme de 0,1 T. Calcula la fem inducida entre los extremos de la bobina si durante Δt = 10 ms y de forma lineal se duplica el campo magnético. ¿Cuánto valdría la fem si en ese intervalo Δt hubiésemos invertido el sentido del campo?

La fuerza electromotriz inducida depende de la variación del flujo magnético sobre la bobina. Podemos escribir:

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_B}{dt}$$

El campo magnético se duplica, por lo que podemos escribir:

$$\varepsilon = -\frac{\Delta\phi_B}{\Delta t} = -\frac{\left(B_F - B_0\right) \cdot S}{\Delta t} = -\frac{\left(2 \cdot B_0 - B_0\right) \cdot S}{\Delta t} = -\frac{B_0 \cdot S}{\Delta t} = -\frac{0{,}1\ \text{T} \cdot 25 \cdot \pi \cdot \left(0{,}025\ \text{m}\right)^2}{10 \cdot 10^{-3}\ \text{s}} = -0{,}49\ \text{V}$$

La fuerza electromotriz inducida es constante en este caso.

Si en ese intervalo de tiempo modificamos el campo hasta invertirlo de sentido, procediendo análogamente:

$$\varepsilon = -\frac{\Delta\phi_B}{\Delta t} = -\frac{(B_F - B_0)\cdot S}{\Delta t} = -\frac{(-B_0 - B_0)\cdot S}{\Delta t} = \frac{2\cdot B_0\cdot S}{\Delta t} = \frac{2\cdot 0{,}1\ \text{T}\cdot 25\cdot\pi\cdot(0{,}025\ \text{m})^2}{10\cdot 10^{-3}\ \text{s}} = 0{,}98\ \text{V}$$

11. Una espira circular de 4 cm de radio se encuentra situada en el seno de un campo magnético uniforme perpendicular al plano de la espira cuya intensidad varía con el tiempo:

$$\mathbf{B = 3\cdot t^2 + 4\ (\text{en unidades del SI})}$$

a) Escribe la expresión matemática del flujo magnético que atraviesa la espira en función del tiempo.

b) Representa la fuerza electromotriz inducida en función del tiempo y calcula su valor para $t = 2$ s.

a) El flujo magnético que atraviesa la espira depende del valor del campo magnético y de la superficie de la espira. La superficie de la espira no varía, pero el campo magnético sí, por lo que el flujo magnético variará con el tiempo. Como el campo magnético es perpendicular al plano de la espira:

$$\phi_B = \vec{B}(t)\cdot\vec{S} = B(t)\cdot S\cdot\cos\alpha = B(t)\cdot S\cdot\cos 0° = (3\cdot t^2 + 4)\cdot\pi\cdot R^2 = (3\cdot t^2+4)\cdot\pi\cdot(0{,}04\ \text{m})^2 =$$
$$= 1{,}6\cdot 10^{-3}\pi\cdot(3\cdot t^2+4)\ \text{Wb} = 0{,}015\cdot t^2 + 0{,}02\ \text{Wb}$$

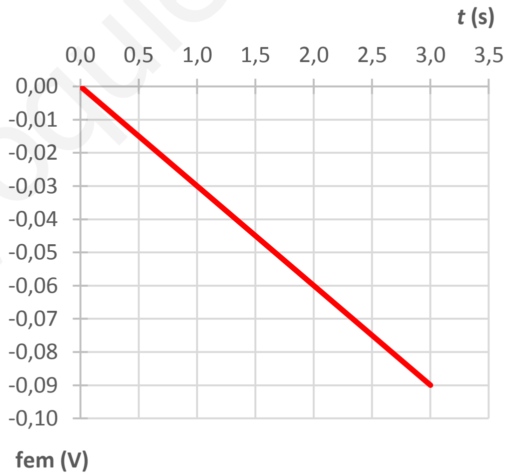
b) Calculamos el valor de la fuerza electromotriz derivando el flujo magnético respecto al tiempo y sustituyendo valores:

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_B}{dt} = -\frac{d(\vec{B}\cdot\vec{S})}{dt} = -\frac{d(B\cdot S)}{dt} = -\frac{d(0{,}015\cdot t^2 + 0{,}02\ \text{Wb})}{dt} = -0{,}030\cdot t\ \text{V}$$

El valor de la fuerza electromotriz para $t = 2$ s es:

$$\varepsilon = -0{,}030\cdot t = -0{,}030\cdot 2 = -0{,}060\ \text{V}$$

La representación gráfica es la siguiente:



12. Una espira circular de 20 cm de radio se encuentra en un campo magnético uniforme perpendicular a la superficie de la espira cuya intensidad varía con el tiempo según la expresión:

$$\mathbf{B(t) = 1{,}8\ \text{sen}\ (8\cdot t)\ (\text{en unidades del SI}).}$$

a) Calcula el flujo magnético que atraviesa la espira en función del tiempo.

b) Calcula la fuerza electromotriz inducida máxima.

a) Como el campo magnético es perpendicular a la espira, el flujo magnético que cruza la espira es máximo y viene dado por la expresión:

$$\phi_B(t) = \vec{B}(t)\cdot\vec{S} = B(t)\cdot S\cdot\cos 0^\circ = 1{,}8\cdot\text{sen}\,(8\cdot t)\cdot\pi\cdot R^2 = 1{,}8\cdot\text{sen}\,(8\cdot t)\cdot\pi\cdot(0{,}2\text{ m})^2$$
$$= 0{,}226\cdot\text{sen}\,(8\cdot t)\text{ Wb}$$

b) La fuerza electromotriz se calcula a partir de la variación del flujo magnético con el tiempo:

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_B}{dt} = -\frac{d(\vec{B}\cdot\vec{S})}{dt} = -\frac{d(B\cdot S)}{dt} = -\frac{d(0{,}226\cdot\text{sen}\,(8\cdot t))}{dt} \rightarrow$$
$$\rightarrow |\varepsilon| = 0{,}226\cdot\cos(8\cdot t)\cdot 8\text{ V} = 1{,}808\cdot\text{sen}\,(8\cdot t)\text{ V}$$

Como vemos, la fem será máxima cuando la función trigonométrica sea 1, es decir:

$$\varepsilon_{\text{máx.}} = 1{,}808\cdot 1\text{ V} = 1{,}808\text{ V}$$

13. Una espira conductora está girando con un periodo de giro de 4,0 s en una región donde hay un campo magnético constante, produciéndose una fuerza electromotriz máxima en la espira de 5,2 V. Si se reduce el periodo de giro de la espira hasta 3 s, calcula cuánto valdrá ahora la fuerza electromotriz máxima inducida en la espira.

Si aumenta el periodo de giro en la espira, el flujo magnético a través de la espira variará más rápidamente, por lo que es de esperar que la fuerza electromotriz máxima en la espira aumente. Calculamos el flujo magnético a través de la espira.

$$\phi_B(t) = \vec{B}(t)\cdot\vec{S} = B(t)\cdot S\cdot\cos(\omega\cdot t) = B\cdot S\cdot\cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right) = B\cdot\pi\cdot R^2\cdot\cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)$$

Suponemos que en el instante inicial la espira está colocada de manera perpendicular al campo magnético.

Entonces podemos calcular cómo varía este flujo magnético con el tiempo y deducir entonces el valor de la fuerza electromotriz.

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_B}{dt} = -\frac{d(\vec{B}\cdot\vec{S})}{dt} = -\frac{d(B\cdot S)}{dt} = -\frac{d\left[B\cdot\pi\cdot R^2\cdot\cos\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)\right]}{dt} = -B\cdot\pi\cdot R^2\cdot\frac{2\pi}{T}\cdot\text{sen}\left(\frac{2\pi}{T}\cdot t\right)$$

Aplicamos la expresión anterior a las dos situaciones planteadas:

$$|\varepsilon|_1 = B\cdot\pi\cdot R^2\cdot\frac{2\pi}{T_1}\cdot\text{sen}\left(\frac{2\pi}{T_1}\cdot t\right) \rightarrow |\varepsilon|_{1\text{ máx}} = B\cdot\pi\cdot R^2\cdot\frac{2\pi}{T_1}$$

$$|\varepsilon|_2 = B\cdot\pi\cdot R^2\cdot\frac{2\pi}{T_2}\cdot\text{sen}\left(\frac{2\pi}{T_2}\cdot t\right) \rightarrow |\varepsilon|_{2\text{ máx}} = B\cdot\pi\cdot R^2\cdot\frac{2\pi}{T_2}$$

Dividimos una ecuación entre otra y obtenemos:

$$\frac{|\varepsilon|_{2\text{ máx}}}{|\varepsilon|_{1\text{ máx}}} = \frac{\cancel{B\cdot\pi\cdot R^2}\cdot\frac{\cancel{2\pi}}{T_2}}{\cancel{B\cdot\pi\cdot R^2}\cdot\frac{\cancel{2\pi}}{T_1}} = \frac{T_1}{T_2} \rightarrow |\varepsilon|_{2\text{ máx}} = \frac{T_1}{T_2}\cdot|\varepsilon|_{1\text{ máx}} = \frac{4\text{ s}}{3\text{ s}}\cdot 5{,}2\text{ V} = 6{,}9\widehat{3}\text{ V}$$

14. En el seno de un campo magnético uniforme de 0,02 T se coloca perpendicularmente una bobina circular de 40 cm de radio y 10 espiras. Si la bobina comienza a girar alrededor de uno de sus diámetros, calcula:

a) El flujo magnético máximo que atraviesa la bobina.

b) La fem en la bobina en el instante t = 0,1 s, si gira con una velocidad angular constante de 120 rpm.

a) El flujo magnético máximo se produce cuando el plano de la espira es perpendicular al campo magnético, ya que en esta situación es en la que mayor número de líneas de campo atraviesan la espira.

$$\phi_{B\text{ máx.}} = 10\cdot B(t)\cdot S\cdot\cos(90^\circ) = 10\cdot B\cdot S = 10\cdot B\cdot\pi\cdot R^2 = 10\cdot 0{,}02\text{ T}\cdot\pi\cdot(0{,}4\text{ m})^2 = 0{,}1\text{ Wb}$$

b) La fem se calcula a partir de la variación del flujo magnético en el tiempo:

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_B}{dt} = -\frac{d\left(\vec{B}\cdot\vec{S}\right)}{dt} = -\frac{d\left(B\cdot S\right)}{dt} = -\frac{d\left[10\cdot B\cdot\pi\cdot R^2\cdot\cos\left(\omega\cdot t\right)\right]}{dt} \rightarrow |\varepsilon| = 10\cdot B\cdot\pi\cdot R^2\cdot\omega\cdot\text{sen}\left(\omega\cdot t\right) =$$

$$= 10\cdot 0{,}02\ \text{T}\cdot\pi\cdot\left(0{,}4\ \text{m}\right)^2\cdot\frac{120\ \text{rev.}}{1\ \text{min}}\cdot\frac{2\pi\ \text{rad}}{1\ \text{rev.}}\cdot\frac{1\ \text{min}}{60\ \text{s}}\cdot\text{sen}\left(\frac{120\ \text{rev.}}{1\ \text{min}}\cdot\frac{2\pi\ \text{rad}}{1\ \text{rev.}}\cdot\frac{1\ \text{min}}{60\ \text{s}}\cdot 0{,}1\ \text{s}\right) = 2{,}77\cdot 10^{-2}\ \text{V}$$

15. Un transformador permite modificar el voltaje de la red eléctrica, 230 V, a los 12 V con los que funciona una lámpara halógena de 5 A. Si la bobina primaria tiene 2200 espiras:

a) Halla el número de espiras de la bobina secundaria.

b) ¿Qué intensidad circula por la primaria?

a) La ecuación que relaciona los voltajes, espiras e intensidades en un transformador es la siguiente:

$$\frac{V_s}{V_p} = \frac{N_s}{N_p} = \frac{I_p}{I_s}$$

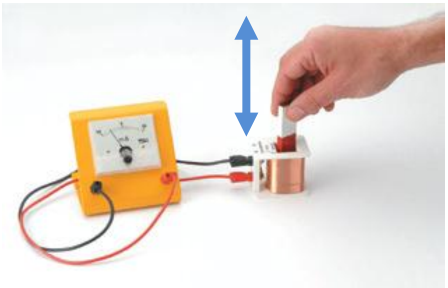
Entonces, sustituyendo los datos de los voltajes involucrados podemos calcular el número de espiras del secundario:

$$\frac{V_s}{V_p} = \frac{N_s}{N_p} \rightarrow N_s = \frac{V_s}{V_p}\cdot N_p = \frac{12\ \text{V}}{230\ \text{V}}\cdot 2200\ \text{espiras} \simeq 115\ \text{espiras}$$

b) La intensidad que circula por la bobina primaria es:

$$\frac{V_s}{V_p} = \frac{I_p}{I_s} \rightarrow I_p = \frac{V_s}{V_p}\cdot I_s = \frac{12\ \text{V}}{230\ \text{V}}\cdot 5\ \text{A} = 0{,}26\ \text{A}$$

16. Tenemos una bobina conectada a un amperímetro e introducimos y retiramos un imán alternativamente en el hueco de la bobina. Al hacerlo, se observa que la aguja del amperímetro se mueve alternativamente a la derecha y a la izquierda del centro de la escala. Explica razonadamente.



Al introducir y retirar alternativamente el imán en el hueco de la bobina variamos el campo magnético en el hueco de la bobina, por lo que el flujo magnético que atraviesa la bobina varía con el tiempo.

Esto hace que se produzca una fuerza electromotriz en la bobina. La aguja se mueve alternativamente porque al introducir y sacar el imán el flujo aumenta y disminuye alternativamente.

Cuanto más rápido movamos el imán, más intensa será la corriente que circula por la bobina.

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_B}{dt} = -\frac{d\left(\vec{B}\cdot\vec{S}\right)}{dt}$$

17. En el montaje de la derecha, la bobina interior está conectada a una batería de corriente continua; un interruptor permite cerrar o abrir el circuito a voluntad. La bobina exterior está conectada solo a un amperímetro cuyo cero está en el centro de la escala. Explica por qué se desplaza la aguja del amperímetro hacia uno de los lados cuando se abre o cierra el circuito y por qué lo hace solo durante unos breves instantes.

Cuando se abre o se cierra el circuito la corriente pasa en solo unos instantes de valer cero a adoptar cierto valor distinto de cero.

Durante esos instantes se produce una variación en el valor del campo magnético que crea la bobina por la que pasa la corriente que proporciona la batería. Entonces se produce también una variación en el flujo magnético que pasa por la bobina exterior.

Esta variación en el flujo magnético hace que aparezca una corriente en la bobina exterior y esto es lo que muestra el amperímetro.

La aguja solo se desplaza durante unos instantes porque rápidamente la intensidad en la bobina interior alcanza un valor constante y entonces el campo magnético creado por esta bobina interior no cambia. Esto implica que el flujo magnético por la bobina exterior se mantiene constante, con lo que la corriente generada en esta bobina exterior pasa a valer cero.

18. Una espira circular se conecta con un amperímetro.

a) ¿Se induce corriente al acercar o alejar un imán a la espira? ¿Influirá la velocidad con que se mueve el imán en la intensidad que marcaría el amperímetro?

b) Y si se mueve la espira y permanece fijo el imán, ¿se producirá corriente eléctrica?

a) Sí, pues al acercar o alejar el imán a la espira varía el valor del campo magnético en la espira y, por consiguiente, varía el flujo magnético que atraviesa la espira. Este hecho provoca la aparición de una corriente en la espira.

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_B}{dt} = -\frac{d\left(\vec{B}\cdot\vec{S}\right)}{dt}$$

La velocidad con que se mueve el imán no influirá en la intensidad que marcaría el amperímetro, ya que la intensidad es directamente proporcional a la fem, y esta no depende de la velocidad, sino del valor del campo magnético, de la superficie de la espira y del ángulo que formen ambos vectores.

b) Si se mueve la espira y permanece fijo el imán, la situación es análoga, puesto que el valor del campo magnético en la espira también cambiará y esto provocará una variación del flujo magnético en la espira, lo que induce una corriente en la espira.

19. Cuando un imán se acerca a una espira se genera en ella una fuerza electromotriz. Razona cómo cambiaría esa fuerza electromotriz si:

a) El imán se alejara de la espira.

b) Se invirtieran los polos del imán.

c) El imán se mantuviera fijo.

a) Se genera una fuerza electromotriz del mismo valor, pero la corriente en la espira circularía en sentido opuesto al primer caso, pues la variación del flujo magnético sobre la espira sería opuesta al caso mencionado en el enunciado.

b) De nuevo se genera una fuerza electromotriz del mismo valor, pero la corriente en la espira circularía de nuevo en sentido opuesto al primer caso recogido en el enunciado.

c) Si el imán se mantiene fijo, no circularía corriente por la espira, pues entonces el valor del campo magnético sobre la espira no cambiaría, el flujo magnético sobre la espira sería constante y entonces no se induce corriente en la espira.

20. Una espira está situada en el plano XY y es atravesada por un campo magnético constante en la dirección del eje Z. Se induce una fuerza electromotriz:

a) Si la espira se mueve en el plano XY.

b) Si la espira gira alrededor de un eje perpendicular a la espira.

c) Si se anula gradualmente el campo.

a) No, pues en este caso no varía el valor de la superficie expuesta al campo magnético y el flujo magnético que atraviesa la espira es constante, por lo que no se inducirá corriente en la espira.

b) No, pues en este caso tampoco varía el valor de la superficie expuesta al campo magnético y el flujo magnético que atraviesa la espira es constante, por lo que no se inducirá corriente en la espira.

c) Sí, pues en este caso el flujo magnético disminuye con el paso del tiempo, y entonces se induce una corriente en la espira tal que el campo que genera esta corriente inducida se opone a la variación del campo.
Como el campo magnético va disminuyendo, el sentido de la corriente inducida en la espira es tal que provoca un campo magnético en la misma dirección y sentido que el campo que va anulándose.

21. Una espira se mueve en el plano XY donde también hay una zona con un campo magnético $\vec{B}$ constante en dirección +Z. En la espira aparece una corriente en sentido antihorario:

a) Si la espira entra en la zona de $\vec{B}$.

b) Cuando sale de esa zona.

c) Cuando se desplaza por esa zona.

Respuesta correcta: a, b. En estos casos habrá una variación en el flujo magnético sobre la espira, y se inducirá una corriente. Cuando la espira se desplaza por esa zona, respuesta c, no hay variación de flujo magnético, puesto que no cambia ni la superficie ni el campo ni la orientación relativa.

22. Indica, razonando la respuesta, si la siguiente afirmación es verdadera o falsa: «En un circuito cerrado en un instante de tiempo en el que el flujo magnético a través de dicho circuito es nulo es posible que exista fuerza electromotriz inducida».

Verdadero. Puede existir una fuerza electromotriz inducida aunque el flujo magnético sea nulo si existe una variación con el tiempo del flujo magnético. Por ejemplo, cuando una espira gira en un campo magnético y en un instante determinado el plano de la espira es paralelo a la dirección del campo magnético.
En ese momento justo, el flujo magnético será cero pero existe una fuerza electromotriz inducida en la espira.

23. Una espira circular de radio 0,20 m se coloca perpendicularmente a un campo magnético uniforme de 0,4 T. Halla la fem inducida en la espira si en 0,2 s:

a) Se duplica el valor del campo magnético.

b) Se invierte el sentido del campo magnético.

c) Se gira la espira 90° en torno a un eje perpendicular al campo.

a) La fuerza electromotriz inducida se calcula a partir de la variación del flujo magnético con el tiempo.
Teniendo en cuenta que la superficie de la espira no varía y el valor del campo magnético se duplica:

$$\varepsilon = -\frac{\Delta\phi_B}{\Delta t} = -\frac{\Delta\left(\vec{B}\cdot\vec{S}\right)}{\Delta t} = -\frac{\Delta\left(B\cdot S\right)}{\Delta t} = -\frac{\left(B_2\cdot S_2 - B_1\cdot S_1\right)}{\Delta t} = -\frac{\left(B_2\cdot\pi\cdot R^2 - B_1\cdot\pi\cdot R^2\right)}{\Delta t} =$$
$$= -\pi\cdot R^2\cdot\frac{\left(B_2 - B_1\right)}{\Delta t} = -\pi\cdot\left(0{,}2\ \text{m}\right)^2\cdot\frac{\left(2\cdot 0{,}4\ \text{T} - 0{,}4\ \text{T}\right)}{0{,}2\ \text{s}} = -0{,}25\ \text{V}$$

b) Si ahora se invierte el sentido del campo, podemos escribir:

$$\varepsilon = -\frac{\Delta\phi_B}{\Delta t} = -\frac{\Delta\left(\vec{B}\cdot\vec{S}\right)}{\Delta t} = -\frac{\Delta\left(B\cdot S\right)}{\Delta t} = -\frac{\left(B_2\cdot S_2 - B_1\cdot S_1\right)}{\Delta t} = -\frac{\left(B_2\cdot\pi\cdot R^2 - B_1\cdot\pi\cdot R^2\right)}{\Delta t} =$$
$$= -\pi\cdot R^2\cdot\frac{\left(-B_1 - B_1\right)}{\Delta t} = -\pi\cdot\left(0{,}2\ \text{m}\right)^2\cdot\frac{\left(-0{,}4\ \text{T} - 0{,}4\ \text{T}\right)}{0{,}2\ \text{s}} = 0{,}50\ \text{V}$$

En este caso la corriente inducida en la espira tiene sentido opuesto al caso anterior.

c) Si la espira se gira 90º en torno a un eje perpendicular al campo, el módulo del campo no varía, pero el producto escalar entre el vector campo magnético y el vector que define el plano de la espira sí cambia (el flujo en la posición final será nulo porque el eje de la espira y las líneas de campo son paralelos).

Entonces, existirá una variación en el flujo magnético entre ambos instantes y, por consiguiente, se inducirá una fuerza electromotriz en la bobina.

$$\varepsilon = -\frac{\Delta\phi_B}{\Delta t} = -\frac{\Delta\left(\vec{B}\cdot\vec{S}\right)}{\Delta t} = -\frac{\left(\vec{B}_2\cdot\vec{S}_2 - \vec{B}_1\cdot\vec{S}_1\right)}{\Delta t} = -\frac{\left(0 - B_1\cdot\pi\cdot R^2\right)}{\Delta t} =$$

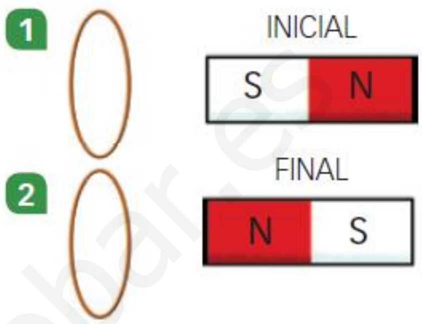
$$= -\frac{-B_1\cdot\pi\cdot R^2}{\Delta t} = \frac{0{,}4\ \text{T}\cdot\pi\cdot(0{,}2\ \text{m})^2}{0{,}2\ \text{s}} = 0{,}25\ \text{V}$$

En este caso la bobina gira en el mismo sentido que en el caso b y en diferente sentido que en el caso a.

24. Una espira de 5 cm radio está sometida inicialmente a un campo magnético de 0,4 T debido a un imán, cuyo eje es perpendicular al plano de la espira. A continuación giramos el imán 180°.

a) Indica el sentido de la corriente inducida mientras se gira el imán.

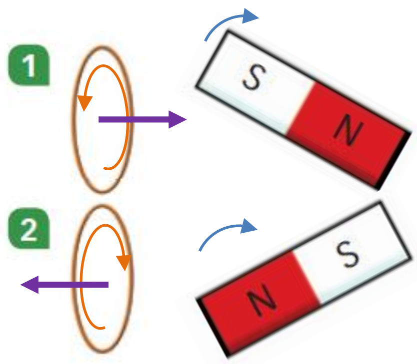
b) Calcula el valor de la fem media inducida si el giro se realiza en 0,1 s.



a) Inicialmente, con el imán en reposo, no existe corriente inducida en la espira, pues no hay variación del flujo magnético por la espira.

Cuando comenzamos a girar el imán, el flujo magnético varía, porque varía el producto escalar $\vec{B}\cdot\vec{S}$.

Durante la primera media vuelta se induce en la espira corriente en un sentido. A partir de la mitad del giro del imán la corriente inducida en la espira tiene el sentido opuesto.



Las líneas de campo que pasan de izquierda a derecha de la espira van disminuyendo, por lo que el campo generado por la corriente inducida en la espira tiene el sentido de izquierda a derecha. Es decir, la corriente circula en la espira en el sentido indicado.

En la segunda mitad del giro las líneas que entran en la espira por la parte derecha son cada vez más numerosas. Entonces el campo generado por la corriente inducida en la espira debe oponerse a esta dirección, y de nuevo la corriente inducida debe circular en el mismo sentido que en el caso anterior.

b) Entre la posición inicial y final el campo magnético generado por el imán invierte su sentido. Si el giro se realiza en 0,1 s, el valor de la fuerza electromotriz inducida es:

$$\varepsilon = -\frac{\Delta\phi_B}{\Delta t} = -\frac{\Delta\left(\vec{B}\cdot\vec{S}\right)}{\Delta t} = -\frac{\left(\vec{B}_2\cdot\vec{S}_2 - \vec{B}_1\cdot\vec{S}_1\right)}{\Delta t} = -\frac{\left(-B_1\cdot S - B_1\cdot S\right)}{\Delta t} = +\frac{2\cdot B_1\cdot S}{\Delta t}$$

$$= \frac{2\cdot B_1\cdot\pi\cdot R^2}{\Delta t} = \frac{2\cdot 0{,}4\ \text{T}\cdot\pi\cdot(0{,}05\ \text{m})^2}{0{,}1\ \text{s}} = 6{,}28\cdot 10^{-2}\ \text{V}$$

25. Un campo magnético uniforme que varía con el tiempo según la expresión: $B(t) = 3{,}7\cdot\cos(8\cdot t + \pi/4)$ (SI) atraviesa perpendicularmente una espira cuadrada de lado 60 cm.

a) Determina el flujo magnético que atraviesa la espira en función del tiempo.

b) Calcula la fem inducida en la espira y su periodo.

a) Como el campo magnético y la espira son perpendiculares, el flujo magnético que atraviesa la espira es:

$$\phi_B = \vec{B}\cdot\vec{S} = B\cdot S = 3{,}7\cdot\cos\left(8\cdot t + \frac{\pi}{4}\right)\cdot L^2 = 3{,}7\cdot\cos\left(8\cdot t + \frac{\pi}{4}\right)\cdot 0{,}6^2 = 1{,}33\cdot\cos\left(8\cdot t + \frac{\pi}{4}\right)\ \text{(SI)}$$

b) La fuerza electromotriz se calcula a partir de la variación del flujo magnético con el tiempo:

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_B}{dt} = -\frac{d\left[1{,}33\cdot\cos\left(8\cdot t+\frac{\pi}{4}\right)\right]}{dt} = -1{,}33\cdot\left(-\text{sen}\left(8\cdot t+\frac{\pi}{4}\right)\right)\cdot 8 = 10{,}64\cdot\text{sen}\left(8\cdot t+\frac{\pi}{4}\right)\quad\text{(SI)}$$

El periodo de giro de la espira se calcula a partir de la expresión incluida dentro de la función trigonométrica presente en la ecuación de la fuerza electromotriz en función del tiempo:

$$\varepsilon = 10{,}64\cdot\text{sen}\left(8\cdot t+\frac{\pi}{4}\right)\rightarrow\omega = 8\quad\text{(SI)}\rightarrow\frac{2\pi}{T} = 8\quad\text{(SI)}\rightarrow T = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}\text{ s} = 0{,}785\text{ s}$$

26. Una espira circular plana de 0,2 m² de área se sitúa en un campo magnético uniforme cuyo módulo varía con el tiempo según la expresión $B(t) = 1{,}5\cdot\text{sen}(4\cdot t+\pi)$ (SI).

Si la normal a su superficie de la espira forma un ángulo de 60° con la dirección del campo, ¿cuánto vale la fem inducida en la espira en el instante $t = 10$ s?

La fuerza electromotriz se calcula a partir de la variación del flujo magnético. En este caso el campo magnético y la normal a la superficie de la espira forman 60º. Por tanto:

$$\varepsilon(t) = -\frac{d\phi_B}{dt} = -\frac{d\left(\vec{B}\cdot\vec{S}\right)}{dt} = -\frac{d\left(B\cdot S\cdot\cos 60^\circ\right)}{dt} = -\frac{d\left[1{,}5\cdot\text{sen}\left(4\cdot t+\pi\right)\cdot 0{,}2\cdot\cos 60^\circ\right]}{dt} =$$

$$= -1{,}5\cdot 0{,}2\cdot\cos 60^\circ\cdot\cos\left(4\cdot t+\pi\right)\cdot 4 = -0{,}6\cdot\cos\left(4\cdot t+\pi\right)$$

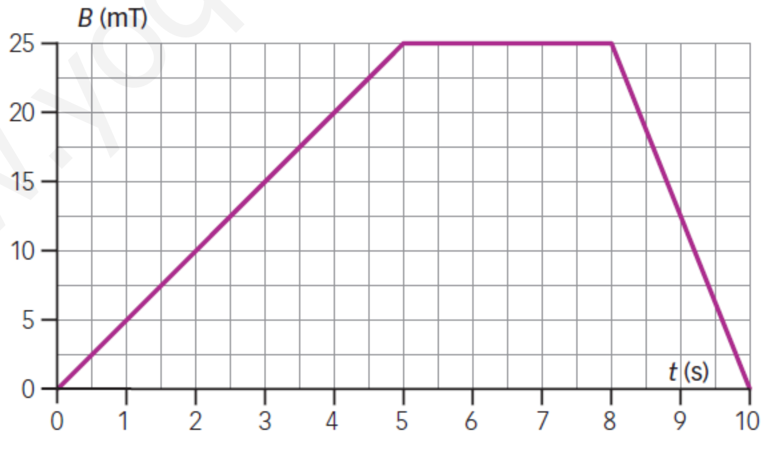
Entonces, en el instante $t = 10$ s tenemos:

$$\varepsilon(10\text{ s}) = -0{,}6\cdot\cos\left(4\cdot 10+\pi\right) = -0{,}40\text{ V}$$

Se ha tenido en cuenta que la cantidad que queda dentro de la función coseno es:

$$\cos(40+\pi) = \cos(40+\pi-2\pi\cdot 6) = \cos(5{,}44248) = 0{,}667$$

27. Una bobina de 2000 espiras cuadradas y 2,5 cm de lado penetra perpendicularmente en un campo magnético que varía en función del tiempo según la siguiente gráfica.



a) Determina la ecuación que relaciona el flujo magnético con el tiempo.

b) Calcula la fem inducida en cada uno de los intervalos.

a) En el primer tramo el campo magnético aumenta, por lo que también irá aumentando el flujo magnético. La expresión del campo magnético en función del tiempo es:

- Entre 0 y 5 s. Aquí el campo aumenta linealmente con el tiempo.

$$B(t) = 0+m\cdot t$$

m es la pendiente de la recta en la gráfica. Se puede deducir así:

$$m = \frac{B_{5\,s} - B_{0\,s}}{5-0} = \frac{0{,}025-0}{5} = 5 \cdot 10^{-3}\ \text{T/s}$$

Por tanto, el campo en este intervalo de tiempo es:

$$B(t) = 5 \cdot 10^{-3} \cdot t\ \ \text{(unidades SI)}$$

- Entre 5 y 8 s. En este caso el campo magnético no varía:

$$B(t) = 25 \cdot 10^{-3}\ \ \text{(unidades SI)}$$

- Entre 8 y 10 s. Ahora el campo disminuye linealmente con el tiempo.

$$B(t) = 25 \cdot 10^{-3} + k \cdot (t-8)$$

k es la pendiente de la recta en la gráfica. Se puede deducir así:

$$k = \frac{B_{10\,s} - B_{8\,s}}{10-8} = \frac{0 - 25 \cdot 10^{-3}}{2} = -1{,}25 \cdot 10^{-2}\ \text{T/s}$$

Por tanto, el campo en este intervalo de tiempo es:

$$B(t) = 25 \cdot 10^{-3} - 1{,}25 \cdot 10^{-2} \cdot (t-8)\ \text{(unidades SI)}$$

Para cada intervalo el flujo magnético valdrá:

- Entre 0 y 5 s. Aquí el campo aumenta linealmente con el tiempo.

$$\phi_B(t) = 2000 \cdot B(t) \cdot S = 2000 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot t \cdot 0{,}025^2 = 6{,}25 \cdot 10^{-3} \cdot t\ \ \text{(unidades SI)}$$

- Entre 5 y 8 s. En este caso el campo magnético no varía y tampoco lo hace el flujo magnético.

$$\phi_B(t) = 2000 \cdot B(t) \cdot S = 2000 \cdot 25 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}025^2 = 3{,}125 \cdot 10^{-2}\ \text{Wb}$$

- Entre 8 y 10 s. Ahora el campo disminuye linealmente con el tiempo.

$$\phi_B(t) = 2000 \cdot B(t) \cdot S = 2000 \cdot \left[25 \cdot 10^{-3} - 1{,}25 \cdot 10^{-2} \cdot (t-8)\right] \cdot 0{,}025^2 =$$
$$= 3{,}125 \cdot 10^{-2} - 1{,}563 \cdot 10^{-2} \cdot (t-8)\ \text{(unidades SI)}$$

b) La fem inducida se calcula a partir de la derivada del flujo magnético con respecto al tiempo:

- Entre 0 y 5 s. Aquí el campo aumenta linealmente con el tiempo.

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_B(t)}{dt} = -\frac{d\left(6{,}25 \cdot 10^{-3} \cdot t\right)}{dt} = -6{,}25 \cdot 10^{-3}\ \text{V}$$

- Entre 5 y 8 s. En este caso el campo magnético no varía y tampoco lo hace el flujo magnético. Por tanto, la fem inducida es cero.

$$\varepsilon = 0\ \text{V}$$

- Entre 8 y 10 s. Ahora el campo disminuye linealmente con el tiempo.

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_B(t)}{dt} = -\frac{d\left[3{,}125 \cdot 10^{-2} - 1{,}563 \cdot 10^{-2} \cdot (t-8)\right]}{dt} = -\left(-1{,}563 \cdot 10^{-2}\right) = 1{,}56 \cdot 10^{-2}\ \text{V}$$

28. Se coloca una espira circular de 3 cm de radio en un campo magnético constante de 0,5 T que forma un ángulo de 60° respecto de la normal a la espira.

a) Calcula el flujo magnético que atraviesa la espira. ¿Se induce una fuerza electromotriz en la espira?

b) En un momento determinado el campo magnético disminuye linealmente hasta 0 T durante 100 ms. Calcula la fuerza electromotriz inducida en la espira.

a) El flujo magnético viene dado por la siguiente expresión:

$$\phi_B = \vec{B} \cdot \vec{S} = B \cdot S \cdot \cos 60° = 0{,}5\ \text{T} \cdot \pi \cdot (0{,}03\ \text{m})^2 \cdot \cos 60° = 7{,}07 \cdot 10^{-4}\ \text{Wb}$$

No se induce ninguna fuerza electromotriz en la espira porque el flujo magnético es constante.

b) Si el campo disminuye linealmente durante 100 ms, sí habrá variación en el flujo magnético y, por tanto, se inducirá una fem en la espira.

El campo magnético disminuye linealmente y se anula en 100 ms. Por tanto:

$$B(t) = B_0 + \frac{B_{\text{Final}} - B_0}{\Delta t} \cdot t = 0{,}5\ \text{T} + \frac{0 - 0{,}5\ \text{T}}{0{,}1\ \text{s}} \cdot t = 0{,}5\ \text{T} - 5 \cdot t \quad \text{(unidades SI)}$$

Por tanto, la fuerza electromotriz será:

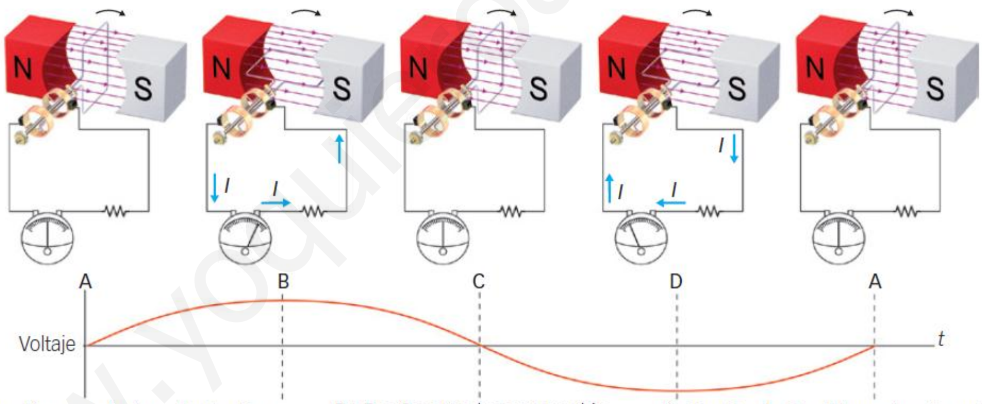
$$\varepsilon = -\frac{d\phi_B(t)}{dt} = -\frac{d(\vec{B} \cdot \vec{S})}{dt} = -\frac{d\left[B(t) \cdot S \cdot \cos 60^\circ\right]}{dt} = -\frac{d\left[(0{,}5 - 5 \cdot t) \cdot \pi \cdot 0{,}03^2 \cdot \cos 60^\circ\right]}{dt} =$$
$$= 5 \cdot \pi \cdot 0{,}03^2 \cdot \cos 60^\circ = 7{,}07 \cdot 10^{-3}\ \text{V}$$

29. El generador de corriente alterna es un dispositivo capaz de transformar otro tipo de energía en energía eléctrica.

a) Describe brevemente el funcionamiento de un generador de corriente alterna. Haz un esquema.

b) ¿Aumenta o disminuye la fuerza electromotriz inducida si hacemos girar la espira más rápido en un alternador?

a) En un generador de corriente alterna el movimiento relativo entre una bobina y un imán hace que se genere corriente eléctrica. En el alternador se produce una corriente alterna, ya que en medio ciclo las cargas circulan en un sentido, y en el siguiente medio lo hacen en sentido opuesto. La ley de Faraday permite obtener la función matemática de la fem que se obtiene en el alternador. La variación del flujo magnético sobre las espiras produce la corriente eléctrica.



En **A** la espira está perpendicular al campo y el flujo que la atraviesa es máximo. En **B** la espira es paralela al campo y el flujo es nulo.

De **A** a **B** se produce una disminución del flujo, la fem pasa de 0 al máximo.

De **B** a **C** se produce un cambio similar en el flujo que atraviesa la espira, la fem pasa del valor máximo en B al 0 en C.

De **C** a **D** y de **D** a **A** la espira ofrece la cara opuesta a las líneas de campo; la fem inducida tendrá una variación similar a la de la semivuelta anterior, pero la corriente circula en sentido opuesto.

b) Si hacemos girar la espira más rápido, el flujo magnético sobre la espira variará más rápidamente, y entonces su derivada también lo hará, por lo que la fuerza electromotriz inducida será más intensa.

30. Una espira de 2 cm de radio gira en el seno de un campo magnético de 0,12 T con un periodo de 0,02 s. Calcula:

a) La frecuencia de la corriente inducida en la espira.

b) El flujo del campo magnético a través de la espira en función del tiempo.

c) El valor máximo de la fuerza electromotriz inducida en la espira.

a) La frecuencia de la corriente inducida será la misma que la frecuencia de giro de la espira. Es decir:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0{,}02\ \text{s}} = 50\ \text{Hz}$$

b) El flujo magnético que atraviesa la espira depende del tiempo. Si suponemos que en el instante inicial la espira está perpendicular al campo magnético:

$$\phi_B = \vec{B}\cdot\vec{S} = B\cdot S\cdot\cos(\omega\cdot t) = B\cdot S\cdot\cos(2\pi\cdot f\cdot t) =$$
$$= 0{,}12\ \text{T}\cdot\pi\cdot(0{,}02\ \text{m})^2\cdot\cos(2\pi\cdot 50\cdot t) = 1{,}51\cdot 10^{-4}\cdot\cos(100\pi\cdot t)\ \text{(unidades SI)}$$

c) La fuerza electromotriz se calcula a partir de la variación con el tiempo del flujo magnético sobre la espira. Es decir:

$$\varepsilon = -\frac{d\phi_B(t)}{dt} = -\frac{d\left[1{,}51\cdot 10^{-4}\cdot\cos(100\pi\cdot t)\right]}{dt} = -1{,}51\cdot 10^{-4}\cdot 100\cdot\pi\cdot\left[-\text{sen}(100\pi\cdot t)\right]$$
$$= +4{,}74\cdot 10^{-2}\cdot\text{sen}(100\pi\cdot t)\ \text{(unidades SI)}$$

Por tanto, el valor máximo de la fuerza electromotriz se alcanza cuando el seno alcanza su valor máximo, 1:

$$\left|\varepsilon_{\text{máx.}}\right| = +4{,}74\cdot 10^{-2}\ \text{V}$$

FÍSICA EN TU VIDA

1. ¿Por qué las cuerdas de la guitarra se comportan como imanes? Explícalo con un esquema.

Porque circula corriente eléctrica por ellas y entonces producen un campo magnético alrededor de ellas, tal y como hacen otros hilos de corriente. Por eso decimos que se comportan como un imán: porque producen un campo magnético alrededor.

2. Explica cómo se genera la corriente eléctrica que llega al amplificador de una guitarra eléctrica.

Cuando se pulsa una cuerda de la guitarra, el campo magnético que produce la cuerda se convierte en un campo variable con el tiempo, y esto provoca una corriente eléctrica en la pastilla que se transmite al amplificador.

3. ¿Cómo se provoca la variación de flujo magnético que induce la corriente en una guitarra, variando la superficie o variando la intensidad del campo sobre las bobinas situadas bajo las cuerdas?

Variando la intensidad, ya que al pulsar las cuerdas de la guitarra, estas vibran y se acercan y se alejan consecutivamente a las bobinas.

4. ¿De qué tipo será la corriente inducida en el bobinado de las pastillas, continua o alterna?

Alterna, puesto que las cuerdas suben y bajan, lo que hace que el flujo magnético aumente en un semiciclo y disminuya en el semiciclo siguiente.

5. Los vecinos de personas que practican con instrumentos musicales se quejan a menudo de las molestias ocasionadas por el sonido: ¿qué soluciones se te ocurren?

Respuesta personal. Una solución en instrumentos con salida de auriculares es usarla todo lo posible. Además, otra posible solución es aislar bien las paredes de la estancia donde se practica habitualmente. Existen aislantes sonoros bastante eficientes. Y, por supuesto, no tocar a horas en los que las molestias pueden ser más acusadas, evitando las primeras horas de la mañana y las últimas del día.

PROYECTO SABER HACER

5

Ondas. El sonido

SANTILLANA

Ondas. El sonido

5

PARA COMENZAR

- **Describe el movimiento que sufren las partículas del líquido en la imagen de esta página. ¿En qué dirección se mueven? ¿En qué dirección se desplaza la onda?**

  Las partículas se mueven arriba y abajo, vibrando alrededor de una posición de equilibrio. La onda se desplaza desde el foco que origina la perturbación hacia el exterior.

- **¿Qué ocurre cuando dos ondas se encuentran?**

  Cuando dos ondas se encuentran sus efectos se suman. Esto puede hacer que se forme una onda de mayor amplitud, si están en fase, o una onda de menor amplitud, o incluso que las ondas se anulen si están en oposición de fase.

ACTIVIDADES

1. Una masa unida a un resorte describe un movimiento definido por la ecuación:

$$\boldsymbol{x(t) = 5 \cdot \text{sen}\left(2 \cdot t + \frac{\pi}{6}\right)}, \textbf{ unidades SI}$$

Determina la frecuencia del movimiento y la posición, velocidad y aceleración de la masa en el instante $t = 5$ s.

En el instante pedido la ecuación de la onda nos indica la posición de la masa unida al resorte. Podemos comparar esta ecuación con la ecuación general, para deducir la frecuencia, por ejemplo. La ecuación general de un movimiento oscilatorio es la siguiente:

$$x(t) = A \cdot \text{sen}(\omega \cdot t + \phi_0) = A \cdot \text{sen}\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t + \phi_0\right)$$

Comparando con la ecuación del enunciado, podemos deducir la frecuencia:

$$\cancel{2} \cdot \cancel{t} = \frac{\cancel{2}\pi}{T} \cdot \cancel{t} \rightarrow 1 = \pi \cdot f \rightarrow f = \frac{1}{\pi} \text{s}^{-1} = 0{,}32 \text{ Hz}$$

Para calcular la posición a los 5 s sustituimos en la ecuación del movimiento dada:

$$x(5 \text{ s}) = 5 \cdot \text{sen}\left(2 \cdot 5 \text{ s} + \frac{\pi}{6}\right) = -4{,}45 \text{ m}$$

Ahora para calcular la velocidad derivamos la ecuación de la posición con respecto al tiempo:

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{d\left[5 \cdot \text{sen}\left(2 \cdot t + \frac{\pi}{6}\right)\right]}{dt} = 5 \cdot \cos\left(2 \cdot t + \frac{\pi}{6}\right) \cdot 2 = 10 \cdot \cos\left(2 \cdot t + \frac{\pi}{6}\right)$$

Ahora sustituimos el instante pedido en el enunciado:

$$v(5 \text{ s}) = 10 \cdot \cos\left(2 \cdot 5 \text{ s} + \frac{\pi}{6}\right) = -4{,}55 \text{ m/s}$$

Para la aceleración derivamos la ecuación de la velocidad:

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d\left[10 \cdot \cos\left(2 \cdot t + \frac{\pi}{6}\right)\right]}{dt} = -10 \cdot \text{sen}\left(2 \cdot t + \frac{\pi}{6}\right) \cdot 2 = -20 \cdot \text{sen}\left(2 \cdot t + \frac{\pi}{6}\right)$$

Y sustituimos el instante señalado en el enunciado:

$$a(5 \text{ s}) = -20 \cdot \text{sen}\left(2 \cdot 5 \text{ s} + \frac{\pi}{6}\right) = 17{,}81 \text{ m/s}^2$$

2. Por una cuerda se propaga una onda cuya ecuación matemática es:

$$y(x,\ t) = 0{,}05 \cdot \text{sen}\left[2\pi\left(2 \cdot t - 5 \cdot x\right)\right] \text{ (SI)}$$

a) Determina la amplitud, la longitud de onda, la frecuencia, el periodo y la velocidad de propagación.

b) Representa gráficamente la posición frente al tiempo en el intervalo $t = 0$ y $t = 1$ s para un punto situado en $x = 0$.

a) Escribimos la forma general de la ecuación de una onda:

$$y(x,t) = A \cdot \text{sen}\left[2\pi \cdot \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \theta_0\right]$$

Ahora podemos comparar la ecuación del enunciado con esta ecuación. La amplitud es:

$$A = 0{,}05 \text{ m}$$

La longitud de onda es:

$$5 \cdot \cancel{x} = \frac{\cancel{x}}{\lambda} \rightarrow \lambda = \frac{1}{5} = 0{,}2 \text{ m}$$

El periodo es:

$$2 \cdot \cancel{t} = \frac{\cancel{t}}{T} \rightarrow T = \frac{1}{2} \text{ s} = 0{,}5 \text{ s}$$

La frecuencia es la inversa del periodo:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0{,}5 \text{ s}} = 2 \text{ Hz}$$

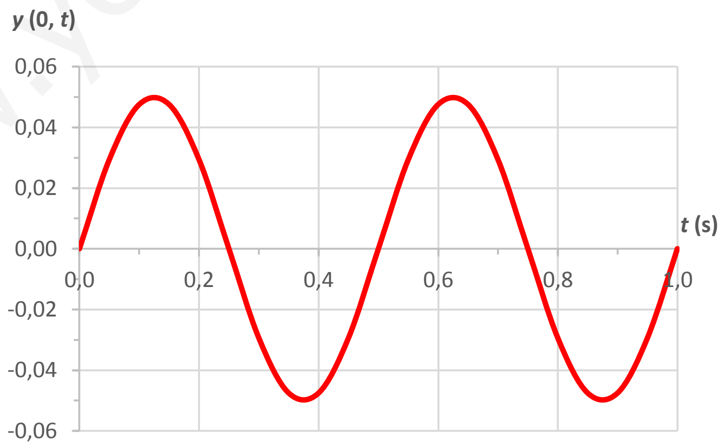
La velocidad de propagación de la onda se calcula a partir de la longitud de onda y del periodo:

$$v_p = \frac{\lambda}{T} = \frac{0{,}2 \text{ m}}{0{,}5 \text{ s}} = 0{,}4 \text{ m/s}$$

b) Para un punto situado en $x = 0$ la ecuación queda así:

$$y(0,t) = 0{,}05 \cdot \text{sen}\left[2\pi \cdot (2 \cdot t - 5 \cdot 0)\right] = 0{,}05 \cdot \text{sen}(4\pi \cdot t)$$

La representación gráfica de esta onda entre los instantes pedidos sería algo así:



3. Por una cuerda se propaga la onda transversal: $y\ (x,\ t) = 0{,}4 \cdot \cos\ [10\pi\ (2t - x)]$ (SI).

a) Calcula la elongación de un punto de la cuerda que en el instante $t = 0{,}25$ s se encuentra en $x = 10$ cm.

b) Halla la velocidad transversal de dicho punto en el mismo instante $t = 0{,}25$ s.

a) Sustituimos en la ecuación de la onda las condiciones dadas:

$$y(x,t)=0{,}4\cdot\cos\left[10\pi\cdot(2\cdot t-x)\right]=$$
$$=0{,}4\cdot\cos\left[10\pi\cdot(2\cdot 0{,}25-0{,}10)\right]=0{,}4\cdot\cos(4\pi)=0{,}4\text{ m}$$

b) Para calcular la velocidad derivamos la ecuación de la onda para un punto situado a 0,10 m con respecto al tiempo:

$$v(t)=\frac{dy(x=0{,}10,t)}{dt}=\frac{d\left[0{,}4\cdot\cos\left[10\pi\cdot(2\cdot t-0{,}10)\right]\right]}{dt}=$$
$$=-0{,}4\cdot\text{sen}\left[10\pi\cdot(2\cdot t-0{,}10)\right]\cdot 20\pi=-8\pi\cdot\text{sen}\left[10\pi\cdot(2\cdot t-0{,}10)\right]$$

Ahora sustituimos el instante indicado:

$$v(0{,}25\text{ s})=-8\pi\cdot\text{sen}\left[10\pi\cdot(2\cdot 0{,}25-0{,}10)\right]=0$$

Es decir, en ese instante dicho punto se encuentra con la máxima amplitud, a la máxima distancia de la posición de equilibrio; por tanto, con velocidad nula.

4. Una onda transversal de 5 cm de amplitud y 25 Hz de frecuencia se propaga con una velocidad de 15 m/s por una cuerda tensa hacia la derecha.

a) Calcula la ecuación matemática de la onda.

b) Determina el primer instante en el que la velocidad de vibración de una partícula situada a 1 m del foco es máxima.

a) La ecuación matemática de la onda tiene esta forma:

$$y(x,t)=A\cdot\text{sen}\left[2\pi\cdot\left(\frac{t}{T}\pm\frac{x}{\lambda}\right)+\theta_0\right]=A\cdot\text{sen}\left[2\pi\cdot\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)+\theta_0\right]$$

Usamos el signo menos porque nos dicen que la onda se propaga hacia la derecha.

A partir de la frecuencia podemos deducir el periodo:

$$T=\frac{1}{f}=\frac{1}{25\text{ Hz}}=0{,}04\text{ s}$$

Y como sabemos cuál es la velocidad de propagación, podemos obtener la longitud de onda:

$$v_p=\frac{\lambda}{T}\rightarrow\lambda=v_p\cdot T=15\text{ m/s}\cdot 0{,}04\text{ s}=0{,}6\text{ m}$$

Sustituyendo valores en la ecuación general de la onda:

$$y(x,t)=0{,}05\cdot\text{sen}\left[2\pi\cdot\left(\frac{t}{0{,}04}-\frac{x}{0{,}6}\right)+\theta_0\right]\ (\text{SI})$$

Dejamos el resultado en función de θ_0, desfase inicial, porque no nos facilitan datos para calcularlo.

b) Primero calculamos la velocidad de la onda derivando la posición. Suponemos que el desfase inicial es cero, ya que no nos lo indican:

$$v(x,t)=\frac{dy(x,t)}{dt}=\frac{d\left[0{,}05\cdot\text{sen}\left[2\pi\cdot\left(\frac{t}{0{,}04}-\frac{x}{0{,}6}\right)\right]\right]}{dt}=$$
$$=0{,}05\cdot\cos\left[2\pi\cdot\left(\frac{t}{0{,}04}-\frac{x}{0{,}6}\right)\right]\cdot\frac{2\pi}{0{,}04}=2{,}5\pi\cdot\cos\left[2\pi\cdot\left(\frac{t}{0{,}04}-\frac{x}{0{,}6}\right)\right]$$

La vibración es máxima cuando la expresión que hay dentro de la función trigonométrica coseno es 2π, pues entonces el coseno adopta el valor máximo: 1. Por tanto, como la partícula está a 1 m del foco ($x=1$ m):

$$\cancel{2\pi}\cdot\left(\frac{t}{0{,}04}-\frac{x}{0{,}6}\right)=\cancel{2\pi}\rightarrow\frac{t}{0{,}04}=1+\frac{1}{0{,}6}\rightarrow t=\left(1+\frac{1}{0{,}6}\right)\cdot 0{,}04=0{,}10\overset{\frown}{6}\text{ s}$$

5. **En una gran multinacional están instalando por el edificio un sistema de alarmas de acuerdo con el correspondiente plan de seguridad laboral. Se coloca un receptor a 100 m de distancia para medir la intensidad del sonido de una de las alarmas y recibe una intensidad de 0,10 W/m².**

a) ¿Cuál sería la intensidad que recibiría si se colocara a 1000 m de distancia?

b) Calcula la máxima distancia a la que se pueden colocar las alarmas para que sean escuchadas por todo el personal del edificio si la menor intensidad del sonido que puede apreciar el oído humano es $I_{lim} = 1\ \mu W/m^2$.

a) El sonido es una onda tridimensional. Por tanto, podemos escribir:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{r_2}{r_1}$$

La intensidad es proporcional al cuadrado de la amplitud. Por tanto:

$$\frac{\cancel{\text{cte.}} \cdot \sqrt{I_1}}{\cancel{\text{cte.}} \cdot \sqrt{I_2}} = \frac{r_2}{r_1} \to \frac{I_1}{I_2} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 \to I_2 = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \cdot I_1 = \left(\frac{100\text{ m}}{1000\text{ m}}\right)^2 \cdot 0{,}10\text{ W/m}^2 = 10^{-3}\text{ W/m}^2$$

b) De nuevo empleamos la expresión anterior, pero esta vez despejamos la distancia r_2 a la que la intensidad es la menor intensidad del sonido que puede apreciar el oído humano:

$$\frac{I_1}{I_2} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 \to r_2 = \sqrt{\frac{I_1}{I_2}} \cdot r_1 = \sqrt{\frac{0{,}10\text{ W/m}^2}{1 \cdot 10^{-6}\text{ W/m}^2}} \cdot 100\text{ m} = 31\,622{,}8\text{ m}$$

6. **Al dejar caer una piedra en la superficie de agua en calma de un estanque obtenemos una onda cuya amplitud, a 1 cm del foco, es de 25 cm. Suponiendo que no hubiese rozamiento entre las partículas del medio, ¿cuál será la amplitud cuando la onda haya avanzado 2 m desde el origen?**

La onda que se propaga por el agua es bidimensional. Entonces es válida la siguiente relación entre las amplitudes y las distancias:

$$\frac{A_1}{A_2} = \sqrt{\frac{r_2}{r_1}} \to A_2 = \sqrt{\frac{r_1}{r_2}} \cdot A_1 = \sqrt{\frac{1\text{ cm}}{200\text{ cm}}} \cdot 25\text{ cm} = 1{,}77\text{ cm}$$

7. **Un muro de 60 cm tiene un espesor de semiabsorción de 80 cm. Si al muro llega una onda de 5 W/m²:**

a) ¿Qué intensidad llega a la segunda cara del muro?

b) ¿Qué espesor debería tener para que la intensidad del sonido se reduzca en un 80 %?

a) La ecuación que relaciona la intensidad en ambos puntos del muro es:

$$I = I_0 \cdot e^{-\beta \cdot x}$$

Donde β es el coeficiente de absorción del medio.

El espesor de semiabsorción, $D_{1/2}$, es el espesor que debe tener el material para que la perturbación reduzca su intensidad a la mitad. Por tanto, podemos calcular β:

$$I = I_0 \cdot e^{-\beta \cdot x} \to \frac{\cancel{I_0}}{2} = \cancel{I_0} \cdot e^{-\beta \cdot D_{1/2}} \to 2 = e^{\beta \cdot D_{1/2}} \to \ln 2 = \beta \cdot D_{1/2} \to \beta = \frac{\ln 2}{D_{1/2}} = \frac{\ln 2}{80\text{ cm}}$$

Sustituimos los valores que indica el enunciado en la expresión de la intensidad anterior para ver cómo se atenúa la onda cuya intensidad inicial es 5 W/m²:

$$I = 5\text{ W/m}^2 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{80\text{ cm}} \cdot 60\text{ cm}} = 2{,}97\text{ W/m}^2$$

b) Para que la intensidad se reduzca un 80 % la intensidad final tiene que ser un 20 % de la inicial:

$$0{,}2 \cdot \cancel{I_0} = \cancel{I_0} \cdot e^{-\beta \cdot x} \to \ln 0{,}2 = -\beta \cdot x \to x = -\frac{\ln 0{,}2}{\beta} = -\frac{\ln 0{,}2}{\frac{\ln 2}{80\text{ cm}}} = 185{,}75\text{ cm}$$

8. Una onda viaja por un medio en el que su velocidad de propagación es v_p. En un punto de su trayectoria cambia el medio de propagación y duplica su velocidad. Determina cuál es la amplitud, la frecuencia y la longitud de onda de la onda en el segundo medio. Justifica las respuestas.

Si la velocidad de propagación se duplica, teniendo en cuenta la expresión para esta velocidad podemos escribir:

$$v_p = \frac{\lambda}{T} \rightarrow 2 = \frac{v_{p2}}{v_{p1}} = \frac{\frac{\lambda_2}{T_2}}{\frac{\lambda_1}{T_1}}$$

La frecuencia de la onda no varía. Por tanto, el periodo tampoco varía. Así:

$$2 = \frac{v_{p2}}{v_{p1}} = \frac{\frac{\lambda_2}{\cancel{T}}}{\frac{\lambda_1}{\cancel{T}}} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \rightarrow \lambda_2 = 2 \cdot \lambda_1$$

La longitud de onda también se duplica.

La amplitud también será la misma.

9. Una onda sonora se transmite en el aire a 300 Hz de frecuencia. Si hacemos que la onda se transmita en el agua, ¿cuál será la nueva frecuencia de la onda de sonido en el agua?

Dato: $v_{p\text{ sonido en agua}} = 4{,}4 \cdot v_{p\text{ sonido en aire}}$.

La frecuencia de la onda no varía, puesto que la energía que transmite la onda es la misma en el agua y en el aire. Por tanto, la frecuencia de la onda de sonido en el agua es de 300 Hz.

10. Tenemos dos fuentes de ondas armónicas transversales que generan ondas que se propagan a una velocidad de 16 m/s a lo largo del eje OX con amplitud 2 cm y frecuencia 1 Hz. La primera fuente está situada en $x = 0$ m y la segunda en $x = 2$ m. Si la segunda emite con una diferencia de fase de $+\pi/4$ rad con respecto a la primera:

a) Escribe la ecuación de ondas resultante de la acción de ambas fuentes.

b) Si solo tenemos la fuente situada en $x = 0$ m, determina la posición de un punto en el que el desplazamiento transversal sea $y = 0$ m en el instante $t = 2$ s.

a) La onda resultante será el resultado de la interferencia de ambas ondas. Por tanto:

$$y = y_A + y_B = A_A \cdot \text{sen}[\omega_A \cdot t - k_A \cdot x_A + \theta_{0A}] + A_B \cdot \text{sen}[\omega_B \cdot t - k_B \cdot x_B + \theta_{0B}]$$

Donde:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}\ ;\ k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

La amplitud y la frecuencia es la misma para ambas ondas. Por tanto, ambas ondas tendrán también igual periodo, porque es la inversa de la frecuencia, e igual longitud de ondas, pues se propagan a la misma velocidad y con la misma frecuencia, $v_p = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot f$, con lo cual podemos escribir:

$$y = y_A + y_B = A \cdot \text{sen}[\omega \cdot t - k \cdot x_A + \theta_{0A}] + A \cdot \text{sen}[\omega \cdot t - k \cdot x_B + \theta_{0B}]$$

Escribimos la siguiente relación trigonométrica para la suma de los senos de dos ángulos:

$$\text{sen}\,\alpha + \text{sen}\,\beta = 2 \cdot \text{sen}\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha - \beta}{2}$$

Entonces podemos escribir:

$$y = A\cdot\left[\text{sen}\left[\omega\cdot t - k\cdot x_A + \theta_{0A}\right] + \text{sen}\left[\omega\cdot t - k\cdot x_B + \theta_{0B}\right]\right] =$$

$$= A\cdot\text{sen}\frac{(\omega\cdot t - k\cdot x_A + \theta_{0A}) + (\omega\cdot t - k\cdot x_B + \theta_{0B})}{2}\cdot\cos\frac{(\cancel{\omega\cdot t} - k\cdot x_A + \theta_{0A}) - (\cancel{\omega\cdot t} - k\cdot x_B + \theta_{0B})}{2} =$$

$$= A\cdot\cos\frac{k\cdot(x_B - x_A) + \overbrace{(\theta_{0A} - \theta_{0B})}^{\pi/4}}{2}\cdot\text{sen}\frac{\left[2\cdot\omega\cdot t - k\cdot(x_A + x_B) + (\theta_{0A} + \theta_{0B})\right]}{2} =$$

$$= \underbrace{A\cdot\cos\left[k\cdot\frac{(x_B - x_A)}{2} + \frac{\pi}{8}\right]}_{A'}\cdot\text{sen}\left[\omega\cdot t - k\cdot\frac{(x_A + x_B)}{2} + \theta\right] = A'\cdot\text{sen}\left[\omega\cdot t - k\cdot\frac{(x_A + x_B)}{2} + \theta\right]$$

Donde:

$$\theta = \frac{\theta_{0A} + \theta_{0B}}{2}$$

Calculamos la longitud de onda:

$$v_p = \frac{\lambda}{T} \rightarrow \lambda = v_p\cdot T = \frac{v_p}{f} = \frac{16\ \text{m/s}}{1\ \text{Hz}} = 16\ \text{m}$$

Por tanto, la ecuación de la onda resultante sería:

$$y = A'\cdot\text{sen}\left[\omega\cdot t - k\cdot\frac{(x_A + x_B)}{2} + \theta\right] = A'\cdot\text{sen}\left[2\pi\cdot f\cdot t - \frac{2\pi}{\lambda}\cdot\frac{(x_A + x_B)}{2} + \theta\right]$$

Sustituyendo los valores conocidos obtenemos:

$$y = A'\cdot\text{sen}\left[2\pi\cdot 1\ \text{Hz}\cdot t - \frac{2\pi}{16\ \text{m}}\cdot\frac{(x_A + x_B)}{2} + \theta\right] = A'\cdot\text{sen}\left[2\pi\cdot t - \frac{\pi\cdot(x_A + x_B)}{16} + \theta\right]$$

b) En este caso, si suponemos un desfase inicial nulo para esa onda:

$$y = y_A = A_A\cdot\text{sen}\left[\omega_A\cdot t - k_A\cdot x_A\right]$$

Sustituyendo valores:

$$y = A\cdot\text{sen}\left[2\pi\cdot f\cdot t - \frac{2\pi}{\lambda}\cdot x_A\right] = 0{,}02\cdot\text{sen}\left[2\pi\cdot 1\cdot 2 - \frac{2\pi}{16}\cdot x_A\right]$$

Si $y = 0$:

$$0 = 0{,}02\cdot\text{sen}\left[2\pi\cdot 1\cdot 2 - \frac{2\pi}{16}\cdot x_A\right] \rightarrow \text{sen}\left[4\pi - \frac{2\pi}{16}\cdot x_A\right] = 0 \rightarrow 4\pi - \frac{2\pi}{16}\cdot x_A = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 4\cancel{\pi} = \frac{\cancel{\pi}}{8}\cdot x_A \rightarrow x_A = 4\cdot 8 = 32\ \text{m}$$

11. Observa la ecuación matemática de una onda estacionaria expresada en unidades del sistema internacional:

$y\ (x, t) = 0{,}4\cdot\text{sen}\ (2\pi\cdot x/12)\cdot\cos\ (2\pi\cdot t/3)$

a) Calcula la amplitud, la longitud de onda y el periodo de las dos ondas que se superponen.

b) Halla la distancia entre dos vientres consecutivos.

c) Calcula la velocidad transversal máxima del punto situado en $x = 3$ m.

a) Si se trata de una onda estacionaria, las dos ondas que se superponen tienen la misma amplitud, longitud de onda y periodo. La ecuación general de las ondas estacionarias es:

$$y(x,t) = 2\cdot A\cdot\text{sen}(k\cdot x)\cdot\cos(\omega\cdot t)$$

Comparando podemos deducir la amplitud:

$$2\cdot A = 0{,}4 \rightarrow A = \frac{0{,}4}{2} = 0{,}2\ \text{m}$$

La longitud de onda será:

$$k\cdot\cancel{x}=\frac{2\pi\cdot\cancel{x}}{12}\rightarrow\frac{\cancel{2\pi}}{\lambda}=\frac{\cancel{2\pi}}{12}\rightarrow\lambda=12\text{ m}$$

Y el periodo se deduce de manera análoga:

$$\omega\cdot\cancel{t}=\frac{2\pi\cdot\cancel{t}}{3}\rightarrow\frac{\cancel{2\pi}}{T}=\frac{\cancel{2\pi}}{3}\rightarrow T=3\text{ s}$$

b) La distancia entre dos vientres consecutivos se deduce a partir de la posición en que se forman los vientres:

$$x=(2\cdot n+1)\cdot\frac{\lambda}{4}\rightarrow x_{n+1}-x_n=\left[2\cdot(n+1)+1\right]\cdot\frac{\lambda}{4}-(2\cdot n+1)\cdot\frac{\lambda}{4}=\frac{\lambda}{4}\cdot\left[\cancel{2\cdot n}+2+1-\left(\cancel{2\cdot n}+1\right)\right]=$$
$$=2\cdot\frac{\lambda}{4}=\frac{\lambda}{2}=\frac{12\text{ m}}{2}\rightarrow x_{n+1}-x_n=6\text{ m}$$

c) La velocidad en función del tiempo se calcula a partir de la derivada de la posición.

$$v(x,t)=\frac{dy(x,t)}{dt}=\frac{d\left[0{,}4\cdot\text{sen}\left(\frac{2\pi\cdot x}{12}\right)\cdot\cos\left(\frac{2\pi\cdot t}{3}\right)\right]}{dt}=-0{,}4\cdot\text{sen}\left(\frac{2\pi\cdot x}{12}\right)\cdot\text{sen}\left(\frac{2\pi\cdot t}{3}\right)\cdot\frac{2\pi}{3}$$

Para un punto situado en $x=3$ m la velocidad será máxima cuando la función trigonométrica en t alcance su valor máximo, es decir, 1:

$$\text{sen}\left(\frac{2\pi\cdot t}{3}\right)=1\rightarrow\frac{2\cancel{\pi}\cdot t}{3}=\frac{\cancel{\pi}}{2}\rightarrow t=\frac{3}{4}\rightarrow t=0{,}75\text{ s}$$

Por tanto:

$$v(t)_{\text{máx.}}=0{,}4\cdot\underbrace{\text{sen}\left(\frac{2\pi\cdot 3}{12}\right)}_{1}\cdot 1\cdot\frac{2\pi}{3}=0{,}84\text{ m/s}$$

12. Indica cuáles de las siguientes funciones pueden representar una onda estacionaria y cuáles no. Justifica las respuestas.

a) $y=\text{sen}\,(k\cdot x)\cdot\cos\,(\omega\cdot x)$

b) $y=\text{sen}\,(A\cdot x)\cdot\cos\,(B\cdot t)$

c) $y=\cos\,(200\cdot t)\cdot\text{sen}\,(\pi\cdot x)$

d) $y=2\pi\cdot\text{sen}\,(A\cdot x)+\cos\,(B\cdot x)$

e) $y=\text{sen}\,(A\cdot x/\lambda)\cdot\cos\,(B\cdot t/T)$

f) $y=\text{sen}\,(x/\lambda+t/T)$

g) $y=\text{sen}\,(x/B-t/AB)$

a) No. No aparece el término correspondiente al tiempo dentro del coseno.

b) Sí.

c) Sí.

d) No. No aparece el término correspondiente al tiempo dentro del coseno.

e) Sí.

f) No. No tiene la función coseno con la variable tiempo.

g) No. No tiene la función coseno con la variable tiempo.

13. Se coloca un altavoz sobre un vehículo un día soleado con una temperatura del aire de unos 25 °C aproximadamente. El altavoz emite una nota de frecuencia 260,50 Hz.

a) Calcula la velocidad con la que se mueve el vehículo si un micrófono colocado en el suelo del trayecto seguido por el vehículo capta una nota de 285,50 Hz.

b) Determina si el coche se aleja o se aproxima del micrófono. Justifica la respuesta.

c) ¿Cómo es el sonido que recibe el micrófono, más grave o más agudo que el emitido por el altavoz?

Dato: $v_{\text{sonido, 25 °C}}=$ 346,4 m/s.

a) En este caso se produce el efecto Doppler, por lo que la frecuencia captada por un observador en reposo no es la misma que la que emite el altavoz en movimiento. La frecuencia percibida por el receptor, f_R, es mayor que la emitida, f.

La relación entre ambas frecuencias permite calcular la velocidad del vehículo, v_F:

$$f_R = f\cdot\frac{v}{v+v_F} \rightarrow \frac{f_R}{f} = \frac{v}{v+v_F} \rightarrow \frac{v+v_F}{v} = \frac{f}{f_R} \rightarrow v+v_F = \frac{f}{f_R}\cdot v \rightarrow$$

$$\rightarrow v_F = v\cdot\left(\frac{f}{f_R}-1\right) = 346{,}4\ \text{m/s}\cdot\left(\frac{260{,}50\ \text{Hz}}{285{,}50\ \text{Hz}}-1\right) = -30{,}33\ \text{m/s}$$

El signo menos indica que el vehículo se acerca al micrófono.

b) El coche se acerca al micrófono, puesto que la frecuencia recibida es mayor que la frecuencia emitida. Es como si las ondas se fueran adelantando a la llegada al micrófono debido al movimiento relativo entre foco y receptor.

c) El sonido recibido en el micrófono es más agudo que el emitido por el foco sonoro.

14. La membrana de un altavoz vibra con una frecuencia de 250 Hz. En las condiciones del experimento, la velocidad del sonido es 340 m/s.

a) Calcula la longitud de onda, la pulsación y el periodo del sonido producido por el altavoz.

b) Indica qué ocurre con la frecuencia y la longitud de onda registradas por un observador en cada uno de los casos siguientes.

b1) El altavoz se acerca rápidamente al observador.

b2) El sonido llega al observador después de haberse reflejado en una pared.

a) La velocidad de propagación de la onda relaciona la longitud de onda y el periodo:

$$v_p = \frac{\lambda}{T} = \lambda\cdot f \rightarrow \lambda = \frac{v_p}{f} = \frac{340\ \text{m/s}}{250\ \text{Hz}} = 1{,}36\ \text{m}$$

La pulsación ω es:

$$\omega = 2\pi\cdot f = 2\pi\cdot 250\ \text{Hz} = 500\pi\ \text{rad/s} = 1570{,}8\ \text{rad/s}$$

El periodo es la inversa de la frecuencia:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{250\ \text{Hz}} = 4\cdot 10^{-3}\ \text{s}$$

b) b1) Si el altavoz se acerca rápidamente al observador la frecuencia percibida será bastante mayor que la frecuencia de emisión, es decir, mayor de 250 Hz. La longitud de onda será, por consiguiente, menor, puesto que la velocidad de la onda sonora no varía.

b2) Si el sonido llega al observador tras reflejarse en una pared la frecuencia percibida será la misma que la de emisión. Y también la longitud de onda, que tampoco variará y coincidirá con la longitud de onda de la onda emitida.

15. Si pasas temporadas en la costa, te habrás dado cuenta de que de noche puedes oír sonidos más lejanos que de día. Explica este hecho teniendo en cuenta que, de día, el Sol calienta el suelo y la brisa del mar refresca nuestras caras, mientras que de noche llega una brisa cálida al tiempo que se refresca el suelo.

(Pista: ten en cuenta la refracción de las ondas de sonido al moverse por un medio no homogéneo).

De día el aire más caliente se sitúa cerca del suelo, mientras que de noche está situado cerca del suelo el aire más frío. Tal y como se observa en las ilustraciones, el sonido viaja más rápido por la noche porque el aire sobre el suelo está más caliente. Al viajar con mayor velocidad, puede llegar hasta distancias mayores sin atenuarse por debajo del umbral de audición del oído humano. Además, la refracción de las ondas sonoras en el aire hace que estas se curven hacia el suelo, evitando que se pierden hacia alturas más elevadas donde no podemos oírlas.

16. Se forma una onda estacionaria en una cuerda de una guitarra de 100 cm de longitud. Sabiendo que posee un armónico fundamental con una frecuencia de 300 Hz.

a) Dibuja el primer armónico.

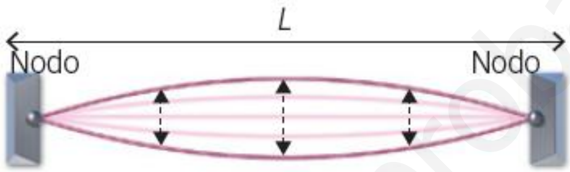
b) Calcula la longitud de onda del armónico fundamental.

c) Determina el valor de la velocidad con la que se propaga la onda.

d) Dibuja el tercer armónico.

e) Calcula el valor de la longitud de onda del tercer armónico.

a) El primer armónico es:



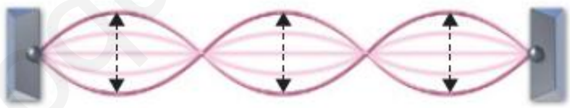
b) La longitud de onda del armónico fundamental es:

$$\lambda_1 = 2 \cdot L = 2 \cdot 1\ \text{m} = 2\ \text{m}$$

c) La velocidad de propagación de la onda puede calcularse a partir de la longitud de onda y de la frecuencia:

$$v_\text{p} = \frac{\lambda_1}{T_1} = \lambda_1 \cdot f_1 = 2\ \text{m} \cdot 300\ \text{Hz} = 600\ \text{m/s}$$

d) El tercer armónico es así:



e) La longitud de onda del tercer armónico es:

$$\lambda_3 = \frac{2 \cdot L}{3} = \frac{2 \cdot 1\ \text{m}}{3} = 0,\widehat{6}\ \text{m}$$

17. Tenemos dos tubos sonoros, ambos con la misma longitud, $L = 1{,}36$ m. Uno de los tubos tiene sus dos extremos abiertos a la atmósfera y el otro tubo sonoro tiene un extremo abierto a la atmósfera y el otro extremo cerrado.

a) Calcula, para cada uno de los tubos, la menor frecuencia de excitación sonora para que en el interior se formen ondas estacionarias.

b) Calcula la longitud de onda correspondiente a las frecuencias anteriores para cada caso.

c) Representa la onda estacionaria que se forma dentro de cada tubo. Señala la posición de los nodos y los vientres que se forman.

Dato: $v_{\text{p sonido en el aire}} = 340$ m/s.

a) Para el tubo con los dos extremos abiertos la menor frecuencia de excitación sonora se obtiene sustituyendo valores en la expresión correspondiente a este caso:

$$f_0 = \frac{v_\text{p}}{2 \cdot L} = \frac{340\ \text{m/s}}{2 \cdot 1{,}36\ \text{m}} = 125\ \text{Hz}$$

Para el tubo con un extremo abierto la expresión varía, sustituyendo los valores en la nueva expresión obtenemos:

$$f_0 = \frac{v_p}{4 \cdot L} = \frac{340 \text{ m/s}}{4 \cdot 1{,}36 \text{ m}} = 62{,}5 \text{ Hz}$$

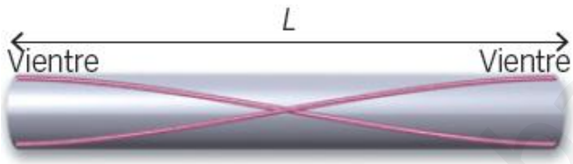
b) Para el tubo con los dos extremos abiertos:

$$v_p = \lambda_0 \cdot f_0 \rightarrow \lambda_0 = \frac{v_p}{f_0} = \frac{340 \text{ m/s}}{125 \text{ Hz}} = 2{,}72 \text{ m}$$

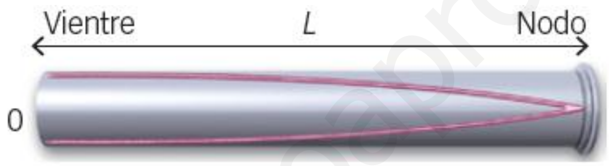
Para el tubo con un extremo abierto:

$$v_p = \lambda_0 \cdot f_0 \rightarrow \lambda_0 = \frac{v_p}{f_0} = \frac{340 \text{ m/s}}{62{,}5 \text{ Hz}} = 5{,}44 \text{ m}$$

c) Para el tubo con los dos extremos abiertos:



Para el tubo con un extremo abierto:



18. La explosión de un fuego artificial genera, a nivel del suelo, una intensidad sonora de 75 dB. Si se coloca el doble de pólvora, se duplicará la energía generada. ¿Cuál será el nuevo nivel de intensidad sonora que se detectará a nivel del suelo?

Si la energía generada es el doble, la intensidad emitida también será el doble. Para la explosión inicial:

$$\beta_1 = 10 \cdot \log \frac{I_1}{I_0}$$

Para la segunda explosión, más energética:

$$\beta_2 = 10 \cdot \log \frac{I_2}{I_0}$$

Si restamos ambas ecuaciones:

$$\beta_2 - \beta_1 = 10 \cdot \log \frac{I_2}{I_0} - 10 \cdot \log \frac{I_1}{I_0} = 10 \cdot \left(\log \frac{I_2}{I_0} - \log \frac{I_1}{I_0} \right) \rightarrow \beta_2 - \beta_1 = 10 \cdot \log \left(\frac{\frac{I_2}{\cancel{I_0}}}{\frac{I_1}{\cancel{I_0}}} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \beta_2 - \beta_1 = 10 \cdot \log \frac{I_2}{I_1} = 10 \cdot \log \frac{2 \cdot \cancel{I_1}}{\cancel{I_1}} = 3 \text{ dB} \rightarrow \beta_2 = \beta_1 + 3 \text{ dB} = 75 \text{ dB} + 3 \text{ dB} = 78 \text{ dB}$$

19. Un receptor está situado a 1 m de distancia de un altavoz que emite una potencia de 40 W por igual en todas direcciones. Si se aleja hasta 5 m, ¿cuánto variará la intensidad de la onda sonora que percibe?

La intensidad de la onda recibida disminuye a medida que nos alejamos del foco. La potencia emitida nos dicen que es la misma, por tanto:

$$I=\frac{P}{S}\rightarrow\frac{I_2}{I_1}=\frac{\dfrac{\cancel{P_2}}{S_2}}{\dfrac{\cancel{P_1}}{S_1}}=\frac{S_1}{S_2}=\frac{\cancel{4\pi}\cdot r_1^2}{\cancel{4\pi}\cdot r_2^2}\rightarrow\frac{I_2}{I_1}=\left(\frac{1\text{ m}}{5\text{ m}}\right)^2=0{,}04$$

La intensidad de la onda disminuirá al alejarse 4 m de la posición inicial. De forma que el valor de la intensidad de la onda a 5 m del foco será igual al 4 % de la intensidad a 1 m del foco.

20. Escribe la ecuación de una onda transversal de amplitud 2 cm y frecuencia 10 Hz, que se propaga en el sentido negativo del eje X con una velocidad de 40 m/s.

La ecuación general de una onda tiene esta forma, si se propaga en el sentido negativo del eje X:

$$y(x,t)=A\cdot\text{sen}\left[2\pi\cdot\left(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda}\right)+\theta_0\right]$$

Podemos calcular la longitud de onda a partir de la frecuencia y la velocidad de propagación de la onda:

$$v_p=\frac{\lambda}{T}=\lambda\cdot f\rightarrow\lambda=\frac{v_p}{f}=\frac{40\text{ m/s}}{10\text{ Hz}}=4\text{ m}$$

Y sustituyendo los valores que nos dan, y suponiendo un desfase inicial nulo:

$$y(x,t)=0{,}02\cdot\text{sen}\left[2\pi\cdot\left(10\cdot t+\frac{x}{4}\right)\right]\ (\text{SI})$$

21. Un día de viento las olas del mar tienen 2,5 m de altura y rompen cada 12 s. Sabiendo que la velocidad de las olas es de 30 km/h, determina la ecuación de onda de las olas.

La ecuación general de una onda tiene esta forma:

$$y(x,t)=A\cdot\text{sen}\left[2\pi\cdot\left(\frac{t}{T}\pm\frac{x}{\lambda}\right)+\theta_0\right]$$

Podemos calcular la longitud de onda a partir del periodo y la velocidad de propagación de la onda:

$$v_p=\frac{\lambda}{T}\rightarrow\lambda=v_p\cdot T=30\,\frac{\cancel{\text{km}}}{\cancel{\text{h}}}\cdot\frac{1000\text{ m}}{1\ \cancel{\text{km}}}\cdot\frac{1\ \cancel{\text{h}}}{3600\text{ s}}\cdot 12\text{ s}=100\text{ m}$$

Y sustituyendo los valores que nos dan, y suponiendo que el desfase inicial es nulo porque no nos dan los datos necesarios para su cálculo:

$$y(x,t)=2{,}5\cdot\text{sen}\left[2\pi\cdot\left(\frac{t}{12}\pm\frac{x}{100}\right)\right]\ (\text{SI})$$

22. Una onda armónica transversal se propaga por una cuerda en el sentido positivo del eje X. La onda tiene un periodo de 0,5 s, una longitud de onda de 3,2 m y una amplitud de 0,8 m. Si en el instante inicial $t=0$, la elongación del punto $x=0$ es nula y su velocidad transversal es positiva:

a) Determina la ecuación de la onda y representa la onda en el instante inicial entre $x=0$ y $x=3{,}2$ m.

b) Calcula la velocidad de propagación de la onda.

c) Escribe la velocidad transversal del punto situado en $x=3{,}2$ m en función del tiempo.

a) La ecuación general de la onda que se propaga en el sentido positivo del eje X es la siguiente:

$$y(x,t)=A\cdot \text{sen}\left[2\pi\cdot\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)+\theta_0\right]$$

Con los datos que da el enunciado podemos escribir:

$$y(x,t)=0{,}8\cdot \text{sen}\left[2\pi\cdot\left(\frac{t}{0{,}5}-\frac{x}{3{,}2}\right)+\theta_0\right]\quad \text{(SI)}$$

Como en el instante inicial la elongación del punto con $x=0$ es nula y su velocidad es positiva, podemos calcular, a partir de estas condiciones iniciales, el desfase:

$$0=0{,}8\cdot \text{sen}\left[2\pi\cdot\left(\frac{0}{0{,}5}-\frac{0}{3{,}2}\right)+\theta_0\right]\rightarrow \text{sen}\left[2\pi\cdot\left(\frac{0}{0{,}5}-\frac{0}{3{,}2}\right)+\theta_0\right]=0\rightarrow$$

$$\rightarrow 2\pi\cdot\left(\frac{0}{0{,}5}-\frac{0}{3{,}2}\right)+\theta_0=0+k\cdot\pi\rightarrow\theta_0=0+k\cdot\pi$$

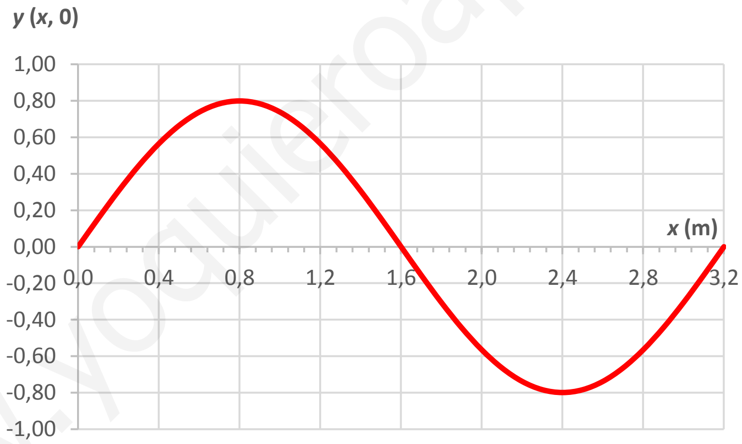
Por tanto, la ecuación de ondas será:

$$y(x,t)=0{,}8\cdot \text{sen}\left[2\pi\cdot\left(\frac{t}{0{,}5}-\frac{x}{3{,}2}\right)\right]$$

Para el instante inicial, $t=0$:

$$y(x,t)=0{,}8\cdot \text{sen}\left[2\pi\cdot\left(\frac{0}{0{,}5}-\frac{x}{3{,}2}\right)\right]=0{,}8\cdot \text{sen}\left[\frac{2\pi\cdot x}{3{,}2}\right]=0{,}8\cdot \text{sen}\left[\frac{2\pi\cdot x}{3{,}2}\right]=0{,}8\cdot \text{sen}\left[\frac{5\pi\cdot x}{8}\right]$$

La representación gráfica sería:



b) La velocidad de propagación viene dada por el cociente entre la longitud de onda y el periodo, sustituyendo valores obtenemos:

$$v_p=\frac{\lambda}{T}=\frac{3{,}2\text{ m}}{0{,}5\text{ s}}=6{,}4\text{ m/s}$$

c) La velocidad se calcula derivando la elongación:

$$v(x,t)=\frac{dy(x,t)}{dt}=\frac{d\left[0{,}8\cdot \text{sen}\left[2\pi\cdot\left(\frac{t}{0{,}5}-\frac{x}{3{,}2}\right)+\theta_0\right]\right]}{dt}=0{,}8\cdot\cos\left[2\pi\cdot\left(\frac{t}{0{,}5}-\frac{x}{3{,}2}\right)+\theta_0\right]\cdot\frac{2\pi}{0{,}5}=$$

$$=3{,}2\pi\cdot\cos\left[2\pi\cdot\left(\frac{t}{0{,}5}-\frac{x}{3{,}2}\right)+\theta_0\right]$$

Si en el instante inicial la elongación del punto con $x=0$ es nula y la velocidad es positiva, es porque el desfase inicial es 0 ($\cos 0=1$; $\cos\pi=-1$).

Particularizando para el punto situado a 3,2 m y sustituyendo el desfase inicial obtenemos:

$$v(t)=3{,}2\pi\cdot\cos\left[2\pi\cdot\left(\frac{t}{0{,}5}-\frac{3{,}2}{3{,}2}\right)\right]=3{,}2\pi\cdot\cos\left[2\pi\cdot\left(\frac{t}{0{,}5}-1\right)\right]\ \ \text{(SI)}$$

23. Una cuerda oscila con un MAS realizando 80 oscilaciones en 20 segundos, de 20 cm amplitud. La cuerda mide 8 m, y la perturbación tarda 0,5 s en ir de un extremo a otro. Si en el instante inicial el extremo de la cuerda está en su posición de equilibrio y la onda se desplaza en el sentido positivo del eje X:

a) Escribe la ecuación de la onda.

b) Calcula la distancia entre dos puntos consecutivos que se encuentren: en fase y en oposición de fase.

c) Calcula la velocidad de oscilación de un punto de la cuerda que se encuentre a 6 m del extremo, 6 s después de que se inicie la perturbación.

a) La ecuación general de una onda que avanza en el sentido positivo del eje X tiene esta forma:

$$y(x,t)=A\cdot\text{sen}\left[2\pi\cdot\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)+\theta_0\right]$$

Si la onda realiza 80 oscilaciones en 20 s, aplicando la definición de la frecuencia obtenemos:

$$f=\frac{\text{N.º de oscilaciones}}{t}=\frac{80}{20\ \text{s}}=4\ \text{Hz}$$

Por tanto, el periodo es:

$$T=\frac{1}{f}=\frac{1}{4\ \text{Hz}}=0{,}25\ \text{s}$$

La velocidad de propagación de la onda también puede deducirse a partir de los datos del enunciado:

$$v_\text{p}=\frac{L_\text{Cuerda}}{t_\text{Empleado}}=\frac{8\ \text{m}}{0{,}5\ \text{s}}=16\ \text{m/s}$$

Y entonces, por definición de la velocidad de propagación, podemos conocer la longitud de onda:

$$v_\text{p}=\frac{\lambda}{T}\rightarrow\lambda=v_\text{p}\cdot T=16\ \text{m/s}\cdot 0{,}25\ \text{s}=4\ \text{m}$$

Ya tenemos todas las magnitudes necesarias para escribir la ecuación de la onda:

$$y(x,t)=0{,}2\cdot\text{sen}\left[2\pi\cdot\left(\frac{t}{0{,}25}-\frac{x}{4}\right)+\theta_0\right]\ \ \text{(SI)}$$

b) Si dos puntos consecutivos están en fase se cumple:

$$\theta_2-\theta_1=\left|2\pi\cdot\left(\frac{t}{0{,}25}-\frac{x_2}{4}\right)\right|-\left|2\pi\cdot\left(\frac{t}{0{,}25}-\frac{x_1}{4}\right)\right|=2\pi$$

De aquí obtenemos el valor de la distancia entre los puntos:

$$\left|\left(\frac{t}{0{,}25}-\frac{x_2}{4}\right)\right|-\left|\left(\frac{t}{0{,}25}-\frac{x_1}{4}\right)\right|=1\rightarrow\left|\frac{x_1}{4}-\frac{x_2}{4}\right|=1\rightarrow|x_1-x_2|=4\ \text{m}$$

Si dos puntos consecutivos están en oposición de fase, se cumple:

$$\theta_2-\theta_1=\left|2\pi\cdot\left(\frac{t}{0{,}25}-\frac{x_2}{4}\right)\right|-\left|2\pi\cdot\left(\frac{t}{0{,}25}-\frac{x_1}{4}\right)\right|=\pi$$

En este caso, la distancia entre los puntos será:

$$\left|\left(\frac{t}{0{,}25}-\frac{x_2}{4}\right)\right|-\left|\left(\frac{t}{0{,}25}-\frac{x_1}{4}\right)\right|=\frac{1}{2}\rightarrow\left|\frac{x_1}{4}-\frac{x_2}{4}\right|=\frac{1}{2}\rightarrow|x_1-x_2|=2\ \text{m}$$

c) La velocidad de oscilación de un punto de la cuerda se calcula derivando la ecuación de la elongación de la onda:

$$v(x,t)=\frac{dy(x,t)}{dt}=\frac{d\left[0{,}2\cdot \text{sen}\left[2\pi\cdot\left(\frac{t}{0{,}25}-\frac{x}{4}\right)+\theta_0\right]\right]}{dt}=$$
$$=0{,}2\cdot\cos\left[2\pi\cdot\left(\frac{t}{0{,}25}-\frac{x}{4}\right)+\theta_0\right]\cdot\frac{2\pi}{0{,}25}=1{,}6\pi\cdot\cos\left[2\pi\cdot\left(\frac{t}{0{,}25}-\frac{x}{4}\right)+\theta_0\right]$$

Para el punto pedido en el enunciado:

$$v=1{,}6\pi\cdot\cos\left[2\pi\cdot\left(\frac{6}{0{,}25}-\frac{6}{4}\right)\right]=1{,}6\pi\cdot\underbrace{\cos(45\pi)}_{-1}=-5{,}03\text{ m/s}$$

24. Se propaga por una cuerda una onda transversal sinusoidal en el sentido positivo del eje X con una velocidad de 40 m/s, una frecuencia de 20 Hz, una amplitud de 10 cm y una fase inicial nula. Calcula:

a) La ecuación de la onda.

b) La velocidad con la que vibra en el instante $t = 0{,}15$ s, en un punto de la cuerda $x = 20$ cm.

c) La distancia entre dos puntos cuya diferencia de fase en un determinado instante es $\pi/6$ rad.

a) La ecuación general de una onda que avanza en el sentido positivo del eje X tiene esta forma:

$$y(x,t)=A\cdot\text{sen}\left[2\pi\cdot\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)+\theta_0\right]$$

A partir de la frecuencia podemos determinar el periodo:

$$T=\frac{1}{f}=\frac{1}{20\text{ Hz}}=0{,}05\text{ s}$$

Podemos deducir fácilmente la longitud de onda, a partir de la definición de la velocidad de propagación:

$$v_p=\lambda\cdot f\rightarrow\lambda=\frac{v_p}{f}=\frac{40\text{ m/s}}{20\text{ Hz}}=2\text{ m}$$

Como nos dicen que la fase inicial es nula, la ecuación de la onda es:

$$y(x,t)=0{,}1\cdot\text{sen}\left[2\pi\cdot\left(\frac{t}{0{,}05}-\frac{x}{2}\right)\right]\quad\text{(SI)}$$

b) La velocidad de vibración se calcula derivando la ecuación de la onda:

$$v(x,t)=\frac{dy(x,t)}{dt}=\frac{d\left[0{,}1\cdot\text{sen}\left[2\pi\cdot\left(\frac{t}{0{,}05}-\frac{x}{2}\right)\right]\right]}{dt}=$$
$$=0{,}1\cdot\cos\left[2\pi\cdot\left(\frac{t}{0{,}05}-\frac{x}{2}\right)\right]\cdot\frac{2\pi}{0{,}05}=4\pi\cdot\cos\left[2\pi\cdot\left(\frac{t}{0{,}05}-\frac{x}{4}\right)\right]$$

Sustituyendo el instante y la posición indicados en el enunciado:

$$v=4\pi\cdot\cos\left[2\pi\cdot\left(\frac{0{,}15}{0{,}05}-\frac{0{,}2}{2}\right)\right]=10{,}17\text{ m/s}$$

c) Si la diferencia de fase entre dos puntos es $\pi/6$:

$$\theta_2-\theta_1=\left|2\pi\cdot\left(\frac{t}{0{,}05}-\frac{x_2}{2}\right)\right|-\left|2\pi\cdot\left(\frac{t}{0{,}05}-\frac{x_1}{2}\right)\right|=\frac{\pi}{6}\rightarrow$$
$$\rightarrow\left|\left(\frac{t}{0{,}05}-\frac{x_2}{2}\right)\right|-\left|\left(\frac{t}{0{,}05}-\frac{x_1}{2}\right)\right|=\frac{1}{12}\rightarrow\left|\frac{x_1}{2}-\frac{x_2}{2}\right|=\frac{1}{12}\rightarrow|x_1-x_2|=\frac{2}{12}\text{ m}=0{,}1\widehat{6}\text{ m}$$

25. Justifica si las siguientes afirmaciones referidas a la energía de un movimiento ondulatorio son verdaderas o falsas:

a) Es inversamente proporcional a la frecuencia de la onda.

b) Es proporcional al cuadrado de la amplitud de la onda.

a) Falsa. Es directamente proporcional.

b) Verdadera.

26. Suponemos que se produce una onda armónica al lanzar una piedra a la superficie de un estanque. Su amplitud:

a) Disminuye con la distancia al foco.

b) Disminuye con la raíz cuadrada de la distancia al foco.

c) Disminuye con el cuadrado de la distancia al foco.

Se trata de una onda bidimensional. Por tanto, la amplitud de la onda en un punto es inversamente proporcional a la raíz de la distancia al foco. Por tanto, la b).

27. Supongamos que un altavoz produce una onda armónica en un espacio abierto. Su intensidad:

a) Disminuye con la distancia al foco.

b) Disminuye con la raíz cuadrada de la distancia al foco.

c) Disminuye con el cuadrado de la distancia al foco.

El sonido es una onda tridimensional. Por tanto, la intensidad disminuye con la distancia al foco. Por tanto, la respuesta correcta es la a).

28. Razona si es verdadera o falsa la siguiente afirmación:

«Las ondas reflejada y refractada tienen igual frecuencia, igual longitud de onda y diferente amplitud que la onda incidente».

Falsa. La onda reflejada tiene la misma amplitud también que la onda incidente.

29. ¿Qué condición ha de cumplirse para que se produzca la difracción de una onda a través de una rendija?

Que las dimensiones de la rendija sean del mismo orden de magnitud que la longitud de onda.

30. Dos ondas en fase con la misma amplitud *A*, frecuencia *f* y longitud de onda λ se propagan a la misma velocidad v_p, interfiriendo en un punto P que está a una distancia λ m del foco de una de las ondas y a 3λ m del foco de la otra onda. Deduce la amplitud resultante en el punto P.

La onda resultante será el resultado de la interferencia de ambas ondas. Por tanto:

$$y = y_A + y_B = A_A \cdot \text{sen}[\omega_A \cdot t - k_A \cdot x_A + \theta_{0A}] + A_B \cdot \text{sen}[\omega_B \cdot t - k_B \cdot x_B + \theta_{0B}]$$

La amplitud, la frecuencia y la longitud de onda es la misma para ambas ondas. Por tanto, ambas ondas tendrán también igual periodo, con lo cual podemos escribir:

$$y = y_A + y_B = A \cdot \text{sen}[\omega \cdot t - k \cdot x_A + \theta_{0A}] + A \cdot \text{sen}[\omega \cdot t - k \cdot x_B + \theta_{0B}]$$

En el punto P las distancias x_A y x_B son λ y 3λ, respectivamente. Suponemos un desfase inicial nulo. Entonces podemos escribir:

$$y = y_A + y_B = A \cdot \text{sen}[\omega \cdot t - k \cdot \lambda] + A \cdot \text{sen}[\omega \cdot t - k \cdot 3 \cdot \lambda]$$

Utilizando la siguiente relación trigonométrica para la suma de los senos de dos ángulos:

$$\text{sen}\,\alpha + \text{sen}\,\beta = 2\cdot\text{sen}\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Podemos escribir:

$$y = A\cdot\left[\text{sen}(\omega\cdot t - k\cdot\lambda) + \text{sen}(\omega\cdot t - k\cdot 3\cdot\lambda)\right] =$$

$$= A\cdot\text{sen}\frac{(\omega\cdot t - k\cdot\lambda)+(\omega\cdot t - k\cdot 3\cdot\lambda)}{2}\cdot\cos\frac{(\cancel{\omega\cdot t} - k\cdot\lambda)-(\cancel{\omega\cdot t} - k\cdot 3\cdot\lambda)}{2} =$$

$$= A\cdot\cos\left(\frac{\cancel{2}\cdot k\cdot\lambda}{\cancel{2}}\right)\cdot\text{sen}\left(\frac{\cancel{2}\cdot(\omega\cdot t - 2\cdot k\cdot\lambda)}{\cancel{2}}\right) = \underbrace{A\cdot\cos\left(\frac{2\pi}{\cancel{\lambda}}\cdot\cancel{\lambda}\right)}_{A'=A}\cdot\text{sen}\left(\omega\cdot t - 2\cdot\frac{2\pi}{\cancel{\lambda}}\cdot\cancel{\lambda}\right)$$

Como cos $(2\pi) = 1$, la amplitud de la onda resultante, A', en el punto P es igual a la amplitud de las ondas que interfieren, A.

31. El oído humano es capaz de percibir sonidos cuyas frecuencias están comprendidas entre 20 Hz y 20 kHz. Calcula a qué longitudes de onda equivalen.

Dato: $v_{\text{p sonido en el aire}} = 340$ m/s.

La velocidad del sonido nos permite relacionar las frecuencias y las longitudes de onda.

- $f_1 = 20\text{ Hz}: v_p = \lambda_1\cdot f_1 \rightarrow \lambda_1 = \frac{v_p}{f_1} = \frac{340\text{ m/s}}{20\text{ Hz}} = 17\text{ m}$
- $f_2 = 20000\text{ Hz}: v_p = \lambda_2\cdot f_2 \rightarrow \lambda_2 = \frac{v_p}{f_2} = \frac{340\text{ m/s}}{20000\text{ Hz}} = 0{,}017\text{ m} = 1{,}7\text{ cm}$

32. Un tren se acerca hacia nosotros silbando. Explica cómo varía la frecuencia del sonido del silbido que recibimos respecto a la emitida por el tren.

Como el tren se acerca hacia nosotros, la frecuencia que percibimos será algo mayor que la frecuencia emitida por el tren. Es decir, un observador quieto percibirá un sonido más agudo que uno que vaya moviéndose en el tren.

33. Dentro de un tubo lleno de gas a 30 °C se propaga en el sentido positivo del eje X un sonido de 0,30 kHz.

a) Calcula la longitud de onda y escribe la ecuación de onda unidimensional suponiendo una amplitud A_0.

b) ¿A qué velocidad se propagaría el sonido si el gas se enfriase 17 °C?

Dato: $v_{\text{p sonido en el gas a 30 °C}} = 350$ m/s.

a) La velocidad del sonido nos permite calcular la longitud de onda:

$$v_p = \lambda\cdot f \rightarrow \lambda = \frac{v_p}{f} = \frac{350\text{ m/s}}{0{,}30\ \cancel{\text{kHz}}\cdot\frac{1000\text{ Hz}}{1\ \cancel{\text{kHz}}}} = 1{,}1\widehat{6}\text{ m}$$

El periodo es la inversa de la frecuencia:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{300\text{ Hz}} = 3{,}\widehat{3}\cdot 10^{-3}$$

Entonces la ecuación de la onda se puede escribir así:

$$y(x,t) = A\cdot\text{sen}\left[2\pi\cdot\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)\right] \rightarrow y(x,t) = A_0\cdot\text{sen}\left[2\pi\cdot\left(300\cdot t - \frac{x}{1{,}1\widehat{6}}\right)\right]\ \text{(SI)}$$

b) La velocidad del sonido en al aire varía con la temperatura de la siguiente manera:

$$v\,(\text{m/s}) = 331{,}4 + 0{,}6\cdot T\ (°\text{C})$$

Por tanto, a 13 °C:

$$v\,(\text{m/s}) = 331{,}4 + 0{,}6 \cdot 13 = 339{,}2 \text{ m/s}$$

34. Un altavoz emite sonido y se percibe con una sonoridad de 30 dB a una distancia *d* del mismo. Determina:

a) El factor en el que debe incrementarse la distancia al altavoz para que el sonido se perciba con 25 dB.

b) El factor en el que debe incrementarse la potencia para que a la distancia *d* el sonido se perciba con 35 dB.

Dato: umbral de audición, $I_0 = 10^{-12}$ W · m^{-2}.

a) Escribimos la ecuación que liga el nivel de intensidad sonora con la intensidad del sonido. Para una distancia $d_1 = d$:

$$\beta_1 = 10 \cdot \log \frac{I_1}{I_0}$$

Para una distancia d_2:

$$\beta_2 = 10 \cdot \log \frac{I_2}{I_0}$$

Restando ambas ecuaciones:

$$\beta_1 - \beta_2 = 10 \cdot \left(\log \frac{I_1}{I_0} - \log \frac{I_2}{I_0} \right) = 10 \cdot \log \frac{\frac{I_1}{I_0}}{\frac{I_2}{I_0}} = 10 \cdot \log \frac{I_1}{I_2} \rightarrow \frac{\beta_1 - \beta_2}{10} = \log \frac{I_1}{I_2} \rightarrow 10^{\frac{\beta_1 - \beta_2}{10}} = \frac{I_1}{I_2}$$

Ahora tenemos en cuenta que como el sonido es una onda tridimensional, la intensidad disminuye con la distancia. Por tanto:

$$10^{\frac{\beta_1 - \beta_2}{10}} = \frac{I_1}{I_2} = \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^2 \rightarrow r_2 = \sqrt{10^{\frac{\beta_1 - \beta_2}{10}}} \cdot r_1 = \sqrt{10^{\frac{30-25}{10}}} \cdot d = 1{,}78 \cdot d$$

Es decir, la distancia debe multiplicarse por 1,78.

b) Procedemos análogamente. Pero en este caso sabemos la relación entre la intensidad y la potencia de una onda tridimensional:

$$I = \frac{P}{S}$$

Es decir, la intensidad y la potencia son proporcionales, por lo que el factor pedido es el mismo para la potencia y para la intensidad. Usando la expresión obtenida en el apartado anterior:

$$10^{\frac{\beta_1 - \beta_2}{10}} = \frac{I_1}{I_2} \rightarrow I_2 = \frac{I_1}{10^{\frac{\beta_1 - \beta_2}{10}}} = \frac{1}{10^{\frac{\beta_1 - \beta_2}{10}}} \cdot I_1 = \frac{1}{10^{\frac{30-35}{10}}} \cdot I_1 \rightarrow I_2 = 3{,}16 \cdot I_1$$

Este es el factor en el que debe incrementarse también la potencia de la onda:

$$P_2 = 3{,}16 \cdot P_1$$

35. En un partido de la Copa de Sudáfrica había mil aficionados soplando simultáneamente la vuvuzela. Suponemos que todos se encontraban a 200 m del centro del campo, y que cada uno de ellos producía un sonido de 233 Hz y 0,1 W de potencia. Calcula:

a) La longitud de onda del sonido.

b) La intensidad del sonido en el centro del campo producida por un aficionado.

c) El nivel de intensidad acústica total (por los mil aficionados) registrado en el centro del campo.

Datos: $I_0 = 10^{-12}$ W /m^2; $v_{\text{Sonido}} = 340$ m/s.

a) La longitud de onda puede calcularse a partir de la frecuencia y la velocidad del sonido.

$$v_p = \lambda \cdot f \rightarrow \lambda = \frac{v_p}{f} = \frac{340\ \text{m/s}}{233\ \text{Hz}} = 1{,}46\ \text{m}$$

b) La intensidad del sonido disminuye con la distancia. En una onda tridimensional como el sonido la intensidad es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia:

$$I = \frac{P}{S} = \frac{P}{4\pi \cdot r^2} = \frac{0{,}1\ \text{W}}{4\pi \cdot (200\ \text{m})^2} = 1{,}99 \cdot 10^{-7}\ \text{W/m}^2$$

c) El nivel de intensidad acústica total se obtiene sumando las contribuciones de todos los aficionados. La potencia total será la suma de las potencias de cada aficionado. Entonces:

$$I_T = \frac{P_T}{S} = \frac{1000 \cdot 0{,}1\ \text{W}}{4\pi \cdot (200\ \text{m})^2} = 1{,}99 \cdot 10^{-4}\ \text{W/m}^2$$

Y ahora podemos calcular el nivel de intensidad acústica:

$$\beta = 10 \cdot \log \frac{I_T}{I_0} = 10 \cdot \log \frac{1{,}99 \cdot 10^{-4}\ \text{W/m}^2}{10^{-12}\ \text{W/m}^2} = 83\ \text{dB}$$

36. Una onda transversal se propaga por una cuerda tensa fija por sus extremos con una velocidad de 80 m/s, y al reflejarse se forma el cuarto armónico de una onda estacionaria cuya ecuación es:

$$y = 0{,}12 \cdot \text{sen}\,(k \cdot x) \cdot \cos\,(\omega \cdot t)\ \text{(SI)}$$

a) Si la longitud de la cuerda tensa es 8 m, calcula el número de ondas k, la frecuencia angular ω y la frecuencia de la onda.

b) Calcula la máxima elongación de un punto situado a 0,5 m de un extremo de la cuerda. ¿Cuál es la aceleración máxima que experimenta ese punto?

c) Calcula y explica brevemente qué frecuencia debería tener la onda transversal que se propaga por la cuerda a 80 m/s para que se formase el segundo armónico en lugar del cuarto.

a) La longitud de onda correspondiente al cuarto armónico se puede expresar en función de la longitud de la cuerda:

$$\lambda = \frac{2 \cdot L}{4} = \frac{2 \cdot 8\ \text{m}}{4} = 4\ \text{m}$$

El número de ondas es:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{4\ \text{m}} = \frac{\pi}{2}\ \text{m}^{-1}$$

La frecuencia se puede conocer, puesto que también sabemos cuál es la velocidad de propagación de la onda:

$$v_p = \lambda \cdot f \rightarrow f = \frac{v_p}{\lambda} = \frac{80\ \text{m/s}}{4\ \text{m}} = 20\ \text{Hz}$$

La frecuencia angular es:

$$\omega = 2\pi \cdot f = 2\pi \cdot 20\ \text{Hz} = 40\pi\ \text{rad/s}$$

b) Sustituyendo los valores obtenidos en el apartado anterior en la expresión de la onda estacionaria obtenemos:

$$y(x, t) = 0{,}12 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right) \cdot \cos(40\pi \cdot t)$$

La máxima elongación se produce cuando el coseno vale 1. Para un punto situado a una distancia de 0,5 m:

$$y_{\text{máx.}} = 0{,}12 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} \cdot 0{,}5\right) \cdot \underbrace{\cos(40\pi \cdot t)}_{1,\ \text{si}\ y_{\text{máx.}}} = 0{,}12 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot 1 = 0{,}12 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 8{,}49 \cdot 10^{-2}\ \text{m}$$

Derivamos la ecuación del enunciado con respecto al tiempo para obtener la expresión de la velocidad:

$$v(x,t)=\frac{dy(x,t)}{dt}=\frac{d\left[0{,}12\cdot \text{sen }(k\cdot x)\cdot \cos(\omega\cdot t)\right]}{dt}=-0{,}12\cdot \text{sen }(k\cdot x)\cdot \omega\cdot \text{sen}(\omega\cdot t)$$

Derivamos de nuevo con respecto al tiempo para obtener el valor de la aceleración:

$$a(x,t)=\frac{dv(x,t)}{dt}=\frac{d\left[-0{,}12\cdot \text{sen }(k\cdot x)\cdot \omega\cdot \text{sen}(\omega\cdot t)\right]}{dt}=-0{,}12\cdot \text{sen }(k\cdot x)\cdot \omega^2\cdot \cos(\omega\cdot t)$$

La aceleración será máxima cuando la función coseno valga 1. Sustituyendo valores:

$$\left|a_{\text{máx.}}\right|=\left|-0{,}12\cdot \text{sen }(k\cdot x)\cdot \omega^2\right|=\left|-0{,}12\cdot \text{sen }\left(\frac{\pi}{2}\cdot 0{,}5\right)\cdot (40\pi)^2\right|=0{,}12\cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot (40\pi)^2=1339{,}9\text{ m/s}^2$$

c) Para que se formase el segundo armónico, la longitud de onda debería ser:

$$\lambda_2=\frac{2\cdot L}{2}=\frac{2\cdot 8\text{ m}}{2}=8\text{ m}$$

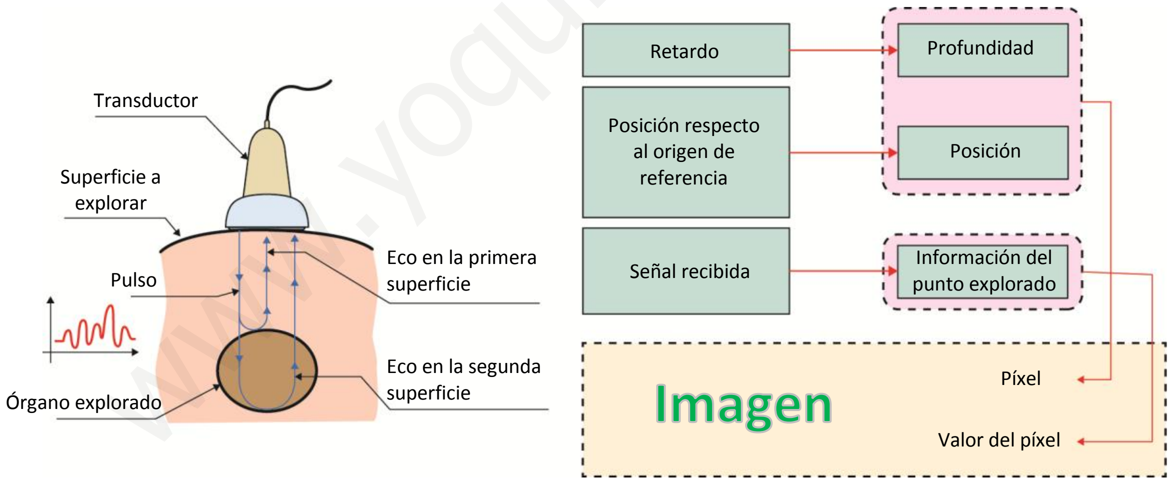
Y la frecuencia valdría entonces:

$$v_p=\lambda\cdot f\rightarrow f_2=\frac{v_p}{\lambda_2}=\frac{80\text{ m/s}}{8\text{ m}}=10\text{ Hz}$$

FÍSICA EN TU VIDA

1. Explica con un esquema sencillo cómo se forman las imágenes en un ecógrafo.

En el ecógrafo el transductor emite ondas sonoras (ultrasonidos) que penetran y se reflejan en el interior del organismo. A continuación se reflejan en los tejidos internos y vuelven al ecógrafo. Midiendo el tiempo que tardan en recibirse las ondas sonoras reflejadas se puede conocer la velocidad del sonido en el interior de los tejidos atravesados, lo que sirve para poder formar imágenes, pues se sabe que las ondas sonoras se transmiten con más velocidad en unos tejidos que en otros.



2. ¿Cómo influye la diferente velocidad de los ultrasonidos en distintos tejidos a la hora de formar las imágenes en un ecógrafo?

La diferente velocidad de los ultrasonidos permite detectar en qué punto se encuentran la superficie que separa un tejido de otro, lo que se puede convertir luego en una imagen.

3. ¿Qué ventajas aporta la ecografía frente a otras técnicas de diagnóstico por imagen?

Es una técnica inocua, por lo que resulta muy útil para diagnósticos prenatales. Otras técnicas ofrecen imágenes más detalladas, pero causan daños en los tejidos del paciente, como la radiografía, que emplea radiación electromagnética de elevada energía: los rayos X.

4. ¿Qué imágenes aparecerán más contrastadas en una ecografía, aquellas que muestran huesos y grasa o aquellas que muestran músculos y grasa?

Las que muestran huesos y grasa, pues la diferencia entre la velocidad de los ultrasonidos en este caso es mayor que para los músculos y grasa.

5. Las ecografías pueden emplearse para detectar malformaciones en embriones y fetos, y también para conocer el sexo del futuro bebé, aunque hay padres que prefieren no saber el sexo del bebé antes de que nazca. ¿Cuál es tu opinión?

Respuesta personal.

PROYECTO SABER HACER

6

Ondas electromagnéticas

SANTILLANA

Ondas electromagnéticas

6

PARA COMENZAR

- **¿Qué zona del cielo aparece más clara en la imagen?**

  Aparece más clara la zona del cielo que está en el interior del arcoíris.

- **Pon ejemplos de otras situaciones que permiten observar todos los colores que contiene la luz blanca. ¿Se produce refracción de la luz?**

  Por ejemplo, cuando hay una burbuja de jabón donde se refleja la luz, en la superficie de un disco compacto, en una mancha de aceite en el suelo.

ACTIVIDADES

1. Un radar emite una onda de radio de 6 · 10^{7} Hz.

a) ¿Qué diferencia existe entre esa onda y una onda sonora de la misma longitud de onda? Determina la frecuencia de esta última.

b) Si la onda emitida por el radar tarda 3 · 10^{-6} s en volver al detector después de reflejarse en un obstáculo. ¿A qué distancia se encuentra el obstáculo?

Datos: $c = 3 \cdot 10^8$ m · s^{-1}; $v_{\text{sonido}} = 340$ m · s^{-1}.

a) La onda que emite el radar es una onda electromagnética. A diferencia de la onda sonora, la onda del radar es una onda transversal. Además, puede transmitirse en el vacío, y su velocidad de propagación es la velocidad de la luz, mientras que la onda sonora se propaga a una velocidad mucho menor. Por tanto, como la longitud de onda de ambas ondas es la misma, la frecuencia de la onda electromagnética es mucho mayor que la frecuencia de la onda sonora. Y entonces el periodo de la onda electromagnética será mucho menor que el periodo de la onda sonora.

La frecuencia de la onda sonora se calcula así:

$$v_{\text{sonido}} = \lambda \cdot f \rightarrow f = \frac{v_{\text{sonido}}}{\lambda}$$

La longitud de onda de la onda sonora es la misma que la de la onda de radar. Por tanto:

$$v_{\text{sonido}} = \lambda \cdot f \rightarrow f = \frac{v_{\text{sonido}}}{\lambda} = \frac{v_{\text{sonido}}}{\dfrac{c}{f_{\text{radar}}}} = \frac{v_{\text{sonido}} \cdot f_{\text{radar}}}{c} = \frac{340\ \text{m/s} \cdot 6 \cdot 10^7\ \text{Hz}}{3 \cdot 10^8\ \text{m/s}} = 68\ \text{Hz}$$

b) La distancia que recorre la onda es el doble de la distancia al obstáculo. Como la onda de radar se propaga a la velocidad de la luz:

$$c = \frac{2 \cdot d}{t} \rightarrow d = \frac{c \cdot t}{2} = \frac{3 \cdot 10^8\ \text{m/s} \cdot 3 \cdot 10^{-6}\ \text{s}}{2} = 450\ \text{m}$$

2. Un rayo de luz que viaja por el aire incide con un ángulo de 60° sobre una placa de ámbar. Si el ángulo de refracción es de 35°, calcula cuál debe ser la velocidad de propagación de la luz en el ámbar.

Dato: $c = 3 \cdot 10^8$ m/s.

A partir del ángulo de refracción podemos calcular el índice de refracción en el ámbar. Aplicando la ley de Snell:

$$n_{\text{aire}} \cdot \text{sen}\ \hat{i} = n_{\text{ámbar}} \cdot \text{sen}\ \hat{r} \rightarrow n_{\text{ámbar}} = \frac{n_{\text{aire}} \cdot \text{sen}\ \hat{i}}{\text{sen}\ \hat{r}} = \frac{1 \cdot \text{sen}\ 60^\circ}{\text{sen}\ 35^\circ} = 1{,}51$$

Y a partir de este valor y de la definición del índice de refracción de un medio como el cociente entre el valor de la velocidad de la luz en el vacío y la velocidad de la luz en ese medio, podemos conocer el valor de la velocidad de la luz en el ámbar:

$$v_{\text{ámbar}} = \frac{c}{n_{\text{ámbar}}} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{1{,}51} = 1{,}99 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

3. **Una lámpara de sodio emite luz amarilla por una fibra óptica de cuarzo cuyo índice de refracción es $n = 1{,}4580$. Si la longitud de onda de la luz en el vacío es $589 \cdot 10^{-9}$ m, calcula la longitud de onda y la velocidad de propagación a través de la fibra óptica.**

Dato: $c = 3 \cdot 10^8$ m/s.

La velocidad de propagación a través de la fibra óptica se calcula fácilmente a partir de la definición del índice de refracción:

$$v_{\text{fibra}} = \frac{c}{n_{\text{fibra}}} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{1{,}4580} = 2{,}058 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

La longitud de la onda de la luz en el vacío nos permite conocer la frecuencia en el vacío:

$$c = \lambda_{\text{vacío}} \cdot f_{\text{vacío}} \rightarrow f_{\text{vacío}} = \frac{c}{\lambda_{\text{vacío}}} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{589 \cdot 10^{-9} \text{ m}} = 5{,}09 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$$

La energía depende de la frecuencia. Y como la energía se conserva al pasar del vacío a la fibra, la frecuencia no cambiará. Por tanto, la frecuencia en la fibra es la misma que la frecuencia en el vacío, lo que nos permite conocer la longitud de onda de la onda en la fibra:

$$v_{\text{fibra}} = \lambda_{\text{fibra}} \cdot f_{\text{fibra}} \rightarrow \lambda_{\text{fibra}} = \frac{v_{\text{fibra}}}{f_{\text{fibra}}} = \frac{v_{\text{fibra}}}{f_{\text{vacío}}} = \frac{2{,}058 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{5{,}09 \cdot 10^{14} \text{ Hz}} = 4{,}04 \cdot 10^{-7} \text{ m}$$

4. **Un rayo incide sobre la superficie de separación de dos medios, produciéndose reflexión y refracción. Si el ángulo de reflexión es de 30°, el de refracción de 40° y $n_1 = 1{,}3$, calcula el índice de refracción del segundo medio n_2. ¿Cuál debería ser el ángulo de incidencia para el que se produzca reflexión total?**

Teniendo en cuenta que el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión, aplicamos la ley de Snell para conocer el índice de refracción del segundo medio:

$$n_1 \cdot \text{sen } \hat{i} = n_2 \cdot \text{sen } \hat{r} \rightarrow n_2 = \frac{n_1 \cdot \text{sen } \hat{i}}{\text{sen } \hat{r}} = \frac{1{,}3 \cdot \text{sen } 30^\circ}{\text{sen } 40^\circ} = 1{,}01$$

La reflexión total se produce cuando no hay rayo refractado; es decir, el ángulo límite corresponde al caso en que el ángulo de refracción es de 90°. Aplicamos de nuevo la ley de Snell:

$$n_1 \cdot \text{sen } \hat{i}_{\text{lím.}} = n_2 \cdot \text{sen } 90^\circ \rightarrow \text{sen } \hat{i}_{\text{lím.}} = \frac{n_2 \cdot \text{sen } 90^\circ}{n_1} = \frac{1{,}01 \cdot 1}{1{,}3} = 0{,}777 \rightarrow \hat{i}_{\text{lím.}} = 50{,}98^\circ$$

5. **Un bloque de vidrio se sumerge en agua. Si los índices de refracción son $n_{\text{vidrio}} = 1{,}50$ y $n_{\text{agua}} = 1{,}33$, ¿cuál será el ángulo límite en la separación agua-vidrio?**

Como en el caso anterior, aplicamos la ley de Snell particularizando para el caso en que el ángulo refractado es de 90°. Para el caso en que la luz pasa del agua al vidrio:

$$n_{\text{agua}} \cdot \text{sen } \hat{i}_{\text{lím.}} = n_{\text{vidrio}} \cdot \text{sen } 90^\circ \rightarrow \text{sen } \hat{i}_{\text{lím.}} = \frac{n_{\text{vidrio}} \cdot \text{sen } 90^\circ}{n_{\text{agua}}} = \frac{1{,}50 \cdot 1}{1{,}33} = 1{,}13 \rightarrow \text{ No existe } \hat{i}_{\text{lím.}}$$

Como la función trigonométrica seno no existe para valores mayores de 1, esto quiere decir que no existe un ángulo límite para esta situación, es decir, no se produce el fenómeno de la reflexión total. Esto ocurre porque la luz se desplaza desde un medio con un índice de refracción menor a un medio con un índice de refracción mayor.

Para el caso en que la luz pasa del vidrio al agua:

$$n_{\text{vidrio}} \cdot \text{sen } \hat{i}_{\text{lím.}} = n_{\text{agua}} \cdot \text{sen } 90^\circ \rightarrow \text{sen } \hat{i}_{\text{lím.}} = \frac{n_{\text{agua}} \cdot \text{sen } 90^\circ}{n_{\text{vidrio}}} = \frac{1{,}33 \cdot 1}{1{,}50} = 0{,}887 \rightarrow \hat{i}_{\text{lím.}} = 62{,}5^\circ$$

6. Un haz de luz se propaga por un medio material a una velocidad $v = 1{,}7 \cdot 10^8$ m · s^{-1} y pasa al aire. Calcula el ángulo a partir del cual se produce reflexión total.

Datos: $c = 3 \cdot 10^8$ m · s^{-1}; $n_{\text{aire}} = 1$.

Primero necesitamos conocer el índice de refracción del medio:

$$n = \frac{c}{v} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{1{,}7 \cdot 10^8 \text{ m/s}} = 1{,}765$$

Se produce reflexión total a partir del ángulo de incidencia que consigue que el ángulo de refracción sea de 90º. Por tanto:

$$n_1 \cdot \text{sen } \hat{i}_{\text{lím.}} = n_2 \cdot \text{sen } 90^\circ \rightarrow \text{sen } \hat{i}_{\text{lím.}} = \frac{n_2 \cdot \text{sen } 90^\circ}{n_1} = \frac{1 \cdot 1}{1{,}765} = 0{,}566 \rightarrow \hat{i}_{\text{lím.}} = 34{,}5^\circ$$

7. Un rayo se propaga por el aire y por un diamante cuyos índices de refracción son, respectivamente, 1,0 y 2,4. Justifica en cuál de dichos medios la luz irá con mayor velocidad, y de cuál de ellos debe partir la luz para que pueda tener lugar el fenómeno de reflexión total.

La luz irá con mayor velocidad por el aire. Cuanto mayor sea el índice de refracción de un medio, más despacio se mueve la luz por dicho medio.

Para que se produzca el fenómeno de la reflexión total la luz debe pasar de un medio a otro con un índice de refracción menor. Por tanto, debe pasar del diamante al aire.

8. Un haz de luz de $4{,}5 \cdot 10^{14}$ s^{-1} de frecuencia incide sobre un vidrio de anchura *d*. Si el ángulo que forma el haz incidente con la normal en el aire es de 30°, halla:

a) La longitud de onda del haz de luz en el aire y en el vidrio.

b) Los ángulos de refracción y reflexión del haz.

Datos: $c = 3 \cdot 10^8$ m/s; $n_{\text{aire}} = 1{,}00$; $n_{\text{vidrio}} = 1{,}50$.

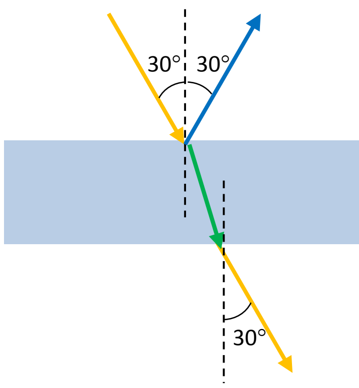
a) La longitud de onda en el aire se calcula fácilmente, pues sabemos cuál es la frecuencia:

$$c = \lambda_{\text{aire}} \cdot f_{\text{aire}} \rightarrow \lambda_{\text{aire}} = \frac{c}{f_{\text{aire}}} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{4{,}5 \cdot 10^{14} \text{ Hz}} = 6{,}67 \cdot 10^{-7} \text{ m}$$

En el vidrio tiene la misma energía que en el aire. Por tanto, la frecuencia en el vidrio es la misma que la frecuencia en el aire.

$$v = \lambda_{\text{vidrio}} \cdot f_{\text{vidrio}} = \lambda_{\text{vidrio}} \cdot f_{\text{aire}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \lambda_{\text{vidrio}} = \frac{v}{f_{\text{aire}}} = \frac{c / n_{\text{vidrio}}}{f_{\text{aire}}} = \frac{\dfrac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{1{,}50}}{4{,}5 \cdot 10^{14} \text{ Hz}} = 4{,}44 \cdot 10^{-7} \text{ m}$$



b) El ángulo de reflexión es igual al ángulo de incidencia. Por tanto, el rayo reflejado forma 30°° con la normal.

Al llegar al vidrio, el rayo de luz se refracta aproximándose a la normal. Pero tras atravesar el espesor del vidrio, se refracta de nuevo, en este caso alejándose de la normal en la misma cuantía en que antes se separó. Por tanto, el rayo refractado emerge del vidrio formando un ángulo de 30° con la normal.

9. Un rayo de luz incide con un ángulo de incidencia de 30° sobre una lámina de vidrio de 4 cm de espesor. La velocidad de propagación de la luz dentro de la lámina es 2/3 la velocidad de la luz en el vacío. Calcula:

a) El índice de refracción de la lámina.

b) El ángulo de refracción del rayo dentro de la lámina y el ángulo de refracción a la salida de la misma.

c) Dibuja la trayectoria seguida por el rayo dentro y fuera de la lámina.

Dato: $c = 3 \cdot 10^8$ m/s.

a) Aplicando la definición del índice de refracción a la lámina de vidrio obtenemos:

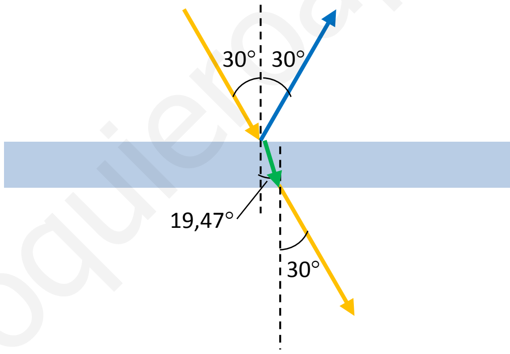
$$n = \frac{c}{v} = \frac{\cancel{c}}{2/3 \cdot \cancel{c}} = \frac{3}{2} = 1{,}5$$

b) El ángulo de refracción dentro de la lámina se calcula aplicando la ley de Snell, donde el medio 1 es el aire y el 2, el vidrio:

$$n_1 \cdot \text{sen}\,\hat{i} = n_2 \cdot \text{sen}\,\hat{r} \rightarrow \text{sen}\,\hat{r} = \frac{n_1 \cdot \text{sen}\,\hat{i}}{n_2} = \frac{1 \cdot \text{sen}\,30°}{1{,}5} = 0{,}\widehat{3} \rightarrow \hat{r} = 19{,}47°$$

A la salida de la lámina el ángulo de refracción es igual al ángulo de incidencia porque al llegar al vidrio, el rayo de luz se refracta aproximándose a la normal. Pero tras atravesar el espesor del vidrio, se refracta de nuevo, en este caso alejándose de la normal en la misma cuantía en que antes se separó. Por tanto, el rayo refractado emerge del vidrio formando con la normal el mismo ángulo con el que incidió en la lámina, es decir, 30°.

c) Respuesta gráfica:



10. Un haz de luz blanca incide desde el aire con un ángulo de 25° en una lámina de vidrio. Las longitudes de onda de las componentes azul y roja de la luz en el aire son, respectivamente, λ(azul) = 486 nm y λ(roja) = 656 nm.

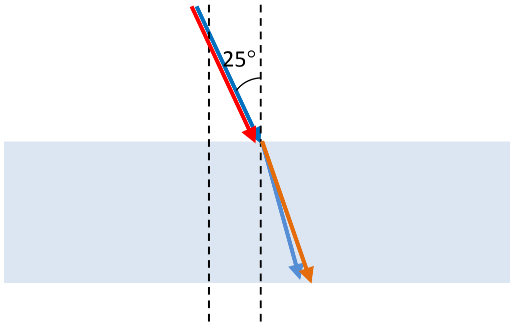
a) Haz un esquema de la trayectoria del haz de luz y calcula el ángulo que forman los rayos azul y rojo.

b) Indica, justificando la respuesta, si los rayos azul y rojo se propagan con la misma velocidad.

c) Calcula la frecuencia y la longitud de onda en el vidrio de la componente roja.

Datos: $c = 3 \cdot 10^8$ m · s^{-1}; $n_{\text{vidrio (azul)}} = 1{,}7$; $n_{\text{vidrio (rojo)}} = 1{,}61$.

a) Dibujamos un esquema de la situación. El índice de refracción es mayor para el rayo azul que para el rayo rojo porque el índice de refracción es inversamente proporcional a la longitud de onda y esta es menor para el rayo azul. Por tanto, como el rayo refractado se acerca más a la normal para el índice de refracción mayor:



Aplicamos la ley de Snell para color. Para la luz azul:

$$n_1 \cdot \text{sen}\,\hat{i} = n_{\text{azul}} \cdot \text{sen}\,\hat{r}_{\text{azul}} \rightarrow \text{sen}\,\hat{r}_{\text{azul}} = \frac{n_1 \cdot \text{sen}\,\hat{i}}{n_{\text{azul}}} = \frac{1 \cdot \text{sen}\,25^\circ}{1{,}7} = 0{,}225 \rightarrow \hat{r}_{\text{azul}} = 14{,}45^\circ$$

Para la luz roja:

$$n_1 \cdot \text{sen}\,\hat{i} = n_{\text{roja}} \cdot \text{sen}\,\hat{r}_{\text{roja}} \rightarrow \text{sen}\,\hat{r}_{\text{roja}} = \frac{n_1 \cdot \text{sen}\,\hat{i}}{n_{\text{roja}}} = \frac{1 \cdot \text{sen}\,25^\circ}{1{,}61} = 0{,}2377 \rightarrow \hat{r}_{\text{roja}} = 15{,}28^\circ$$

Por tanto, el ángulo que forman ambos rayos es:

$$\alpha = \hat{r}_{\text{roja}} - \hat{r}_{\text{azul}} = 15{,}28^\circ - 14{,}45^\circ = 0{,}82^\circ$$

b) Los rayos no se propagan a la misma velocidad, pues el índice de refracción depende del color.

La velocidad es inversamente proporcional al índice de refracción ($n = c/v$). Por tanto, el rayo rojo se propaga a mayor velocidad dentro de la lámina, pues el índice de refracción para la luz roja es menor que para la luz azul.

c) Al pasar del aire al vidrio la energía se conserva. Por tanto, la frecuencia de la luz roja será la misma en el aire y en el vidrio. Calculamos entonces la frecuencia de la luz roja:

$$c = \lambda_{\text{roja aire}} \cdot f_{\text{roja aire}} \rightarrow f_{\text{roja vidrio}} = f_{\text{roja aire}} = \frac{c}{\lambda_{\text{roja aire}}} = \frac{3 \cdot 10^8\ \text{m/s}}{656 \cdot 10^{-9}\ \text{m}} = 4{,}57 \cdot 10^{14}\ \text{Hz}$$

Entonces la longitud de onda de la luz roja en el vidrio será:

$$v_{\text{vidrio}} = \lambda_{\text{roja vidrio}} \cdot f_{\text{roja vidrio}} \rightarrow \lambda_{\text{roja vidrio}} = \frac{v}{f_{\text{roja vidrio}}} = \frac{c\,/\,n_{\text{roja}}}{f_{\text{roja vidrio}}} = \frac{3 \cdot 10^8\ \text{m/s}\,/1{,}61}{4{,}57 \cdot 10^{14}\ \text{Hz}} = 4{,}08 \cdot 10^{-7}\ \text{m}$$

11. Para estudiar la separación entre dos rendijas en una lámina se utiliza un láser de helio-neón que emite una luz roja de 633 nm. Se ilumina la lámina con el láser y se recoge la interferencia en una pantalla situada a 1 m de la lámina. Se observa que el centro de la tercera banda brillante está 47 mm por encima del punto en que incidiría la luz del láser si no estuviese la lámina.

a) Calcula la separación entre las rendijas.

b) Determina la distancia a la que se encontrará el centro de la segunda y la cuarta banda brillante.

a) Cuando se producen interferencias debido al paso de la luz por dos rendijas podemos expresar el valor de la distancia entre las rendijas, d, de esta manera.

$$d = n \cdot \lambda \cdot \frac{L}{y}$$

En este caso $n = 3$, pues nos hablan de la tercera banda brillante. Sustituyendo los datos:

$$d = n \cdot \lambda \cdot \frac{L}{y} = 3 \cdot 633 \cdot 10^{-9}\ \text{m} \cdot \frac{1\ \text{m}}{0{,}047\ \text{m}} = 4{,}04 \cdot 10^{-5}\ \text{m} \simeq 0{,}04\ \text{mm}$$

b) De la expresión anterior podemos despejar la distancia y para cada caso:

$$d = 2 \cdot \lambda \cdot \frac{L}{y_2} \rightarrow y_2 = 2 \cdot \lambda \cdot \frac{L}{d} = 2 \cdot 633 \cdot 10^{-9}\ \text{m} \cdot \frac{1\ \text{m}}{4{,}04 \cdot 10^{-5}\ \text{m}} = 0{,}0313\ \text{m} = 31{,}3\ \text{mm}$$

$$d = 4 \cdot \lambda \cdot \frac{L}{y_4} \rightarrow y_4 = 4 \cdot \lambda \cdot \frac{L}{d} = 4 \cdot 633 \cdot 10^{-9}\ \text{m} \cdot \frac{1\ \text{m}}{4{,}04 \cdot 10^{-5}\ \text{m}} = 0{,}0627\ \text{m} = 62{,}7\ \text{mm}$$

12. Para determinar la longitud de onda de una radiación se la hace pasar por un orificio de 3 mm de diámetro y se recoge el resultado en una pantalla que se ha colocado a 1 m de distancia del orificio. En el centro se observa un disco luminoso que tiene una anchura de 4 mm. ¿Cuál es el valor de la longitud de onda?

En este caso se produce el fenómeno de la difracción. Podemos calcular la distancia del orificio a la que aparecen los mínimos dibujados por las franjas de difracción según esta expresión:

$$y = (2 \cdot n + 1) \cdot \frac{\lambda \cdot L}{a}$$

Donde a es la abertura del orificio.

El primer mínimo determina el límite de la zona central más brillante de la que habla el enunciado. La distancia al centro del orificio es la mitad del diámetro del disco luminoso central. Por tanto:

$$y_0 = (2 \cdot 0 + 1) \cdot \frac{\lambda \cdot L}{a} = \frac{\lambda \cdot L}{a} \rightarrow \lambda = \frac{y_0 \cdot a}{L} = \frac{0{,}002\ \text{m} \cdot 0{,}003\ \text{m}}{1\ \text{m}} = 6 \cdot 10^{-6}\ \text{m}$$

13. Razona acerca de la veracidad o falsedad de esta frase: «El uso de gafas polarizadoras modifica la intensidad de la luz que llega a nuestros ojos, pero no el color de los objetos que observamos».

Es verdadera. Al eliminar las componentes de la onda en alguna de las direcciones, la intensidad total de la onda disminuye, ya que se absorbe la intensidad correspondiente a estas componentes. Sin embargo, en todas las direcciones la luz vibra con la misma frecuencia, por lo que su color no variará.

14. Justifica si la siguiente afirmación es verdadera o falsa: «La luz es una onda electromagnética longitudinal».

Es falsa. La luz es una onda transversal, pues los campos eléctrico y magnético vibran en una dirección perpendicular a la del avance de la onda.

15. Las conexiones inalámbricas wifi de ordenador usan una frecuencia de 2,4 GHz. Una antena wifi tiene un tamaño de un cuarto de la longitud de onda. ¿Cuál es su tamaño en milímetros? Sabiendo que el tamaño de una antena de radio es proporcional a la longitud de onda, si tuviéramos una antena para recibir ondas de UHF para televisión digital terrestre de 800 MHz qué tamaño debería tener.

Datos: $c = 3 \cdot 10^8$ m/s.

A partir del dato de la frecuencia es sencillo calcular la longitud de onda correspondiente:

$$c = \lambda \cdot f \rightarrow \lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8\ \text{m/s}}{2{,}4 \cdot 10^9\ \text{Hz}} = 0{,}125\ \text{m}$$

Si el tamaño de la antena es un cuarto de la longitud de onda:

$$L = \frac{\lambda}{4} = \frac{0{,}125\ \text{m}}{4} = 0{,}03125\ \text{m} = 31{,}25\ \text{mm}$$

Para las ondas UHF:

$$c = \lambda \cdot f \rightarrow \lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{800 \cdot 10^6 \text{ Hz}} = 0{,}375 \text{ m}$$

Por tanto, el tamaño de la antena sería en este caso:

$$L = \frac{\lambda}{4} = \frac{0{,}375 \text{ m}}{4} = 0{,}09375 \text{ m} = 93{,}75 \text{ mm}$$

16. Un haz de luz tiene una longitud de onda de 550 nm. A 5 m del foco, su intensidad luminosa es de 10 W/m².

a) Calcula la energía por segundo que emite ese haz.

b) Calcula la frecuencia de la onda de luz.

Dato: $c = 3 \cdot 10^8$ m/s.

a) Si a esa distancia la intensidad vale lo que nos dice el enunciado, sabemos que la energía emitida por segundo es mayor, pues la energía se va dispersando a medida que nos alejamos del foco. La intensidad es la potencia por unidad de superficie y, la potencia, a su vez, es la energía por unidad de tiempo, por tanto:

$$I = \frac{E}{t \cdot S} \rightarrow \frac{E}{t} = I \cdot S = I \cdot 4\pi \cdot d^2 = 10 \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \cdot 4\pi \cdot (5 \text{ m})^2 = 3141{,}6 \text{ J/s}$$

b) La frecuencia se calcula fácilmente a partir de la longitud de onda.

$$c = \lambda \cdot f \rightarrow f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{550 \cdot 10^{-9} \text{ m}} = 5{,}45 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$$

17. La intensidad media de la luz del Sol en la atmósfera terrestre es de 1390 W/m². ¿Cuál es el máximo de energía que puede captar un panel solar de 1,6 m × 0,80 m en cada hora?

La intensidad nos indica la cantidad de energía que llega por unidad de tiempo y por unidad de superficie. La energía máxima que puede captar un panel se obtiene entonces multiplicando el valor de la intensidad por el tiempo transcurrido y por la superficie expuesta al sol:

$$E = I \cdot t \cdot S = 1390 \frac{\text{J}/\cancel{\text{s}}}{\cancel{\text{m}^2}} \cdot 1 \cancel{\text{h}} \cdot \frac{3600 \cancel{\text{s}}}{1 \cancel{\text{h}}} \cdot \left(1{,}6 \cancel{\text{m}} \cdot 0{,}80 \cancel{\text{m}}\right) = 6{,}4 \cdot 10^6 \text{ J}$$

18. El agua presenta un coeficiente de absorción para la luz roja ($\lambda = 700$ nm) de 0,60 m⁻¹, y para la luz azul-verdosa ($\lambda = 500$ nm) de 0,02 m⁻¹. Supón que un haz de luz blanca recorre un tubo largo recto lleno de agua.

a) ¿Qué distancia debe recorrer la luz para que la intensidad de la luz roja disminuya a la mitad?

b) ¿Qué distancia debe recorrer la luz para que la intensidad de la luz azul-verdosa disminuya a la mitad?

c) Teniendo en cuenta el resultado de los apartados anteriores, justifica el color del agua.

a) La intensidad va disminuyendo a medida que la luz se propaga por el agua según la siguiente expresión:

$$I = I_0 \cdot e^{-\beta \cdot x}$$

Si la intensidad disminuye a la mitad, podemos escribir, para la luz roja:

$$\frac{\cancel{I_0}}{2} = \cancel{I_0} \cdot e^{-\beta_{\text{roja}} \cdot x_{\text{roja}}} \rightarrow \frac{1}{2} = e^{-\beta_{\text{roja}} \cdot x_{\text{roja}}} \rightarrow \ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(e^{-\beta_{\text{roja}} \cdot x_{\text{roja}}}\right) \rightarrow \ln 1 - \ln 2 = -\beta_{\text{roja}} \cdot x_{\text{roja}} \rightarrow$$

$$\rightarrow -\ln 2 = -\beta_{\text{roja}} \cdot x_{\text{roja}} \rightarrow x_{\text{roja}} = \frac{\ln 2}{\beta_{\text{roja}}} = \frac{\ln 2}{0{,}60 \text{ m}^{-1}} = 1{,}155 \text{ m}$$

b) Procedemos análogamente para el caso de la luz azul-verdosa, que tiene un coeficiente de absorción menor que la luz verde:

$$x_{\text{azul-verdosa}} = \frac{\ln 2}{\beta_{\text{azul-verdosa}}} = \frac{\ln 2}{0{,}02\ \text{m}^{-1}} = 34{,}66\ \text{m}$$

c) Como se observa en los apartados anteriores, la luz roja es absorbida antes por el agua. Por este motivo, cuando llega al agua luz blanca, las componentes rojas se absorben más rápidamente y la luz azul se transmite una distancia mayor, lo que ofrece la sensación de que el agua es de color azul-verdoso.

19. Razona por qué la luz procedente de galaxias que se encuentran muy lejos está desplaza hacia el rojo.

Porque las galaxias se están separando de nosotros debido a la expansión del universo. Esto hace que podamos considerar que se mueven a cierta velocidad, alejándose, lo que hace que la longitud de onda de la luz que recibimos de ellas se estire, y por eso la observamos más roja de como fue emitida.

20. ¿Pueden tener la misma longitud de onda dos colores del espectro visible: rojo y azul, por ejemplo?

Sí, si cada uno se desplaza en un medio. Lo que determina el color es la frecuencia, de modo que podemos tener una misma longitud de onda y dos colores diferentes, si las ondas se desplazan por medios distintos.

21. Ordena de menor a mayor, según la longitud de onda en el vacío, las ondas electromagnéticas siguientes: luz visible, infrarrojos, rayos X, rayos gamma, ondas de radio.

Las ondas más energéticas son los rayos gamma. El orden correcto sería:

Rayos gamma > rayos X > visible > infrarrojos > ondas de radio

22. Completa en tu cuaderno.

«Los rayos **ultravioleta** se dividen en tres bandas: UV-A, UV-B y UV-C. La luz solar contiene radiación de estas bandas. Las radiaciones **UV-B** y **UV-C** son absorbidas por la capa de ozono de la atmósfera. Los rayos **UV-A** procedentes del Sol provocan el bronceado y los rayos **UV-B y UV-C** queman la piel».

23. Una onda electromagnética tiene en el vacío una longitud de onda de $4 \cdot 10^{-7}$ m. Penetra en un medio material y su velocidad se reduce a $3c/4$. Calcula:

a) La frecuencia y el número de onda en el vacío.

b) El índice de refracción del medio y la frecuencia y la longitud de onda de la onda en ese medio material.

Dato: $c = 3 \cdot 10^8\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

a) En el vacío podemos deducir su frecuencia a partir de su longitud de onda y su velocidad:

$$c = \lambda \cdot f \rightarrow f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \cdot 10^8\ \text{m/s}}{4 \cdot 10^{-7}\ \text{m}} = 7{,}5 \cdot 10^{14}\ \text{Hz}$$

El número de onda es:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{4 \cdot 10^{-7}\ \text{m}} = \frac{\pi}{2} \cdot 10^7\ \text{m}^{-1} = 1{,}57 \cdot 10^7\ \text{m}^{-1}$$

b) El índice de refracción del medio material se calcula a partir del dato de la velocidad de propagación de la onda en él:

$$n = \frac{c}{v} = \frac{\cancel{c}}{\frac{3}{4}\cancel{c}} = \frac{4}{3} = 1{,}\widehat{3}$$

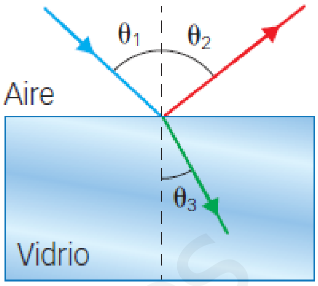
En el medio material la frecuencia de la onda es la misma que en el vacío:

$$f_{\text{medio}} = 7{,}5 \cdot 10^{14}\ \text{Hz}$$

Ahora calculamos la nueva longitud de onda, pues la velocidad de propagación ha cambiado:

$$v = \lambda_{\text{medio}} \cdot f_{\text{medio}} \rightarrow \lambda_{\text{medio}} = \frac{v}{f_{\text{medio}}} = \frac{3c/4}{f_{\text{medio}}} = \frac{\dfrac{3 \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{4}}{7{,}5 \cdot 10^{14} \text{ Hz}} = 3 \cdot 10^{-7} \text{ m}$$

24. Un rayo luminoso incide desde el aire con ángulo θ_1 sobre la cara superior de una lámina de vidrio. Parte de la luz se refleja en la superficie formando un ángulo θ_2, mientras que otra parte se refracta formando un ángulo θ_3.



a) El ángulo θ_2, ¿es mayor, menor o igual que θ_1? ¿Por qué?

b) Sabiendo que el índice de refracción del agua es mayor que el índice de refracción del aire, determina si es correcto el esquema donde se representa el ángulo θ_3 menor que θ_1.

a) El ángulo θ_2 es igual que el ángulo θ_1, puesto que la luz se refleja en la superficie de separación de ambos medios.

b) Sí es correcto, pues la luz pasa de un medio con un índice de refracción menor a otro con un índice de refracción mayor. El rayo se acerca a la normal, según se deduce de la ley de Snell:

$$n_1 \cdot \text{sen } \hat{i} = n_2 \cdot \text{sen } \hat{r} \rightarrow \text{sen } \hat{r} = \frac{n_1}{n_2} \cdot \text{sen } \hat{i}$$

Si $n_2 > n_1$, entonces el ángulo de refracción es menor que el ángulo de incidencia.

25. Se dispone de una superficie de vidrio de índice de refracción 1,5, colocada sobre una superficie de agua de índice de refracción 1,3. ¿En qué casos se producirá una reflexión total en la interfaz de separación entre ambos medios?

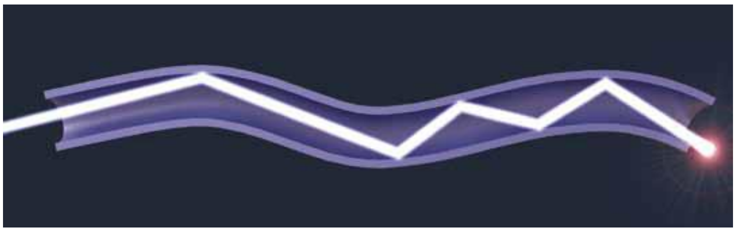
Se producirá reflexión total si se cumplen dos condiciones:

- Que la luz pase del medio con índice de refracción mayor al medio con índice de refracción menor. En este caso del vidrio al agua.
- Que el ángulo de incidencia sea mayor que cierto ángulo límite. Este ángulo límite es el correspondiente a un ángulo de refracción de 90º. Para calcularlo aplicamos la ley de Snell:

$$n_{\text{vidrio}} \cdot \text{sen } \hat{i}_{\text{lím.}} = n_{\text{agua}} \cdot \text{sen } 90^\circ \rightarrow \text{sen } \hat{i}_{\text{lím.}} = \frac{n_{\text{agua}} \cdot \text{sen } 90^\circ}{n_{\text{vidrio}}} = \frac{1{,}33 \cdot 1}{1{,}5} = 0{,}887 \rightarrow \hat{i}_{\text{lím.}} = 62{,}5^\circ$$

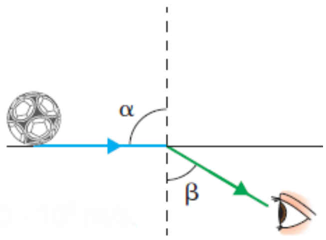
26. Las fibras ópticas son varillas delgadas de vidrio que permiten la propagación y el guiado de la luz por su interior, de forma que esta entra por un extremo y sale por el opuesto. Explica físicamente este fenómeno.

En la fibra óptica se produce el fenómeno de la reflexión total, de modo que la luz que entra por un extremo sufre sucesivas reflexiones dentro de la fibra hasta que sale por el otro extremo.



27. Determina el valor máximo del ángulo β de la figura, para que el buzo que se encuentra bajo el agua pueda ver una pelota que flota en la superficie.

Datos: $v_{\text{agua}} = 2{,}3 \cdot 10^8$ m/s; $c = 3{,}0 \cdot 10^8$ m/s.



En este caso el ángulo de incidencia es de 90°.

Aplicamos la ley de Snell en el paso del aire hacia el agua:

$$n_{\text{aire}} \cdot \text{sen}\,\hat{i} = n_{\text{agua}} \cdot \text{sen}\,\hat{r} \rightarrow \text{sen}\,\hat{r} = \frac{n_{\text{aire}} \cdot \text{sen}\,\hat{i}}{n_{\text{agua}}} = \frac{n_{\text{aire}} \cdot \text{sen}\,90^\circ}{\frac{c}{v_{\text{agua}}}} = \frac{1 \cdot 1}{\frac{3{,}0 \cdot 10^8\ \text{m/s}}{2{,}3 \cdot 10^8\ \text{m/s}}} = 0{,}7\widehat{6} \rightarrow \hat{r} = 50^\circ$$

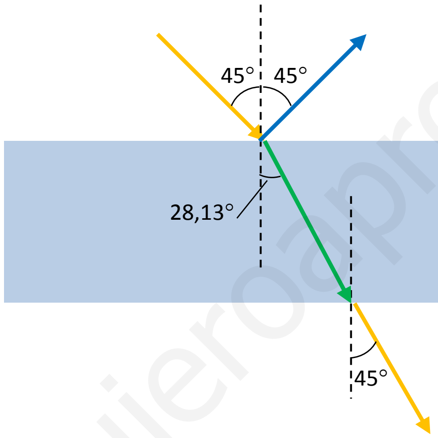
Por tanto, cuando el ángulo β sea mayor de 50° el buzo podrá ver la pelota.

28. Un haz de luz atraviesa una lámina de vidrio ($n_{\text{vidrio}} = 1{,}5$). El rayo incide con un ángulo de 45° respecto de la normal. Dibuja la trayectoria que sigue el rayo de luz.

Al entrar en la lámina de vidrio el rayo se refracta y su trayectoria se acerca a la normal ya que pasa a un medio con mayor índice de refracción del medio de incidencia. El ángulo de refracción se calcula aplicando la ley de Snell donde el medio 1 es el aire y el 2 el vidrio:

$$n_1 \cdot \text{sen}\,\hat{i} = n_2 \cdot \text{sen}\,\hat{r} \rightarrow \text{sen}\,\hat{r} = \frac{n_1 \cdot \text{sen}\,\hat{i}}{n_2} = \frac{1 \cdot \text{sen}\,45^\circ}{1{,}5} = 0{,}471 \rightarrow \hat{r} = 28{,}13^\circ$$

Respuesta gráfica:



29. Un rayo de luz incide desde el aire sobre una lámina de vidrio, formando 29° con la normal. El espesor de la lámina es de 2 cm. Determina:

a) El ángulo que forma el rayo refractado con la normal.

b) La velocidad de la luz mientras atraviesa la lámina.

c) El tiempo que tarda la luz en atravesar la lámina.

Datos: $n_{\text{aire}} = 1{,}0$; $n_{\text{lámina}} = 1{,}5$; $c = 3 \cdot 10^8$ m/s.

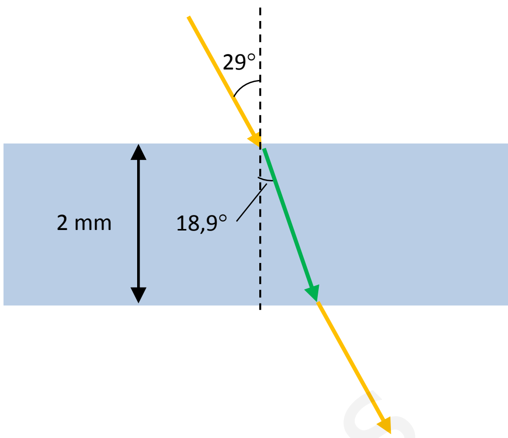
a) El rayo refractado se acerca a la normal. Calculamos el ángulo pedido a partir de la ley de Snell, donde el medio 1 es el aire y el medio 2 es el vidrio:

$$n_1 \cdot \text{sen}\,\hat{i} = n_2 \cdot \text{sen}\,\hat{r} \rightarrow \text{sen}\,\hat{r} = \frac{n_1 \cdot \text{sen}\,\hat{i}}{n_2} = \frac{1 \cdot \text{sen}\,29^\circ}{1{,}5} = 0{,}323 \rightarrow \hat{r} = 18{,}9^\circ$$

b) La velocidad de la luz se calcula a partir del índice de refracción:

$$n_2 = \frac{c}{v_2} \rightarrow v_2 = \frac{c}{n_2} = \frac{3 \cdot 10^8\ \text{m/s}}{1{,}5} = 2 \cdot 10^8\ \text{m/s}$$

c) Para calcular el tiempo que tarda en atravesar la lámina necesitamos saber qué distancia recorre dentro de la lámina. Dibujamos un esquema de la situación.



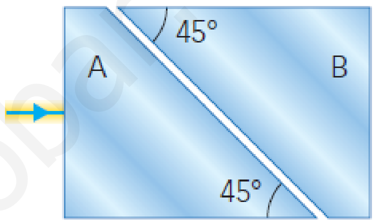
La distancia recorrida dentro de la lámina se puede determinar a partir del espesor de la lámina y del ángulo de refracción. En efecto, según el dibujo:

$$\cos 18{,}9^\circ = \frac{2\ \text{mm}}{d} \rightarrow d = \frac{2\ \text{mm}}{\cos 18{,}9^\circ} = 2{,}114\ \text{mm}$$

Ahora calculamos el tiempo necesario para recorrer dicha distancia dentro de la lámina:

$$v = \frac{d}{t} \rightarrow t = \frac{d}{v} = \frac{2{,}114\ \cancel{\text{mm}} \cdot \dfrac{1\ \text{m}}{10^3\ \cancel{\text{mm}}}}{2 \cdot 10^8\ \text{m/s}} = 1{,}06 \cdot 10^{-11}\ \text{s}$$

30. Tenemos dos prismas idénticos de índice de refracción 1,65 ligeramente separados. Un rayo láser incide perpendicularmente a la cara A. Determina si existirá luz emergente por la cara B, y realiza un diagrama del recorrido de los rayos si:



a) El espacio entre los prismas es aire ($n = 1$).

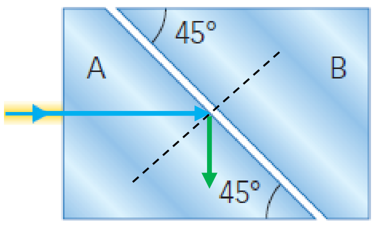
b) El espacio entre los prismas es agua ($n = 1{,}33$).

a) La luz entra en el primer prisma de manera perpendicular. Por tanto, su dirección no cambiará al pasar del aire al primer prisma.

Esto quiere decir que incidirá en la segunda cara del primer prisma con un ángulo de 45° respecto a la normal. Entonces el ángulo de refracción en el aire se puede calcular con la ley de Snell. Para el caso del aire:

$$n_{\text{prisma1}} \cdot \text{sen}\ \hat{i} = n_{\text{aire}} \cdot \text{sen}\ \hat{r} \rightarrow$$

$$\rightarrow \text{sen}\ \hat{r} = \frac{n_{\text{prisma1}} \cdot \text{sen}\ \hat{i}}{n_{\text{aire}}} = \frac{1{,}65 \cdot \text{sen}\ 45^\circ}{1} = 1{,}167$$

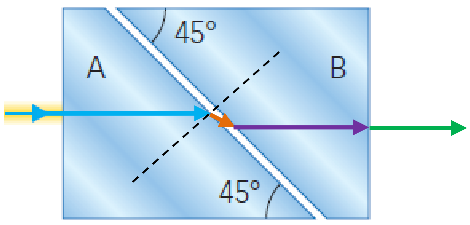


Por tanto, el rayo no pasará del primer prisma al aire, ya que se produce el fenómeno de la reflexión total y el rayo se refleja hacia el primer prisma.

b) Sin embargo, si el medio de separación es agua:

$$n_{\text{prisma1}} \cdot \text{sen}\ \hat{i} = n_{\text{agua}} \cdot \text{sen}\ \hat{r} \rightarrow$$

$$\rightarrow \text{sen}\ \hat{r} = \frac{n_{\text{prisma1}} \cdot \text{sen}\ \hat{i}}{n_{\text{agua}}} = \frac{1{,}65 \cdot \text{sen}\ 45^\circ}{1{,}33} = 0{,}877 \rightarrow \hat{r} = 61{,}3^\circ$$



Es decir, en este caso el rayo sí saldrá del primer prisma formando un ángulo de 61,3° con la normal.

Cuando vuelva a entrar en el segundo prisma de nuevo retomará la dirección inicial, e incidirá en la cara B con un ángulo de 0°.

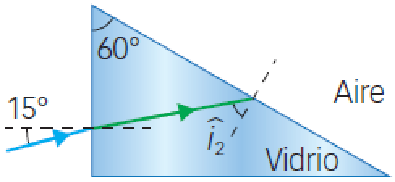
Entonces, aplicando de nuevo la ley de Snell:

$$n_{\text{agua}} \cdot \text{sen}\ \hat{i} = n_1 \cdot \text{sen}\ \hat{r} \rightarrow$$

$$\rightarrow \text{sen}\ \hat{r} = \frac{n_{\text{agua}} \cdot \text{sen}\ \hat{i}}{n_1} = \frac{1{,}33 \cdot \text{sen}\ 0^\circ}{1{,}65} = 0 \rightarrow \hat{r} = 0^\circ$$

Es decir, el rayo no se desviará en la cara B. Saldrá por la cara B con la misma dirección y sentido que el rayo incidente en la cara A.

31. **Desde el aire (n_{aire} = 1,0) incide un rayo de luz sobre un prisma de vidrio (n_{vidrio} = 1,5) con un ángulo de incidencia de 15°. Determina.**



a) El valor del ángulo $\hat{i}_2$.

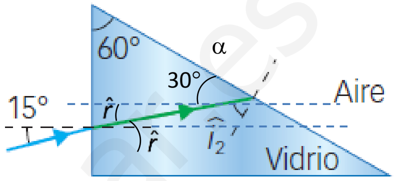
b) Si se producirá el fenómeno de la reflexión total en la cara mayor del prisma.

a) Al entrar en el prisma el rayo se refracta. Como pasa del aire a un medio con un índice de refracción mayor, se acerca a la normal. Aplicamos la ley de Snell para determinar el ángulo de refracción:

$$n_{aire} \cdot \text{sen } \hat{i} = n_{vidrio} \cdot \text{sen } \hat{r} \rightarrow \text{sen } \hat{r} = \frac{n_{aire} \cdot \text{sen } \hat{i}}{n_{vidrio}} = \frac{1 \cdot \text{sen } 15°}{1,5} = 0,173 \rightarrow \hat{r} = 9,94°$$

Entonces, del dibujo podemos deducir:

$$30° + \hat{r} + \hat{i}_2 = 90° \rightarrow \hat{i}_2 = 90° - 30° - \hat{r} = 90° - 30° - 9,94° \simeq 50°$$



Es decir, el rayo llega a la siguiente cara del prisma formando un ángulo de 50° con la normal.

b) Para que se produzca reflexión total en la cara del prisma el rayo debe incidir en ella con un ángulo mayor que el ángulo límite, que podemos calcular así:

$$n_{vidrio} \cdot \text{sen } \hat{i}_{lím.} = n_{aire} \cdot \text{sen } 90° \rightarrow \text{sen } \hat{i}_{lím.} = \frac{n_{aire} \cdot \text{sen } 90°}{n_{vidrio}} = \frac{1 \cdot 1}{1,5} = 0,\widehat{6} \rightarrow \hat{i}_{lím.} = 41,8°$$

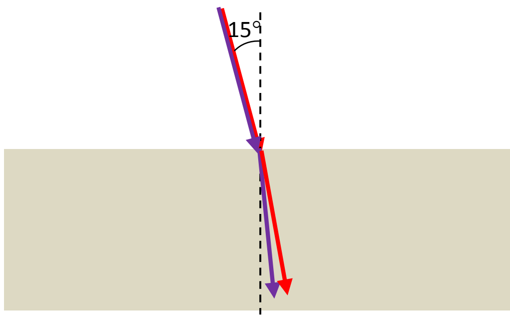
Por tanto, como el ángulo de incidencia en esa cara, i_2 (50°), es mayor que el ángulo límite (41,8°), sí se producirá reflexión total.

32. **Un haz de luz blanca incide desde el aire sobre una superficie de cuarzo fundido con un ángulo de incidencia de 15°. El cuarzo fundido tiene un índice de refracción que decrece con la longitud de onda de la luz. Para el extremo violeta n = 1,472, y para el extremo rojo n = 1,455.**

a) ¿Qué se refracta más, el rojo o el violeta? Haz un dibujo.

b) Calcula la separación angular en minutos de arco sexagesimal de los rayos refractados para los extremos rojo y violeta.

a) Si el índice de refracción es mayor para el violeta, este color se refractará más.
Podemos representar la situación así:



b) La separación angular será la diferencia entre los ángulos de refracción para ambos colores.
Por tanto, para el rojo:

$$n_1 \cdot \text{sen } \hat{i} = n_{rojo} \cdot \text{sen } \hat{r}_{rojo} \rightarrow$$

$$\rightarrow \text{sen } \hat{r}_{rojo} = \frac{n_1 \cdot \text{sen } \hat{i}}{n_{rojo}} = \frac{1 \cdot \text{sen } 15°}{1,455} = 0,178 \rightarrow \hat{r} = 10,25°$$

Y para el violeta:

$$n_1 \cdot \text{sen}\ \hat{i} = n_{\text{violeta}} \cdot \text{sen}\ \hat{r}_{\text{violeta}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \text{sen}\ \hat{r}_{\text{violeta}} = \frac{n_1 \cdot \text{sen}\ \hat{i}}{n_{\text{violeta}}} = \frac{1 \cdot \text{sen}\ 15^{\circ}}{1{,}472} = 0{,}176 \rightarrow \hat{r} = 10{,}13^{\circ}$$

Por tanto, la separación angular será:

$$\delta = 10{,}25^{\circ} - 10{,}13^{\circ} = 0{,}12^{\circ} = 7'\ 12''$$

33. Explica el fenómeno de la interferencia de ondas a partir del experimento de la doble rendija de Young. ¿Qué condiciones deben darse para que tenga lugar dicho fenómeno?

El experimento de la doble rendija de Young consiste en hacer pasar luz procedente de un único foco por una barrera con dos rendijas iguales y muy pequeñas separadas una distancia *d*. Según el principio de Huygens, cada rendija se comporta como un foco secundario de luz, que, al proceder del mismo foco inicial, serían focos coherentes.

Cuando se coloca una pantalla a una distancia *L*, mucho mayor que *d*, en ella se puede observar una interferencia debida a la diferencia entre los caminos seguidos por las dos ondas ($x_2 - x_1$). Esta diferencia de caminos es directamente proporcional a la distancia entre las rendijas y al seno del ángulo que forman los rayos con la horizontal.

Las condiciones son:

- Que la luz inicial proceda de un único foco.
- Que las rendijas sean muy pequeñas.
- Y que la distancia entre rendijas sea mucho menor que la distancia de estas a la pantalla.

34. ¿Qué es una onda polarizada? Explica la siguiente frase: «las ondas sonoras no se pueden polarizar».

Una onda polarizada es una onda que tiene una dirección de vibración determinada para el campo magnético y el campo eléctrico que se transmiten con la onda.

Las ondas sonoras no se pueden polarizar. Esto quiere decir que no podemos hacer que la onda que forma el sonido vibre en una determinada dirección. El sonido es una onda longitudinal que se propaga en todas direcciones.

35. Una onda de luz es polarizada por un polarizador A y un segundo polarizador B colocado a continuación del primero. Razona cuál de las siguientes afirmaciones sobre la luz tras atravesar los polarizadores es correcta.

a) No hay luz si A y B son paralelos entre sí.

b) No hay luz si A y B son perpendiculares entre sí.

c) Hay luz independientemente de la orientación de A y B.

a) Falsa. La luz polarizada por el polarizador A podrá pasar a través del B, pues los campos magnético y eléctrico vibrarán en una dirección que pasará a través del polarizador B, al ser paralelo al A.

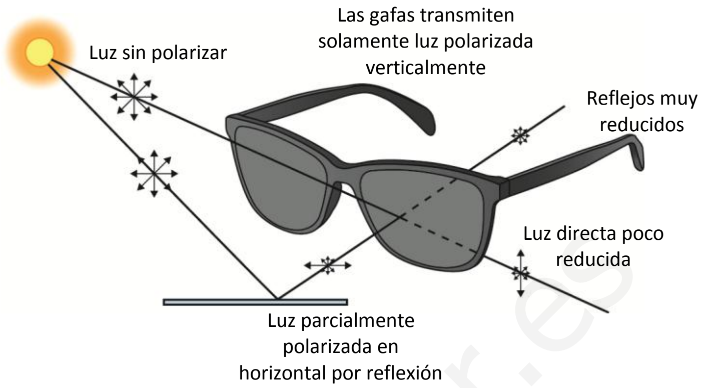
b) Verdadero. En este caso la luz que sale del polarizador A vibra en una dirección que no puede atravesar el polarizador B, al ser perpendicular al A.

c) Falsa. En función de la orientación relativa de A y B, habrá luz o no a la salida de B.

FÍSICA EN TU VIDA

1. **Explica con un esquema sencillo cómo reducen unas gafas de sol polarizadas la cantidad de luz que llega a los ojos de un conductor. ¿Por qué son más eficientes?**

Las ondas electromagnéticas de luz que llegan a las gafas vibran en todas direcciones. Pero solamente una parte de estas ondas podrán atravesar las gafas: aquellas que vibren en la misma dirección en que está orientado el polarizador que forma el cristal de las gafas. Por tanto, se reduce la cantidad de luz que llega a los ojos de un conductor.



Porque no solamente filtran la luz mediante un cristal oscuro, sino que además no dejan pasar la luz reflejada que se ha polarizado.

2. **Si nos situamos con gafas de sol en la entrada de un edificio con cristal tanto en el suelo como en una pared vertical, ¿qué veremos más oscuro, el suelo o la pared? ¿Por qué?**

Veremos más oscuro el suelo. Esto es así porque la luz del Sol, al reflejarse en el suelo, queda polarizada horizontalmente, y las gafas polarizadas están polarizadas verticalmente. Cuando la luz se refleja en las paredes, la dirección de vibración de esta luz reflejada se aproxima más a la dirección en que está orientado el polarizador que forma las gafas.

3. **No todas las gafas de sol son polarizadas. ¿Crees que los fabricantes deberían estar obligados a indicarlo en la publicidad del producto? ¿Por qué?**

Respuesta personal. En principio, parece razonable pensar que el consumidor sepa cuáles son las características del producto, y más en este caso en el que la salud puede verse afectada, pues las gafas de sol protegen nuestros ojos en días muy soleados.

PROYECTO SABER HACER

7

Óptica geométrica

SANTILLANA

Óptica geométrica

7

PARA COMENZAR

- **¿Por qué se dice que los rayos que llegan al espejo de un telescopio lo hacen desde el infinito?**

  Porque llegan desde objetos muy, muy lejanos, y entonces podemos considerar que son paralelos entre sí y que, como la distancia desde la que llegan es mucho mayor que el radio del espejo curvo, por ejemplo, la aproximación de suponer que los rayos proceden del infinito es muy buena.

- **¿Qué forma tiene el espejo principal, el de mayor tamaño? ¿Por qué se observan distorsionadas las imágenes en el espejo?**

  El espejo principal tiene forma curva, es un espejo cóncavo. Esto hace que las imágenes aparezcan distorsionadas en el espejo, algo que no sucede cuando el espejo es plano, como aquellos que usamos normalmente en muchos aseos.

ACTIVIDADES

1. Determina las siguientes razones trigonométricas:

a) **sen 45°** **b)** **cos 60°** **c)** **sen 135°** **d)** **sen 30°**

a) $\text{sen } 45^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\cos 60^\circ = \dfrac{1}{2}$

c) $\text{sen } 135^\circ = \text{sen } 45^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

d) $\text{sen } 30^\circ = \dfrac{1}{2}$

2. Encuentra el ángulo para el que se cumple que:

a) **sen α = 0,15**

b) **tg β = 2,7**

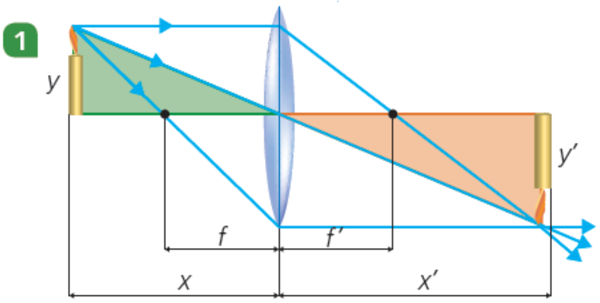
c) **cos γ = –0,67**

a) $\text{sen } \alpha = 0{,}15 \rightarrow \alpha = \text{arc sen } 0{,}15 = 8^\circ\ 37'\ 37''$

b) $\text{tg } \beta = 2{,}7 \rightarrow \beta = \text{arc tg } 2{,}7 = 69^\circ\ 40'\ 37''$

c) $\cos \gamma = -0{,}67 \rightarrow \gamma = \text{arc cos } (-0{,}67) = 132^\circ\ 4'\ 1''$

3. En el estudio de la imagen de una lente convergente se obtienen los siguientes gráficos. Estudia los triángulos semejantes y completa las equivalencias:



a) $\dfrac{y_0}{y_i} = \dfrac{\square}{\square}$ **b)** $\dfrac{f}{x_i - f} = \dfrac{\square}{\square}$

a) $\dfrac{y_0}{y_i} = \dfrac{x_0}{x_i}$

b) $\dfrac{f}{x_i - f} = \dfrac{y_0}{y_i}$

4. Explica este hecho: «Si ves los ojos de alguien reflejados en un espejo, o a través de un medio transparente, ese alguien te puede ver a ti».

La trayectoria de los rayos de luz es reversible. Por eso si podemos ver los ojos de una persona, es porque hay rayos de luz que llegan desde sus ojos hasta los nuestros. Y por el mismo motivo habrá rayos de luz que lleguen desde nuestros ojos a los suyos y, por consiguiente, dicha persona podrá vernos también.

5. Explica las leyes de la reflexión de la luz. Observa ahora la figura 7.8 y di, usando dichas leyes, cómo cambia la dirección del rayo reflejado en el espejo si se gira un ángulo α el espejo de la figura sin mover la fuente de luz.

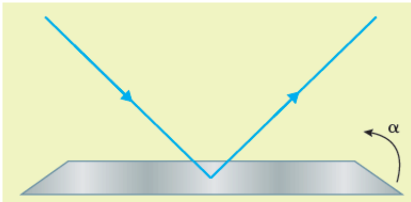
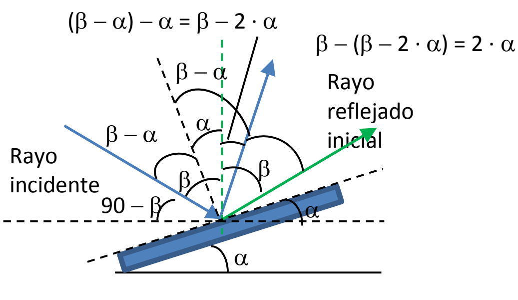


Figura 7.8.

Las leyes de la reflexión dicen que el ángulo que forma el rayo reflejado con la normal es igual que el rayo que forma el rayo incidente con la normal.

Además, el rayo incidente, la normal y el rayo reflejado están en el mismo plano.

Supongamos que el ángulo que forma el rayo incidente con la normal cuando el espejo está sin girar es β. Entonces, el ángulo que forma el rayo reflejado con la normal será β también.



Si el espejo gira un ángulo α, el rayo incidente formará un ángulo β – α con la normal, que ahora habrá girado a su vez un ángulo α. Entonces el rayo reflejado formará un ángulo β – α con la nueva normal. Y del dibujo se deduce que el ángulo que forma el rayo reflejado habrá girado un ángulo igual a 2 · α con respecto al rayo reflejado inicial.

6. Explica brevemente cuáles son las características de las imágenes formadas por los espejos planos. Si una persona se acerca a un espejo a una velocidad de 1,5 m/s, ¿a qué velocidad se desplaza su imagen en el espejo?

En un espejo plano la imagen es virtual, está formada por las prolongaciones de los rayos reflejados, es derecha con inversión lateral, del mismo tamaño que el objeto y la distancia de esta al espejo es la misma que la del objeto al espejo. Por tanto, si un objeto se mueve a una velocidad de 1,5 m/s, la imagen en el espejo se moverá a la misma velocidad.

7. Supón dos espejos planos colocados perpendicularmente entre sí, tal y como muestra la figura 7.9. Un rayo que se desplaza en un plano perpendicular a ambos espejos es reflejado primero por uno de los espejos y a continuación por el otro espejo. Indica entonces cuál será la dirección final del rayo con respecto a la dirección correspondiente al rayo original.

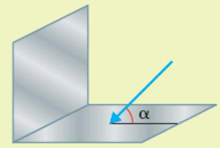
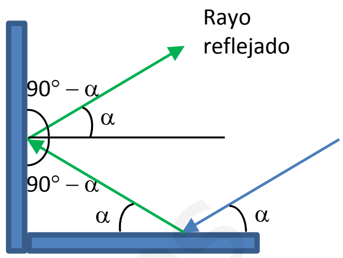


Figura 7.9.

El rayo incidente se refleja en el primer espejo formando un ángulo $90 - \alpha$ con la normal. A continuación este rayo reflejado se refleja en el segundo espejo.

El ángulo de reflexión es igual que el ángulo de incidencia. Por tanto, el rayo reflejado vuelve a formar un ángulo α con la horizontal, tal y como se aprecia en el esquema adjunto. Por tanto, el rayo reflejado es paralelo al rayo incidente inicial.



8. Un objeto de 15 cm de altura está a 20 cm de un espejo convexo cuya distancia focal es de 40 cm.

a) Calcula la posición y el tamaño de la imagen formada.

b) Dibuja el trazado de rayos correspondiente.

a) Utilizamos la ecuación fundamental de los espejos y las normas DIN para calcular la distancia a la que se forma la imagen en un espejo esférico:

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{1}{f}$$

Donde *s'* es la distancia de la imagen al espejo, *s*, la distancia del objeto al espejo y *f* la distancia focal, es decir, la distancia del foco al espejo, que es la mitad del radio de curvatura del espejo.

En este caso conocemos la focal y nos dicen que *s* vale –20 cm, puesto que está delante del espejo. Por tanto:

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{1}{f} \rightarrow \frac{1}{s'} = \frac{1}{f} - \frac{1}{s} \rightarrow \frac{1}{s'} = \frac{1}{40\ \text{cm}} - \frac{1}{-20\ \text{cm}} \rightarrow$$

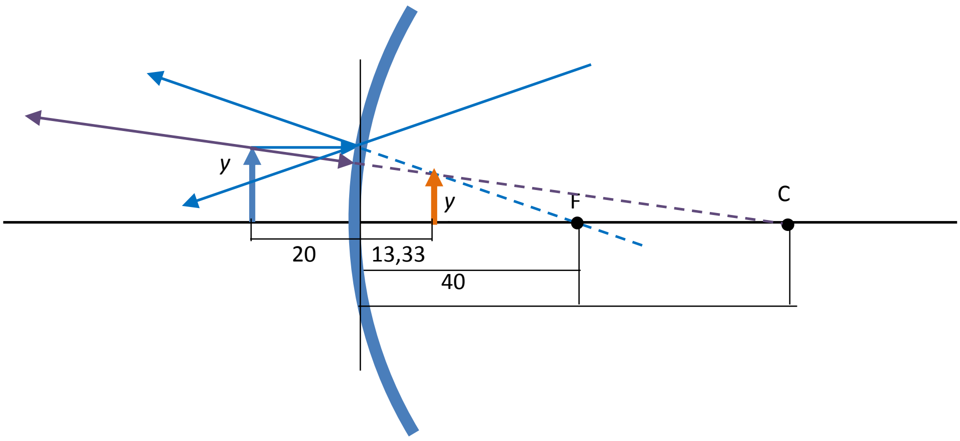
$$\rightarrow \frac{1}{s'} = \frac{1}{40\ \text{cm}} + \frac{1}{20\ \text{cm}} = \frac{1}{40\ \text{cm}} + \frac{2}{40\ \text{cm}} = \frac{3}{40\ \text{cm}} \rightarrow s' = \frac{40\ \text{cm}}{3} = 13{,}33\ \text{cm}$$

Para calcular el tamaño de la imagen empleamos la siguiente ecuación que relaciona el tamaño de la imagen con el tamaño del objeto:

$$\frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s} \rightarrow y' = -\frac{s'}{s} \cdot y = -\frac{13{,}33\ \text{cm}}{-20\ \text{cm}} \cdot 15\ \text{cm} \rightarrow y' = +10\ \text{cm}$$

El signo positivo indica que la imagen está derecha respecto al objeto, y su tamaño es de 10 cm.

b) El trazado de rayos correspondiente es:



9. **Si un espejo forma una imagen real invertida y de mayor tamaño que el objeto, se trata de un espejo:**

a) Cóncavo, y el objeto está situado entre el foco y el centro de curvatura.

b) Cóncavo, y el objeto está situado entre el foco y el espejo.

c) Convexo, con el objeto en cualquier posición.

Respuesta correcta: a.

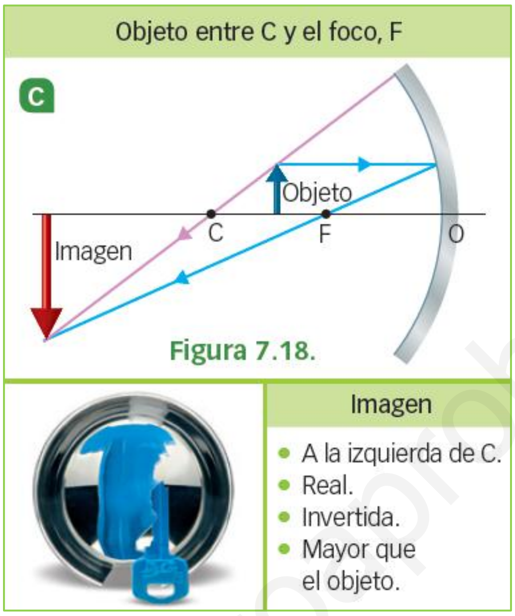


Figura 7.18.

10. **Un pájaro vuela a 1,5 m por encima de la superficie del agua en la situación descrita en el ejemplo anterior. ¿A qué distancia de la superficie lo apreciará el buceador?**

Dato: $n_{agua} = 1{,}33$.

La ecuación del dioptrio plano permite conocer cuál es la distancia aparente para el buceador:

$$\frac{n}{s} = \frac{n'}{s'} \rightarrow s = \frac{n}{n'} \cdot s' = \frac{1{,}33}{1} \cdot 1{,}5 \text{ m} \simeq 2 \text{ m}$$

11. **Determina las distancias focales para un dioptrio esférico cóncavo cuyo radio es 0,2 m si los índices de refracción de los dos medios transparentes son $n = 1$ y $n' = 1{,}33$, respectivamente.**

Teniendo en cuenta que para un dioptrio esférico cóncavo el radio es negativo y la distancia focal objeto y la distancia focal imagen se pueden calcular mediante las siguientes ecuaciones, obtenemos los valores de las distancias focales:

$$f = -r \cdot \frac{n}{n' - n} = -(-0{,}2 \text{ m}) \cdot \frac{1}{1{,}33 - 1} = +0{,}6 \text{ m}$$

$$f' = r \cdot \frac{n'}{n' - n} = -0{,}2 \text{ m} \cdot \frac{1{,}33}{1{,}33 - 1} = -0{,}8 \text{ m}$$

12. **Determina el valor del radio de curvatura de las superficies de una lente simétrica biconvexa cuya potencia es 4 D. El índice de refracción del vidrio que forma la lente es 1,5.**

Podemos aplicar la ecuación del constructor de lentes:

$$(n' - 1) \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = \frac{1}{f'}$$

Si la lente es simétrica, entonces $r_1 = -r_2$. Sustituyendo datos:

$$(n'-1)\cdot\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{-r_1}\right)=\frac{1}{f'}\rightarrow(n'-1)\cdot\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_1}\right)=\frac{1}{f'}\rightarrow(n'-1)\cdot\frac{2}{r_1}=\frac{1}{f'}\rightarrow$$

$$\rightarrow r_1=\frac{2\cdot(n'-1)}{\frac{1}{f'}}=\frac{2\cdot(1{,}5-1)}{4\text{ m}^{-1}}=0{,}25\text{ m}=25\text{ cm}$$

13. Para construir una lente divergente con una cara plana de distancia focal –40 cm se emplea vidrio con un índice de refracción de 1,5. Calcula el radio de la cara esférica de la lente y dibuja la lente.

Podemos aplicar de nuevo la ecuación del constructor de lentes:

$$(n'-1)\cdot\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)=\frac{1}{f'}$$

Si una cara de la lente es plana, entonces el radio correspondiente es ∞. Por tanto, podemos escribir:

$$(n'-1)\cdot\left(\frac{1}{-\infty}-\frac{1}{r_2}\right)=\frac{1}{f'}\rightarrow(n'-1)\cdot\left(-\frac{1}{r_2}\right)=\frac{1}{f'}\rightarrow r_2=-(n'-1)\cdot f'=-(1{,}5-1)\cdot(-40\text{ cm})=+20\text{ cm}$$

14. Un objeto de 20 cm de altura se coloca a 1,2 m de una lente delgada. Si queremos obtener una imagen de 0,5 m de altura, derecha y virtual:

a) ¿Cuál debe ser la potencia de la lente? ¿Qué tipo de lente necesitamos?

b) Elabora un dibujo con el trazado de rayos correspondiente.

a) Partimos de la ecuación de las lentes delgadas:

$$\frac{1}{s'}-\frac{1}{s}=\frac{1}{f'}=P$$

Podemos escribir, además, la relación entre el tamaño del objeto y el de la imagen:

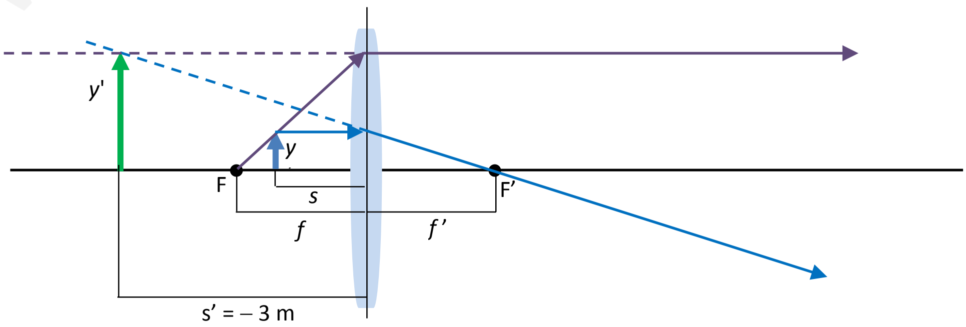
$$\frac{y'}{y}=\frac{s'}{s}\rightarrow s'=\frac{y'}{y}\cdot s=\frac{0{,}5\text{ m}}{0{,}2\text{ m}}\cdot(-1{,}2\text{ m})=-3\text{ m}$$

La potencia de la lente es la inversa de la distancia focal. Es decir:

$$\frac{1}{s'}-\frac{1}{s}=P\rightarrow P=\frac{1}{-3\text{ m}}-\frac{1}{-1{,}2\text{ m}}=+0{,}5\text{ D}$$

Como la potencia es positiva, la lente debe ser convergente.

b) El trazado de rayos sería el siguiente:



15. **Un sistema está formado por dos lentes convergentes iguales separadas 70 cm, con 20 cm de distancia focal. Un objeto se coloca a 40 cm de la primera lente.**

a) **Calcula la posición de la imagen que da el sistema. Elabora también el diagrama de rayos e indica las características de la imagen.**

b) **Determina el aumento lateral total de la imagen.**

a) Para calcular la imagen del objeto que da la lente 1 usamos la ecuación de las lentes delgadas:

$$\frac{1}{s'_1}-\frac{1}{s_1}=\frac{1}{f'_1}\rightarrow\frac{1}{s'_1}-\frac{1}{-40\text{ cm}}=\frac{1}{20\text{ cm}}\rightarrow\frac{1}{s'_1}=\frac{1}{20\text{ cm}}-\frac{1}{40\text{ cm}}\rightarrow s'_1=40\text{ cm}$$

Por tanto, como la distancia entre lentes es de 70 cm, tenemos:

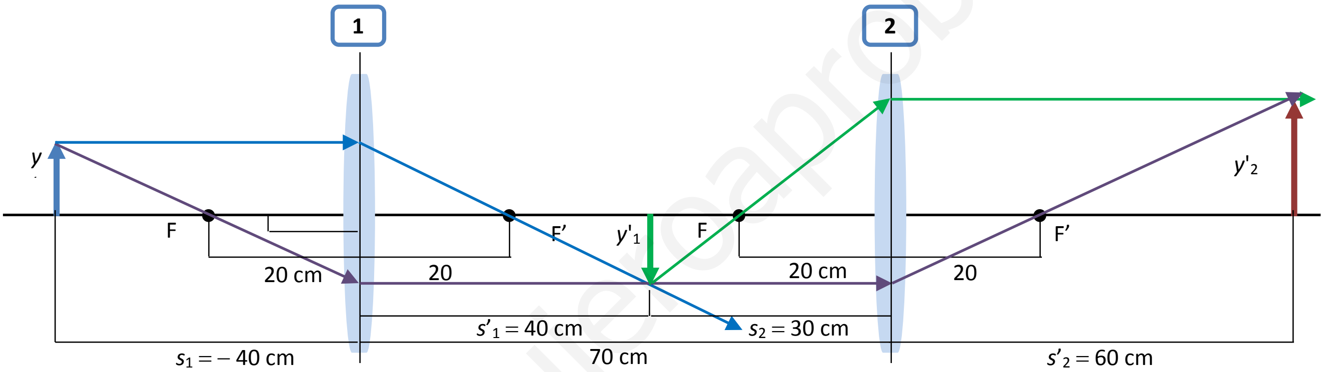
$$|s_2|=70\text{ cm}-s'_1=70\text{ cm}-40\text{ cm}\rightarrow s_2=-30\text{ cm}$$

Y ahora aplicamos de nuevo la ecuación de las lentes delgadas tomando la imagen 1 como objeto 2:

$$\frac{1}{s'_2}-\frac{1}{s_2}=\frac{1}{f'_2}\rightarrow\frac{1}{s'_2}-\frac{1}{-30\text{ cm}}=\frac{1}{20\text{ cm}}\rightarrow\frac{1}{s'_2}=\frac{1}{20\text{ cm}}-\frac{1}{30\text{ cm}}\rightarrow s'_2=60\text{ cm}$$

Es decir, la imagen se forma 60 cm detrás de la segunda lente.

El trazado de rayos correspondiente sería el siguiente:



La imagen es real, derecha y de mayor tamaño que el objeto.

b) El aumento lateral total se calcula a partir del aumento que da cada lente:

Calculemos ahora el tamaño de las imágenes formadas.

$$\frac{y'_1}{y_1}=\frac{s'_1}{s_1}=\frac{40\text{ cm}}{-40\text{ cm}}=-1$$

Es decir, la imagen que forma la lente 1 es del mismo tamaño que el objeto. Calculemos ahora el tamaño de la imagen que da el sistema:

$$\frac{y'_2}{y_2}=\frac{s'_2}{s_2}=\frac{60\text{ cm}}{-30\text{ cm}}=-2$$

Es decir, la imagen final tiene el doble de tamaño que el objeto y es derecha respecto al objeto.

16. **Una diapositiva de 3,5 cm de ancho se sitúa delante de un proyector cuya lente convergente tiene una distancia focal de +12 cm. La imagen nítida se proyecta sobre una pantalla situada a 3,5 m de la lente.**

a) **¿Dónde está colocada la diapositiva?**

b) **Indica las dimensiones de la imagen formada por el proyector en la pantalla.**

c) **Elabora el diagrama de rayos correspondiente.**

a) Para ver dónde está colocada la diapositiva aplicamos la ecuación de las lentes delgadas:

$$\frac{1}{s'}-\frac{1}{s}=\frac{1}{f'}\rightarrow\frac{1}{350\text{ cm}}-\frac{1}{s}=\frac{1}{12\text{ cm}}\rightarrow\frac{1}{s}=\frac{1}{350\text{ cm}}-\frac{1}{12\text{ cm}}\rightarrow s=-12{,}43\text{ cm}$$

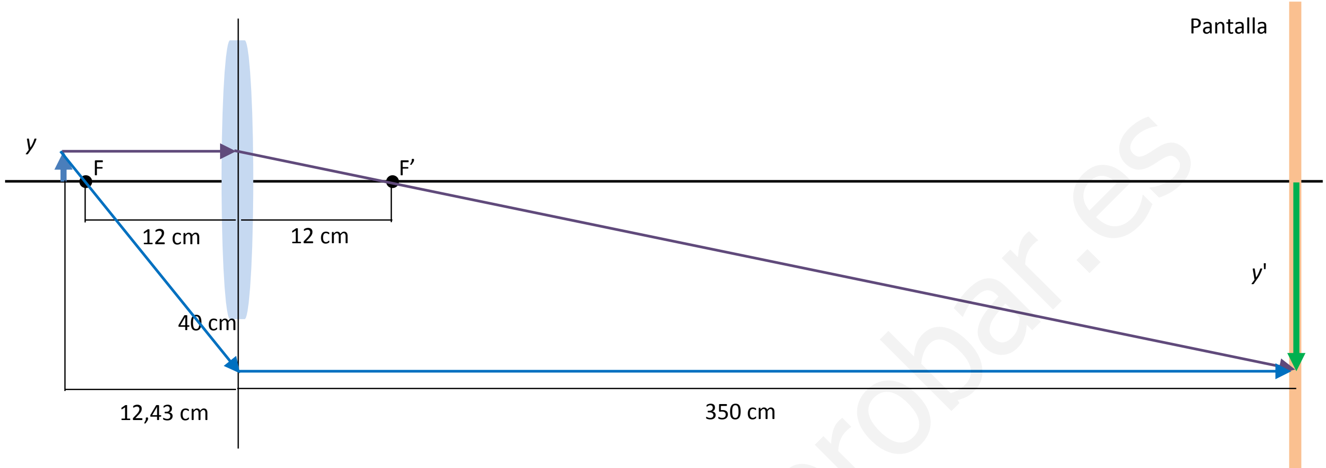
Por tanto, la diapositiva está a 12,43 cm delante de la lente.

b) Las dimensiones de la imagen se calculan a partir de las dimensiones del objeto:

$$\frac{y'}{y}=\frac{s'}{s}\rightarrow y'=\frac{s'}{s}\cdot y=\frac{350\text{ cm}}{-12{,}43\text{ cm}}\cdot 3{,}5\text{ cm}=-98{,}55\text{ cm}$$

Es decir, la imagen es invertida y mide un metro aproximadamente.

c) El diagrama de rayos correspondiente es este. El dibujo no está a escala para poder representar la imagen.



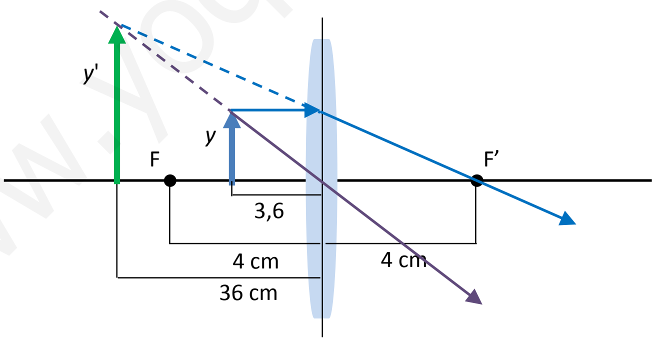
17. **La lente convergente de una lupa tiene una distancia focal de 4 cm.**

a) Elabora un diagrama con la trayectoria de los rayos, la posición del objeto y la posición de la imagen obtenida si se emplea la lupa para observar un sello. La imagen debe ser virtual, derecha y aumentada.

b) ¿Dónde debemos colocar el sello para lograr una imagen diez veces mayor que el objeto?

c) Determinar las características de la imagen obtenida si el sello se coloca a 5 cm de la lente. Dibuja el diagrama y haz los cálculos correspondientes.

a) El diagrama correspondiente es este. Los valores de las medidas se obtendrán en el apartado b.



La imagen es virtual, porque se forma por la prolongación de los rayos notables, derecha y aumentada.

b) Si la imagen es diez veces mayor que el objeto, podemos escribir:

$$\frac{y'}{y}=\frac{s'}{s}=10\rightarrow s'=10\cdot s$$

Ahora escribimos la ecuación de las lentes delgadas:

$$\frac{1}{s'}-\frac{1}{s}=\frac{1}{f'}\rightarrow\frac{1}{10\cdot s}-\frac{1}{s}=\frac{1}{4\text{ cm}}\rightarrow\frac{1}{10\cdot s}-\frac{10}{10\cdot s}=\frac{1}{4\text{ cm}}\rightarrow-\frac{9}{10\cdot s}=\frac{1}{4\text{ cm}}\rightarrow s=-3{,}6\text{ cm}$$

Por tanto, debemos colocar el sello a 3,6 cm delante de la lente de la lupa. Y la imagen se formará:

$$s' = 10 \cdot s = 10 \cdot (-3{,}6 \text{ cm}) = -36 \text{ cm}$$

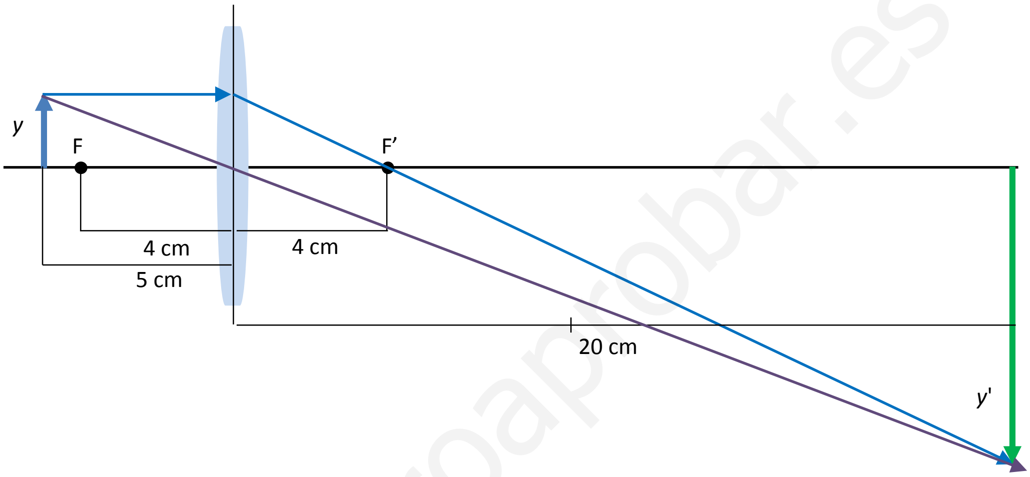
c) Si el sello se coloca a 5 cm de la lente:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'} \rightarrow \frac{1}{s'} - \frac{1}{-5 \text{ cm}} = \frac{1}{4 \text{ cm}} \rightarrow \frac{1}{s'} = \frac{1}{4 \text{ cm}} - \frac{1}{5 \text{ cm}} \rightarrow s = 20 \text{ cm}$$

El aumento es:

$$\frac{y'}{y} = \frac{s'}{s} = \frac{20 \text{ cm}}{-5 \text{ cm}} = -4$$

El diagrama correspondiente es este:



La imagen es real, invertida y de mayor tamaño, cuatro veces mayor que el objeto.

18. Una persona miope utiliza gafas cuyas lentes tienen –2,5 dioptrías de potencia para ver objetos muy alejados (la imagen se forma en la retina).

a) Cuando se quita las gafas, ¿a qué distancia máxima puede ver nítidamente?

b) Un objeto de 50 cm de altura se sitúa a 1 m de las gafas. Indica la posición y el tamaño de la imagen formada. Elabora el trazado de rayos correspondiente.

a) Con las gafas podemos considerar que la persona ve a través de un sistema óptico formado por dos lentes: las gafas y el ojo. Podemos escribir:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = P_{\text{Total}} = P_{\text{Gafas}} + P_{\text{Ojo}}$$

s' es la distancia entre la lente del ojo y la retina. Para un objeto muy alejado podemos escribir entonces:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{-\infty} = P_{\text{Gafas}} + \frac{1}{f'_{\text{Ojo}}} \rightarrow \frac{1}{s'} - \frac{1}{f'_{\text{Ojo}}} = P_{\text{Gafas}}$$

Entonces, cuando se quita las gafas, la ecuación de las lentes delgadas es:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s_{\text{máx.}}} = \frac{1}{f'_{\text{Ojo}}}$$

La distancia *s'* es la misma que antes, pues en ambos casos, con gafas y sin ellas, la imagen se forma nítidamente sobre la retina.

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{f'_{\text{Ojo}}} = \frac{1}{s_{\text{máx.}}} \rightarrow P_{\text{Gafas}} = \frac{1}{s_{\text{máx.}}} \rightarrow s_{\text{máx.}} = \frac{1}{P_{\text{Gafas}}} = \frac{1}{-2{,}5 \text{ m}^{-1}} = -0{,}4 \text{ m} = 40 \text{ cm}$$

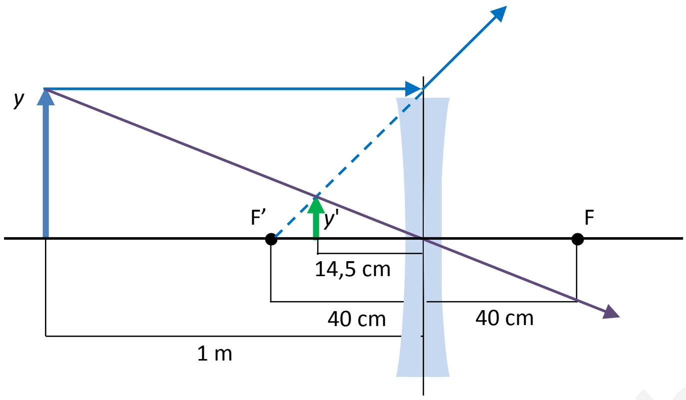
b) Para el objeto situado delante de las gafas:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = P_{\text{Gafas}} \rightarrow \frac{1}{s'} = P_{\text{Gafas}} + \frac{1}{s} = -2{,}5 \text{ D} + \frac{1}{-1 \text{ m}} \rightarrow s' = -0{,}29 \text{ m}$$

El tamaño de la imagen se calcula así:

$$\frac{y'}{y}=\frac{s'}{s}\rightarrow y'=\frac{s'}{s}\cdot y=\frac{-0{,}29\ \text{m}}{-1\ \text{m}}\cdot 0{,}5\ \text{m}=0{,}145\ \text{m}=14{,}5\ \text{cm}$$

La lente es divergente, puesto que su potencia es negativa. Este tipo de lente es el que se emplea para corregir la miopía. El trazado de rayos es el siguiente:



19. Explica en qué consisten los principales defectos de visión del ojo humano:

a) Miopía.

b) Hipermetropía.

c) Astigmatismo.

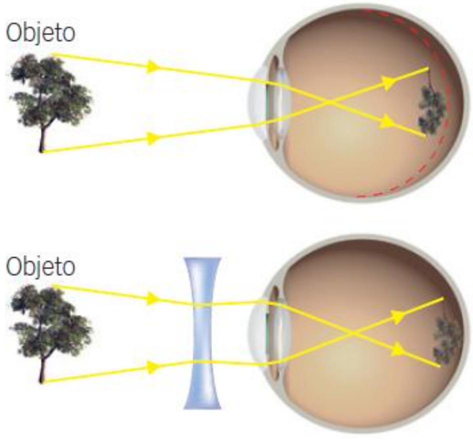
a) La miopía es un defecto que se debe a que el ojo enfoca los objetos delante de la retina. Esto se debe a que el globo ocular de un ojo miope es más alargado de lo normal. Se corrige con una lente divergente.

b) La hipermetropía es un defecto que se debe a que el ojo enfoca los objetos detrás de la retina. Esto se debe a que el globo ocular de un ojo con hipermetropía es más corto de lo normal. Se corrige con una lente convergente.

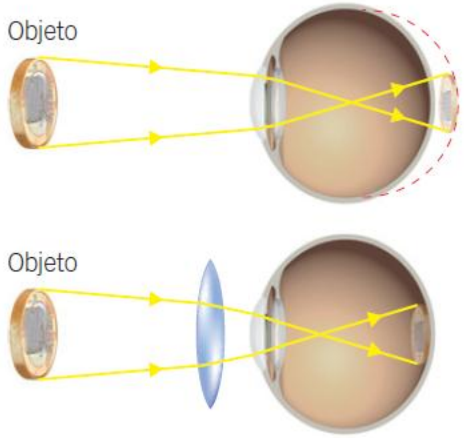
c) El astigmatismo se debe a que el ojo no enfoca de igual manera los rayos que llegan al ojo de manera vertical que aquellos que llegan al ojo de manera horizontal. Se debe a que la córnea de un ojo con astigmatismo está deformada, con forma de balón de rugby. Se corrige con lentes cilíndricas, no esféricas.

20. Explica, usando los diagramas de rayos correspondientes, cómo se corrigen los defectos de la visión que has explicado en la actividad anterior. Señala qué tipo de lentes se emplea en cada caso para conseguir enfocar los objetos sobre la retina.

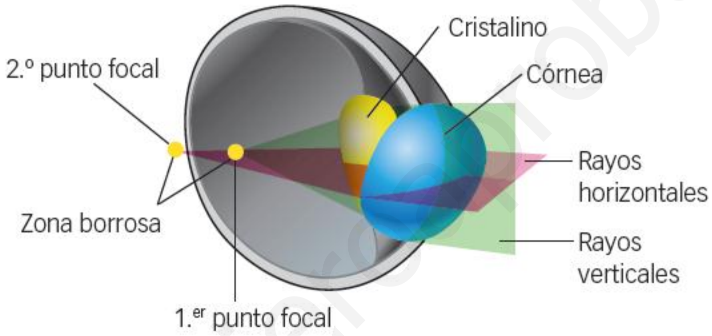
Para la miopía. Al emplear una lente divergente se consigue que la imagen se forme más atrás, es decir, sobre la retina.



Para la hipermetropía. Al emplear una lente convergente se consigue que la imagen se forma más adelante, es decir, sobre la retina.



Para el astigmatismo. Las lentes cilíndricas desvían de manera desigual los rayos verticales y los horizontales, formando una imagen nítida sobre la retina.



21. **¿Se puede hacer fuego orientando hacia el Sol un espejo esférico cóncavo. ¿A qué distancia del espejo deberías colocar un papel para quemarlo? ¿Y con un espejo convexo?**

Sí, porque al usar un espejo cóncavo podemos conseguir que los rayos que llegan paralelos procedentes del Sol se concentren en un punto: el foco del espejo, situado a medio camino entre el espejo y el centro de curvatura. El papel debería colocarse en el foco porque es el punto por el que pasan todos los rayos que inciden de forma paralela.

Con un espejo convexo no se consigue este efecto, puesto que los rayos reflejados formados a partir de los rayos paralelos que llegan procedentes del Sol no convergen en ningún punto.

22. **Explica cómo se forman las imágenes en un espejo convexo. Aplícalo al caso de un objeto situado entre el centro de curvatura del espejo y el foco.**

¿Qué diferencias hay entre una imagen virtual y una imagen real? ¿Se puede formar una imagen real mediante un espejo convexo?

En un espejo convexo los rayos se reflejan de modo que un rayo paralelo sale reflejado alejándose del eje óptico. Si el objeto se sitúa entre el centro de curvatura y el espejo, tenemos este caso:

Objeto a la derecha de F

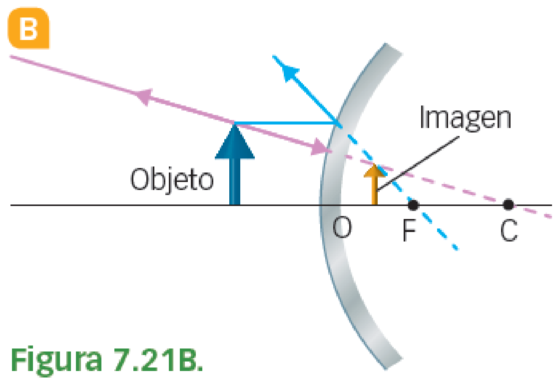


Figura 7.21B.

Imagen

- Entre O y F.
- Virtual.
- Derecha.
- Menor que el objeto.

Una imagen real se forma por intersección de dos rayos, mientras que una imagen virtual se forma por intersección de las prolongaciones de rayos.

Con un espejo convexo no se puede formar una imagen real, porque la imagen se forma como se muestra en el esquema.

23. **Imagina que usas un espejo para obtener una imagen en la misma posición en que se sitúa el objeto. Anota en tu cuaderno qué tipo de espejo debes usar y dónde debes colocar el objeto.**

Hay que usar un espejo cóncavo, y el objeto debe situarse exactamente sobre el centro de curvatura del espejo, tal y como se indica en la siguiente imagen:

Objeto en C

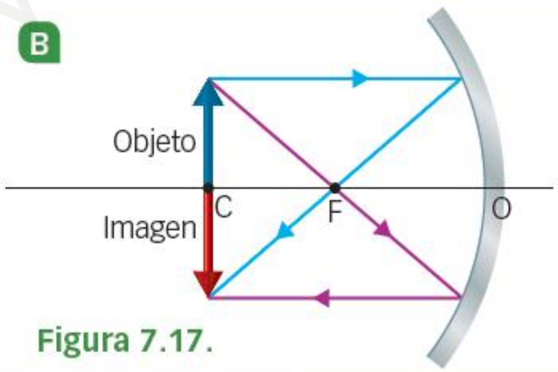


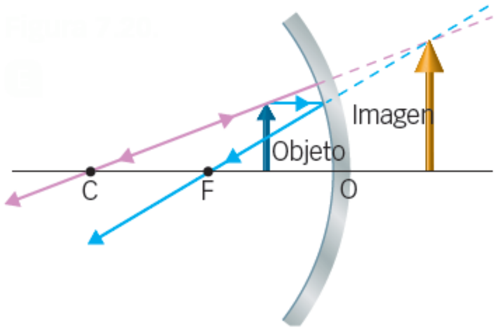
Figura 7.17.

Imagen

- En C.
- Real.
- Invertida.
- Igual que el objeto.

24. **En un espejo de maquillaje vemos nuestra imagen aumentada. ¿Qué tipo de espejo es? Explica tu respuesta dibujando un esquema de rayos. Señala en él la posición y el tamaño del objeto y de la imagen.**

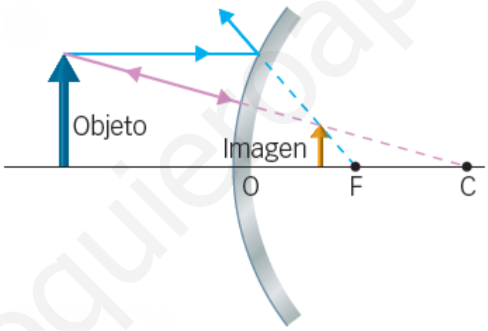
Se trata de un espejo cóncavo, puesto que en un espejo plano la imagen tiene el mismo tamaño que el objeto y en un espejo convexo la imagen es siempre más pequeña que el objeto. El esquema de rayos correspondiente es este:



25. **Cuando miramos por el espejo retrovisor de un coche los objetos están más cerca de lo que parece en el espejo. Explícalo y emplea un diagrama de rayos. ¿Qué tipo de espejo se usa en los retrovisores?**

Los retrovisores emplean espejos convexos. La imagen formada en el espejo es de menor tamaño que el objeto, por lo que parece que está más lejos de lo que está en realidad.

El diagrama de rayos correspondiente sería:



26. **Usando un espejo queremos proyectar la imagen de un objeto de 4 cm sobre una pantalla situada a 2 m del objeto, de tal modo que el aumento sea de 2,5. ¿Qué tipo de espejo utilizamos?**

a) **Calcula la distancia del objeto y de la imagen al espejo.**

b) **¿Cuál es el radio del espejo?**

c) **Dibuja en un esquema el trazado de rayos.**

Para que la imagen sea mayor que el objeto necesitamos un espejo cóncavo. Si la imagen se recoge en una pantalla, es real, y si es de mayor tamaño, el objeto debe estar situado entre el foco y el centro de curvatura del espejo. La imagen será invertida.

a) Empleamos la ecuación fundamental del espejo esférico:

$$\frac{1}{s'}+\frac{1}{s}=\frac{1}{f}$$

En esta ecuación no conocemos *s* ni *s'*, pero sabemos cuánto vale su suma:

$$|s'|=2\text{ m}+|s|$$

La ecuación que permite calcular el aumento es:

$$\frac{y'}{y}=-\frac{s'}{s}\rightarrow -2{,}5=-\frac{s'}{s}\rightarrow s'=2{,}5\cdot s$$

Sustituyendo este valor en la ecuación anterior:

$$|s'| = 2\ \text{m} + |s| \rightarrow |2{,}5 \cdot s| = 2\ \text{m} + |s|$$

En un espejo cóncavo, tanto *s* como *s'* son menores que cero, según el criterio de signos empleado habitualmente en óptica geométrica. Por tanto, podemos escribir:

$$|2{,}5 \cdot s| = 2\ \text{m} + |s| \rightarrow -2{,}5 \cdot s = 2\ \text{m} - s \rightarrow -1{,}5 \cdot s = 2\ \text{m} \rightarrow s = -1{,}33\ \text{m}$$

Esta es la distancia del objeto al espejo. La distancia de la imagen al espejo será:

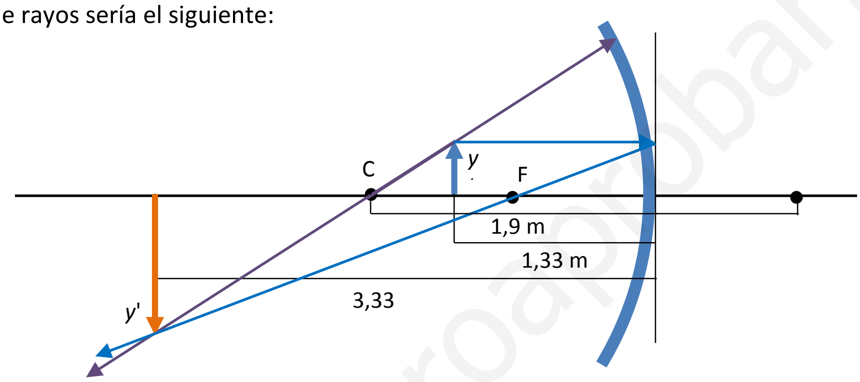
$$s' = 2{,}5 \cdot s = 2{,}5 \cdot (-1{,}33) = -3{,}33\ \text{m}$$

b) El radio del espejo se puede calcular a partir de su distancia focal. Volvemos a la ecuación fundamental del espejo esférico:

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{1}{f} = \frac{1}{R/2} \rightarrow \frac{1}{-3{,}33\ \text{m}} + \frac{1}{-1{,}33\ \text{m}} = \frac{2}{R} \rightarrow R = -1{,}9\ \text{m}$$

Es un valor negativo porque el espejo es cóncavo. El radio de curvatura vale 1,9 m.

c) El trazado de rayos sería el siguiente:



27. El radio de un espejo cóncavo mide 20 cm. ¿Dónde debes situar un objeto para obtener una imagen invertida y cuatro veces mayor?

Si el radio mide 20 cm, entonces sabemos que la distancia focal mide 10 cm, la mitad del radio.

Aplicamos la ecuación del espejo esférico:

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{1}{f}$$

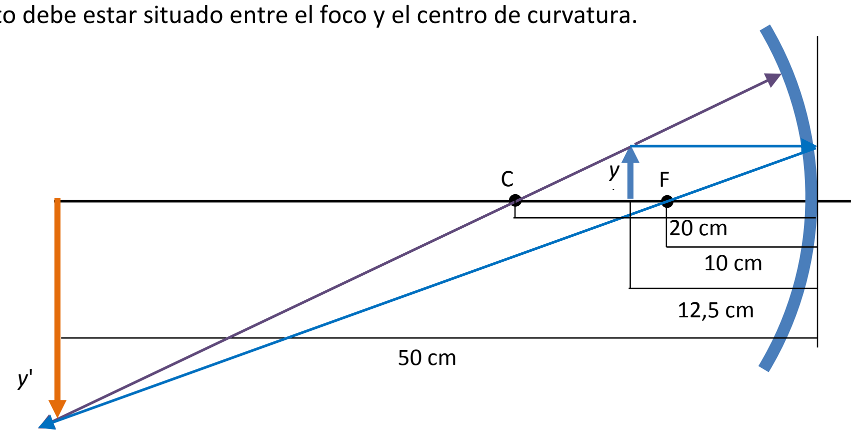
Como nos indican cuál es el aumento:

$$\frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s} \rightarrow -4 = -\frac{s'}{s} \rightarrow s' = 4 \cdot s$$

Sustituyendo en la ecuación anterior:

$$\frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = \frac{1}{f} \rightarrow \frac{1}{4 \cdot s} + \frac{1}{s} = \frac{1}{f} \rightarrow \frac{1}{4 \cdot s} + \frac{4}{4 \cdot s} = \frac{1}{-10\ \text{cm}} \rightarrow \frac{5}{4 \cdot s} = \frac{1}{-10\ \text{cm}} \rightarrow s = -12{,}5\ \text{cm}$$

El objeto debe estar situado entre el foco y el centro de curvatura.



28. **En un almacén emplean un espejo convexo con un radio de curvatura de 1 m para vigilar. Un cliente está a 8 m del espejo:**

a) ¿A qué distancia del espejo se forma la imagen? ¿Está detrás o delante del espejo?

b) Calcula el tamaño de la imagen si el cliente mide 1,80 m.

a) Empleamos la ecuación fundamental del espejo esférico. Como el espejo es convexo, la focal es positiva.

$$\frac{1}{s'}+\frac{1}{s}=\frac{1}{f}\rightarrow\frac{1}{s'}+\frac{1}{s}=\frac{1}{R/2}\rightarrow\frac{1}{s'}+\frac{1}{-8\text{ m}}=\frac{2}{1\text{ m}}\rightarrow s'=0{,}47\text{ m}=47\text{ cm}$$

La imagen está detrás del espejo, pues *s'* es mayor que cero.

b) El tamaño de la imagen se calcula así:

$$\frac{y'}{y}=-\frac{s'}{s}\rightarrow y'=-\frac{s'}{s}\cdot y=-\frac{0{,}47\text{ m}}{-8\text{ m}}\cdot 1{,}80\text{ m}=0{,}106\text{ m}=10{,}6\text{ cm}$$

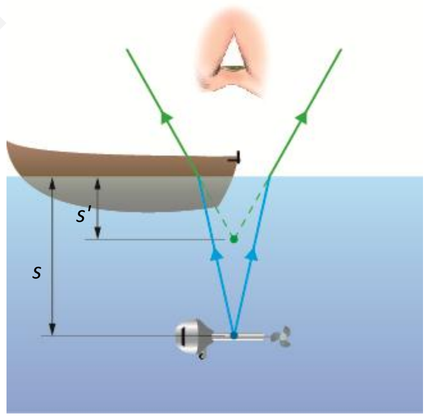
29. **Una barca que navega en un lago pierde el motor que cae al fondo. El tripulante se asoma y decide bajar a buscarlo, pues le parece que está a una profundidad de 0,5 m. ¿Cuál es su profundidad real?**

Dato: *n* = 1,33.

Podemos aplicar las ecuaciones correspondientes a un dioptrio plano.
A partir del esquema:

$$\frac{n}{s}=\frac{n'}{s'}\rightarrow\frac{1{,}33}{s_{\text{Real}}}=\frac{1}{s_{\text{Aparente}}}\rightarrow$$

$$\rightarrow\frac{1{,}33}{s_{\text{Real}}}=\frac{1}{50\text{ cm}}\rightarrow s_{\text{Real}}=66{,}5\text{ cm}$$



30. **El pez del ejemplo anterior está a 5 cm del borde de la pecera. ¿A qué distancia percibe el gato al pez?**

Dato: índice de refracción del agua = 1,33.

En este caso aplicamos la ecuación del dioptrio esférico. Ahora n = 1,33 y n' = 1. Por tanto:

$$\frac{n-n'}{r}=\frac{n}{s}-\frac{n'}{s'}\rightarrow\frac{1{,}33-1}{10\text{ cm}}=\frac{1{,}33}{5\text{ cm}}-\frac{1}{s'}\rightarrow\frac{1}{s'}=\frac{1{,}33}{5\text{ cm}}-\frac{1{,}33-1}{10\text{ cm}}\rightarrow s'=4{,}29\text{ cm}$$

31. **La lente de la cámara de un teléfono es biconvexa con un radio de 7 mm. El índice de refracción del material es 1,55.**

a) Calcula la distancia focal de la lente y su potencia.

b) Colocamos un lápiz a 4 cm de una lente igual. ¿Cómo es la imagen? ¿Dónde se sitúa la imagen?

a) En este caso empleamos la fórmula del constructor de lentes:

$$(n'-1)\cdot\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)=\frac{1}{f'}\rightarrow(1{,}55-1)\cdot\left(\frac{1}{7\text{ mm}}-\frac{1}{-7\text{ mm}}\right)=\frac{1}{f'}\rightarrow f'=6{,}36\text{ mm}$$

La potencia de la lente es la inversa de la distancia focal:

$$P=\frac{1}{f'}=\frac{1}{6{,}36\cdot10^{-3}\text{ m}}\rightarrow f'=157\text{ m}^{-1}=157\text{ D}$$

b) Aplicamos la ecuación fundamental de las lentes delgadas:

$$\frac{1}{s'}-\frac{1}{s}=\frac{1}{f'}\rightarrow\frac{1}{s'}-\frac{1}{-4\text{ cm}}=\frac{1}{0{,}636\text{ cm}}\rightarrow\frac{1}{s'}=\frac{1}{0{,}636\text{ cm}}+\frac{1}{-4\text{ cm}}\rightarrow s'=0{,}756\text{ cm}=7{,}56\text{ mm}$$

La imagen se sitúa 7,56 mm detrás de la lente. Calculemos el aumento:

$$\frac{y'}{y}=\frac{s'}{s}=\frac{0{,}756\text{ cm}}{-4\text{ cm}}=-0{,}19$$

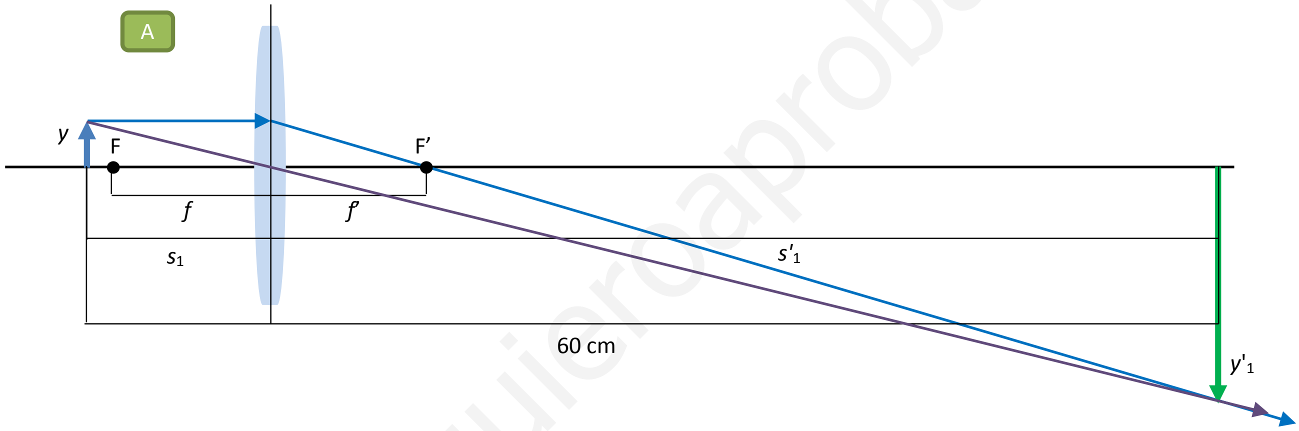
La imagen es invertida y de menor tamaño que el objeto, unas 5 veces menor.

32. Una lente convergente se coloca entre un objeto de 4 cm y una pantalla situada a 60 cm del objeto. Con dos posiciones diferentes de la lente separadas entre sí 40 cm se obtienen imágenes nítidas en la pantalla. Explica cómo es posible.

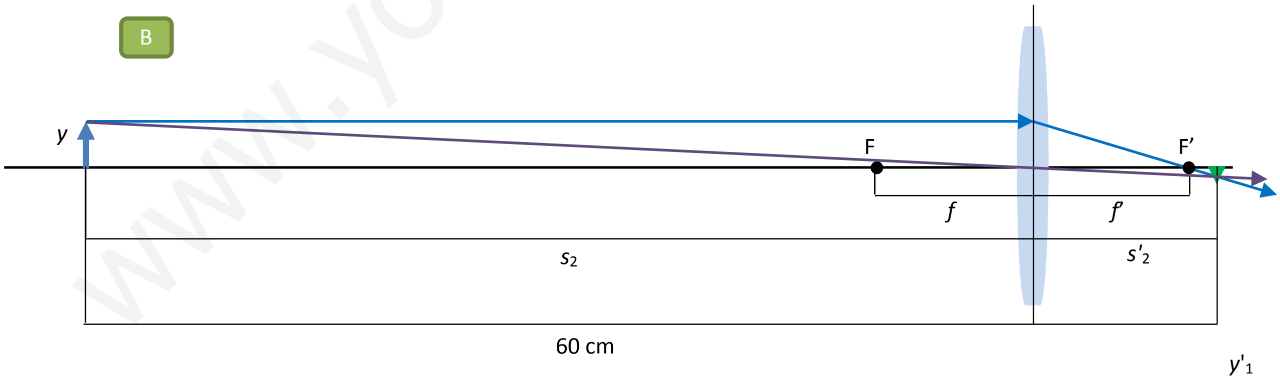
a) Calcula la distancia focal de la lente y su potencia.

b) ¿Dónde se forman las imágenes para ambas posiciones de la lente?

Para explicarlo elaboremos un esquema de las dos situaciones descritas. En este primer esquema representamos la situación en la que la lente está más próxima al objeto.



Elaboremos ahora un esquema con la lente más alejada del objeto. La separación de la lente con respecto al caso anterior es de 40 cm, según nos indica el enunciado.



Podemos escribir la ecuación de las lentes delgadas así:

$$\frac{1}{s'}-\frac{1}{s}=\frac{1}{f'}$$

El enunciado indica que el objeto está a 60 cm de la pantalla. Por tanto, fijándonos en el esquema A:

$$|s_1|+|s'_1|=60\text{ cm}$$

Como del esquema sabemos que $s_1 < 0$ y $s'_1 > 0$, podemos escribir:

$$-s_1+s'_1=60\text{ cm}\rightarrow s'_1=s_1+60\text{ cm}$$

Análogamente, fijándonos en el esquema B:

$$|s_2|+|s'_2|=60\text{ cm}$$

Como del esquema sabemos que $s_2 < 0$ y $s'_2 > 0$, podemos escribir:

$$-s_2+s'_2=60\text{ cm}\rightarrow s'_2=s_2+60\text{ cm}$$

Nos dicen además que la lente en el esquema B está separada 40 cm de su posición en el esquema A. Por tanto, podemos escribir lo siguiente:

$$|s_2|-|s_1|=40\text{ cm}$$

Como del esquema sabemos que $s_2 < 0$ y $s_1 < 0$, podemos escribir:

$$-s_2-(-s_1)=40\text{ cm}\rightarrow s_1-s_2=40\text{ cm}\rightarrow s_2=s_1-40\text{ cm}$$

a) Si se obtienen imágenes nítidas con dos posiciones de la lente separadas 40 cm entre sí, podemos escribir:

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{s'_1}-\frac{1}{s_1}=\frac{1}{f'}\\ \frac{1}{s'_2}-\frac{1}{s_2}=\frac{1}{f'}\end{aligned}\right\}\rightarrow\frac{1}{s'_1}-\frac{1}{s_1}=\frac{1}{s'_2}-\frac{1}{s_2}$$

Utilizamos las ecuaciones obtenidas anteriormente:

$$s'_1=s_1+60\text{ cm}$$

$$s_2=s_1-40\text{ cm}$$

$$s'_2=s_2+60\text{ cm}\rightarrow s'_2=\underbrace{s_1-40\text{ cm}}_{s_2}+60\text{ cm}\rightarrow s'_2=s_1+20\text{ cm}$$

Sustituimos para dejar únicamente la variable s_1 en la ecuación obtenida:

$$\frac{1}{s'_1}-\frac{1}{s_1}=\frac{1}{s'_2}-\frac{1}{s_2}\rightarrow\frac{1}{s_1+60\text{ cm}}-\frac{1}{s_1}=\frac{1}{s_1+20\text{ cm}}-\frac{1}{s_1-40\text{ cm}}$$

En esta ecuación ya podemos despejar s_1. Operamos para quitar denominadores, etc.:

$$s_1\cdot(s_1+20)\cdot(s_1-40)-(s_1+60)\cdot(s_1+20)\cdot(s_1-40)=(s_1+60)\cdot s_1\cdot(s_1-40)-(s_1+60)\cdot s_1\cdot(s_1+20)$$

Operamos y vamos simplificando:

$$(s_1+20)\cdot(s_1-40)\left[\cancel{s_1}-(\cancel{s_1}+60)\right]=(s_1+60)\cdot s_1\cdot\left[(\cancel{s_1}-40)-(\cancel{s_1}+20)\right]\rightarrow$$

$$\rightarrow(s_1+20)\cdot(s_1-40)\cdot[-(60)]=(s_1+60)\cdot s_1\cdot[(-40)-(+20)]\rightarrow$$

$$\rightarrow(s_1+20)\cdot(s_1-40)\cdot\cancel{(-60)}=(s_1+60)\cdot s_1\cdot\cancel{(-60)}\rightarrow$$

$$\rightarrow(s_1+20)\cdot(s_1-40)=(s_1+60)\cdot s_1\rightarrow\cancel{s_1^2}-40\cdot s_1+20\cdot s_1-800=60\cdot s_1+\cancel{s_1^2}\rightarrow$$

$$\rightarrow-20\cdot s_1-800=60\cdot s_1\rightarrow-80=8\cdot s_1\rightarrow s_1=-10\text{ cm}$$

Entonces podemos calcular s'_1:

$$s'_1=s_1+60\text{ cm}=-10\text{ cm}+60\text{ cm}=50\text{ cm}$$

Como podemos comprobar, la suma en valor absoluto del objeto a la lente más la distancia de la lente a la pantalla es de 60 cm.

Entonces ya podemos calcular la focal de la lente. Volviendo a la ecuación de las lentes delgadas para el esquema A:

$$\frac{1}{s'_1}-\frac{1}{s_1}=\frac{1}{f'}\rightarrow\frac{1}{50\text{ cm}}-\frac{1}{-10\text{ cm}}=\frac{1}{f'}\rightarrow f'=8{,}33\text{ cm}$$

Entonces la potencia de la lente es:

$$P=\frac{1}{f'}=\frac{1}{8{,}33\cdot10^{-2}\text{ m}}=12\text{ D}$$

b) Ya sabemos la posición de la imagen para la posición de la lente recogida en el esquema A:

$$s'_1=50\text{ cm}$$

Para el esquema B calculamos el valor de s'_2 a partir de las relaciones obtenidas anteriormente:

$$s'_2 = s_1 + 20\,\text{cm} = -10\text{ cm} + 20\,\text{cm} \rightarrow s'_2 = 10\,\text{cm}$$

33. Una lente delgada convergente tiene 20 cm de distancia focal y se utiliza para obtener una imagen de tamaño doble que el objeto. Determina a qué distancia se encuentra el objeto y su imagen de la lente si:

a) La imagen es derecha.

b) La imagen es invertida.

Realiza el diagrama de rayos para cada situación.

a) Si la imagen es ampliada y derecha, es porque el objeto está a la derecha del foco. Escribimos la ecuación fundamental de las lentes delgadas y la que liga el aumento del sistema con las posiciones del objeto y de la imagen:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'}$$

El aumento proporcionado por la lente nos aporta la otra ecuación que liga *s* y *s'*.

$$\frac{y'}{y} = \frac{s'}{s} \rightarrow 2 = \frac{s'}{s} \rightarrow 2 \cdot s = s'$$

Sustituyendo en la ecuación anterior:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'} \rightarrow \frac{1}{2 \cdot s} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'} \rightarrow \frac{1}{2 \cdot s} - \frac{1}{s} = \frac{1}{20\text{ cm}} \rightarrow$$

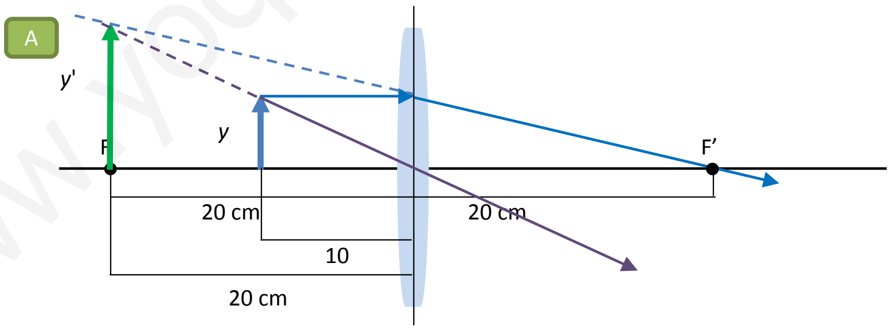
$$\rightarrow \frac{1}{2 \cdot s} - \frac{2}{2 \cdot s} = \frac{1}{20\text{ cm}} \rightarrow -\frac{1}{2 \cdot s} = \frac{1}{20\text{ cm}} \rightarrow s = -\frac{20\text{ cm}}{2} = -10\,\text{cm}$$

Esta es la distancia del objeto a la lente. La distancia de la imagen a la lente es:

$$2 \cdot s = s' \rightarrow s' = 2 \cdot (-10\text{ cm}) = -20\,\text{cm}$$

Es decir, la imagen está también a la izquierda de la lente, al doble de distancia que el objeto. Es decir, la imagen se sitúa sobre el foco de la lente.

El trazado de rayos sería el siguiente:



b) Si la imagen es ampliada invertida, es porque el objeto está a una distancia de la lente mayor que la focal y menor que el doble de la focal. Escribimos para este caso la ecuación fundamental de las lentes delgadas y la que liga el aumento del sistema con las posiciones del objeto y de la imagen:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'}$$

Ahora el aumento será negativo, puesto que la imagen es invertida.

$$\frac{y'}{y} = \frac{s'}{s} \rightarrow -2 = \frac{s'}{s} \rightarrow -2 \cdot s = s'$$

Sustituyendo en la ecuación anterior:

$$\frac{1}{s'}-\frac{1}{s}=\frac{1}{f'}\rightarrow\frac{1}{-2\cdot s}-\frac{1}{s}=\frac{1}{f'}\rightarrow\frac{-1}{2\cdot s}-\frac{1}{s}=\frac{1}{20\text{ cm}}\rightarrow$$

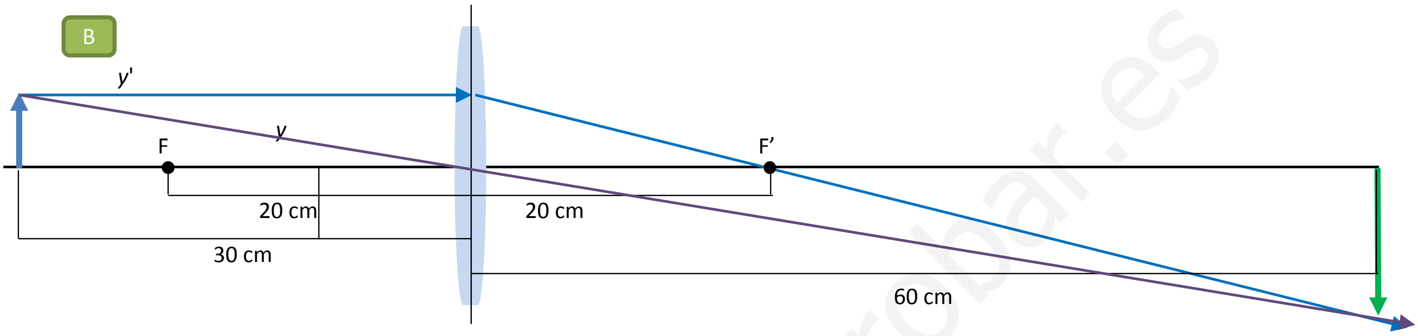
$$\rightarrow\frac{-1}{2\cdot s}-\frac{2}{2\cdot s}=\frac{1}{20\text{ cm}}\rightarrow\frac{-3}{2\cdot s}=\frac{1}{20\text{ cm}}\rightarrow s=-\frac{3\cdot 20\text{ cm}}{2}=-30\text{ cm}$$

Esta es la distancia del objeto a la lente. La distancia de la imagen a la lente es:

$$-2\cdot s=s'\rightarrow s'=-2\cdot(-30\text{ cm})=+60\text{ cm}$$

Es decir, la imagen está a la derecha de la lente en este caso.

El trazado de rayos sería el siguiente:



34. Partiendo de un objeto de 5 cm de altura queremos obtener una imagen real y de 10 cm de alto.

a) ¿Cuál debe ser la posición del objeto si usamos un espejo cóncavo de $R = 30$ cm?

b) ¿Cuál deberá ser la posición del objeto si usamos una lente convergente con la misma focal que el espejo?

c) Elabora los esquemas correspondientes.

a) Si la imagen es real y de mayor tamaño, el objeto debe estar entre el centro de curvatura y el foco del espejo. Utilizamos la ecuación general del espejo esférico:

$$\frac{1}{s'}+\frac{1}{s}=\frac{1}{f}\rightarrow\frac{1}{s'}+\frac{1}{s}=\frac{1}{R/2}$$

La imagen es real e invertida. La ecuación que nos proporciona el aumento en un espejo es:

$$\frac{y'}{y}=-\frac{s'}{s}\rightarrow\frac{-10\text{ cm}}{5\text{ cm}}=-\frac{s'}{s}\rightarrow s'=+\frac{10\text{ cm}}{5\text{ cm}}\cdot s=2\cdot s$$

Sustituimos en la ecuación anterior:

$$\frac{1}{s'}+\frac{1}{s}=\frac{1}{R/2}\rightarrow\frac{1}{2\cdot s}+\frac{1}{s}=\frac{1}{-30\text{ cm}/2}\rightarrow\frac{1}{2\cdot s}+\frac{2}{2\cdot s}=\frac{1}{-15\text{ cm}}\rightarrow$$

$$\rightarrow\frac{3}{2\cdot s}=\frac{1}{-15\text{ cm}}\rightarrow s=\frac{-3\cdot 15\text{ cm}}{2}=-22{,}5\text{ cm}$$

Posición de la imagen:

$$s'=2\cdot s=2\cdot(-22{,}5\text{ cm})=-45\text{ cm}$$

b) Si usamos una lente con la misma focal, utilizamos la ecuación general de las lentes delgadas:

$$\frac{1}{s'}-\frac{1}{s}=\frac{1}{f'}$$

Si la imagen es real y mayor que el objeto, debe ser una imagen invertida. La ecuación que nos proporciona el aumento en una lente es:

$$\frac{y'}{y}=\frac{s'}{s}\rightarrow\frac{-10\text{ cm}}{5\text{ cm}}=\frac{s'}{s}\rightarrow s'=-\frac{10\text{ cm}}{5\text{ cm}}\cdot s=-2\cdot s$$

Sustituimos en la ecuación anterior:

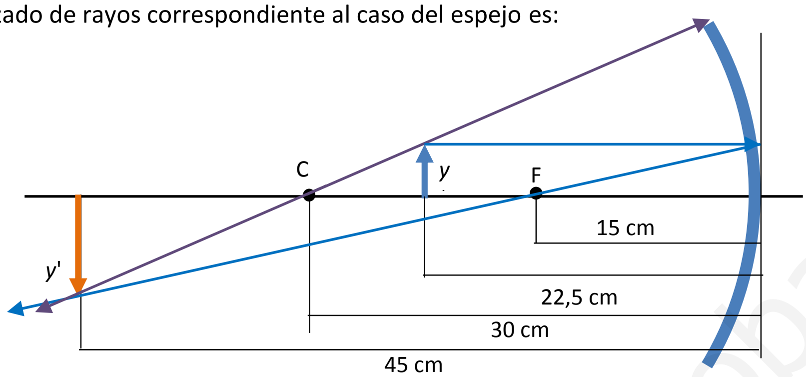
$$\frac{1}{s'}-\frac{1}{s}=\frac{1}{f'}\rightarrow\frac{1}{-2\cdot s}-\frac{1}{s}=\frac{1}{15\text{ cm}}\rightarrow\frac{-1}{2\cdot s}-\frac{2}{2\cdot s}=\frac{1}{15\text{ cm}}\rightarrow$$

$$\rightarrow\frac{-3}{2\cdot s}=\frac{1}{15\text{ cm}}\rightarrow s=\frac{-3\cdot 15\text{ cm}}{2}=-22{,}5\text{ cm}$$

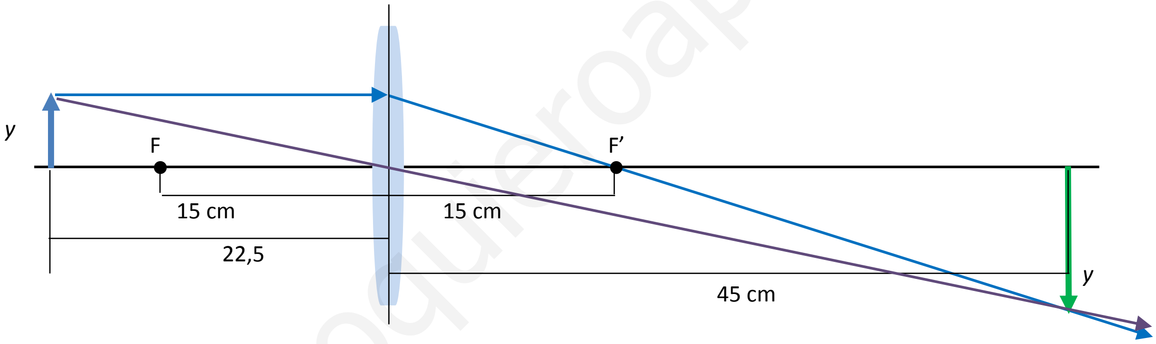
Posición de la imagen:

$$s'=-2\cdot s=-2\cdot(-22{,}5\text{ cm})=+45\text{ cm}$$

c) El trazado de rayos correspondiente al caso del espejo es:



Y el trazado de rayos correspondiente al caso de la lente es:

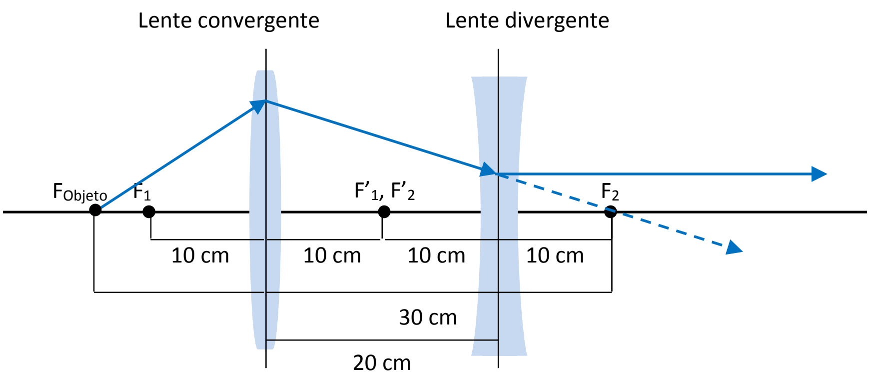


35. Un sistema óptico está formado por dos lentes separadas 20 cm; una convergente, con una focal de 10 cm, y otra divergente, con una focal de –10 cm.

a) Determina gráficamente el foco objeto y el foco imagen del sistema.

b) Calcula dónde está el foco imagen del sistema.

a) Los rayos que parten del foco objeto, por definición, salen del sistema de lentes paralelos al eje óptico. El rayo que sale paralelo de la segunda lente, la lente divergente, tenía la dirección del foco de esta lente.

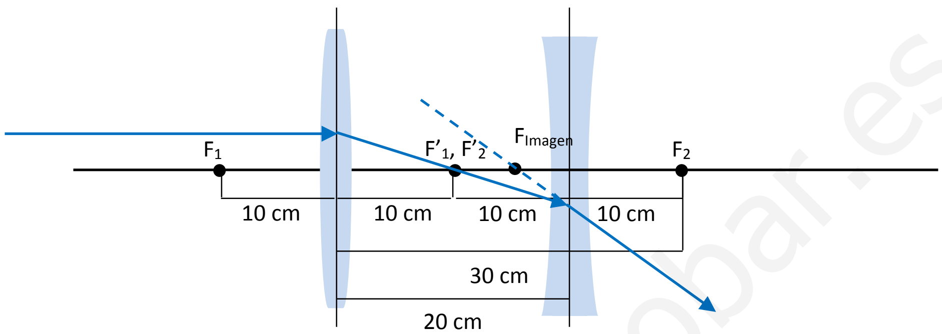


Este rayo, según se observa en el dibujo, de no existir la lente divergente, habría cortado al eje óptico en el punto donde está F_2, es decir, a una distancia de 30 cm de la lente convergente. Calculemos entonces usando la ecuación de las lentes delgadas de dónde viene dicho rayo.

$$\frac{1}{s'}-\frac{1}{s}=\frac{1}{f'_1}\rightarrow\frac{1}{30\text{ cm}}-\frac{1}{s}=\frac{1}{10\text{ cm}}\rightarrow\frac{1}{s}=\frac{1}{30\text{ cm}}-\frac{1}{10\text{ cm}}\rightarrow s=-15\text{ cm}$$

Es decir, el foco objeto está situado a 15 cm a la izquierda de la lente convergente.

Veamos ahora dónde está situado el foco imagen. El foco imagen es el punto al que llegan los rayos que entran paralelos al eje óptico después de atravesar el sistema formado por ambas lentes.



El rayo que incide paralelo en la lente divergente pasará por el foco imagen de la lente convergente y a continuación llegará hasta la lente divergente. De ahí saldrá siguiendo una dirección cuya prolongación cortará al eje óptico en el foco imagen, tal y como se muestra en el esquema.

b) Podemos calcular dónde está situado este foco imagen con la ecuación fundamental de las lentes delgadas aplicada a la lente divergente, pues sabemos que este rayo procede de un punto situado a 10 cm de la lente divergente. Es decir:

$$\frac{1}{s'}-\frac{1}{s}=\frac{1}{f'_2}\rightarrow\frac{1}{s'}-\frac{1}{-10\text{ cm}}=\frac{1}{-10\text{ cm}}\rightarrow\frac{1}{s'}=\frac{-1}{10\text{ cm}}-\frac{1}{10\text{ cm}}\rightarrow s'=-5\text{ cm}$$

Es decir, el foco imagen del sistema está situado a 5 cm a la izquierda de la lente divergente.

36. El robot *Curiosity* utiliza una cámara para fotografiar el suelo de Marte. La focal de la lente es 18,3 mm:

a) ¿Cuál es la potencia de la lente?

b) ¿Dónde se formará la imagen de un objeto situado a 10 cm de la cámara?

a) La potencia de la lente es la inversa de la distancia focal. Por tanto:

$$P=\frac{1}{f'}=\frac{1}{18{,}3\cdot10^{-3}\text{ m}}=54{,}6\text{ D}$$

b) Utilizamos la ecuación fundamental de las lentes delgadas:

$$\frac{1}{s'}-\frac{1}{s}=\frac{1}{f'}\rightarrow\frac{1}{s'}-\frac{1}{-10\text{ cm}}=\frac{1}{1{,}83\text{ cm}}\rightarrow\frac{1}{s'}=\frac{1}{1{,}83\text{ cm}}-\frac{1}{10\text{ cm}}\rightarrow s'=2{,}24\text{ cm}$$

Por tanto, la imagen se formará a 2,24 cm a la derecha de la lente de la cámara.

37. En un proyector la lente tiene una distancia focal de 0,44 cm. A una distancia de 0,45 cm de la lente se coloca un objeto de 6 cm de altura. Calcula:

a) La distancia a la que hay que situar la pantalla para observar nítida la imagen del objeto.

b) El tamaño mínimo de la pantalla para que se proyecte entera la imagen del objeto.

a) Para que la imagen esté nítida, la imagen debe formarse sobre la pantalla, es decir, a una distancia *s'*:

$$\frac{1}{s'}-\frac{1}{s}=\frac{1}{f'}\rightarrow\frac{1}{s'}-\frac{1}{-0{,}45\ \text{cm}}=\frac{1}{0{,}44\ \text{cm}}\rightarrow\frac{1}{s'}=\frac{1}{0{,}44\ \text{cm}}-\frac{1}{0{,}45\ \text{cm}}\rightarrow s'=19{,}8\ \text{cm}$$

b) El tamaño mínimo de la pantalla será igual al tamaño de la imagen formada. Para calcular el tamaño de la imagen utilizamos la expresión del aumento lateral:

$$\frac{y'}{y}=\frac{s'}{s}\rightarrow y'=\frac{s'}{s}\cdot y=\frac{19{,}8\ \text{cm}}{-0{,}45\ \text{cm}}\cdot 6\ \text{cm}=-264\ \text{cm}$$

264 cm es el tamaño de la imagen, que está invertida. Por tanto, el tamaño mínimo de la pantalla será de 2,64 m.

38. Define punto próximo y punto remoto para el ojo humano. Señala su relación con la miopía y la hipermetropía.

El punto próximo es aquel punto más cercano al ojo para el cual este puede enfocar perfectamente y formar la imagen correspondiente sobre la retina.

El punto remoto es aquel punto más lejano al ojo para el cual el ojo puede enfocar perfectamente y formar la imagen correspondiente en la retina.

En una persona miope el ojo no enfoca bien los objetos lejanos, lo que quiere decir que el punto remoto estará más cerca del ojo que para una persona normal. Por el contrario, una persona miope enfocará mejor los objetos cercanos, y entonces para ella el punto próximo estará también más cerca del ojo de lo normal.

Para una persona que sufre hipermetropía, el ojo no enfoca bien los objetos cercanos, por lo que el punto próximo estará más alejado de lo normal. Pero enfoca mejor a grandes distancias, por lo que el punto remoto estará situado también más lejos de lo normal.

En definitiva, una persona miope verá mejor de cerca que una persona sana y una persona con hipermetropía verá mejor de lejos que una persona sana.

39. Explica en qué consisten la hipermetropía y la miopía.

a) ¿Con qué tipos de lentes se corrigen?

b) ¿Qué defecto es más incómodo para un relojero? ¿Y para un pastor?

a) La hipermetropía es un defecto de la visión que impide enfocar correctamente los objetos cercanos. Se debe a una deformación del globo ocular que hace que las imágenes de objetos cercanos se formen detrás de la retina. Se corrige con lentes convergentes

La miopía es un defecto de la visión que impide enfocar correctamente los objetos lejanos. Se debe a una deformación del globo ocular que hace que las imágenes de objetos cercanos se formen delante de la retina. Se corrige con lentes divergentes.

b) Para un relojero es más incómoda la hipermetropía, pues debe trabajar con objetos situados muy cerca de él. Para un pastor es más incómoda la miopía, pues no verá bien a grandes distancias y no podrá vigilar adecuadamente a los miembros de su rebaño.

40. Considera el cristalino del ojo humano como una lente y utiliza 25 mm como diámetro del globo ocular. Calcula con estos datos la distancia focal del cristalino y su potencia cuando lees un cartel desde 55 cm de distancia.

Aplicamos la ecuación fundamental de las lentes delgadas al cristalino. En este caso la imagen se forma sobre la retina, a 25 mm de la lente, el cristalino, que actúa como una lente convergente.

$$\frac{1}{s'}-\frac{1}{s}=\frac{1}{f'}\rightarrow\frac{1}{2{,}5\ \text{cm}}-\frac{1}{-55\ \text{cm}}=\frac{1}{f'}\rightarrow f'=2{,}39\ \text{cm}$$

La potencia se calcula a partir de la distancia focal.

$$P=\frac{1}{f'}=\frac{1}{2{,}39\cdot 10^{-2}\ \text{m}}=41{,}8\ \text{D}$$

41. Las lentes de una persona miope tienen –5 D de potencia. Calcula la distancia focal imagen de la lente y halla la posición de la imagen virtual vista a través de la lente de un objeto situado a 1,5 m de la lente.

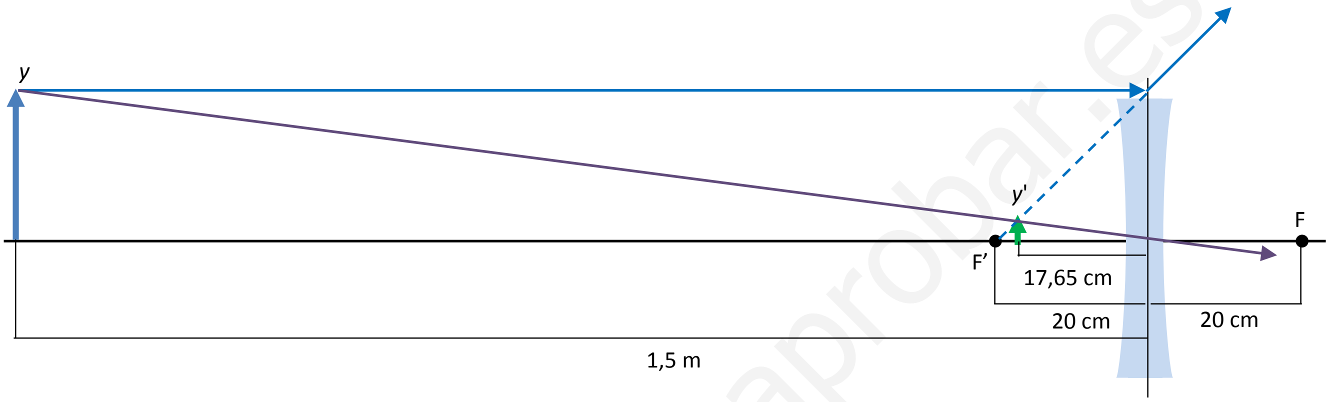
La potencia de la lente es la inversa de la distancia focal. Por tanto:

$$P = \frac{1}{f'} \rightarrow f' = \frac{1}{P} = \frac{1}{-5\,\text{D}} = -0{,}2\,\text{m} = -20\text{ cm}$$

Para calcular la posición de la imagen de un objeto situado a 1,5 m de la lente utilizamos la ecuación de las lentes delgadas:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'} \rightarrow \frac{1}{s'} - \frac{1}{-150\text{ cm}} = \frac{1}{-20\,\text{cm}} \rightarrow \frac{1}{s'} = \frac{1}{-20\,\text{cm}} - \frac{1}{150\text{ cm}} \rightarrow s' = -17{,}65\text{ cm}$$

El trazado de rayos sería este:



FÍSICA EN TU VIDA

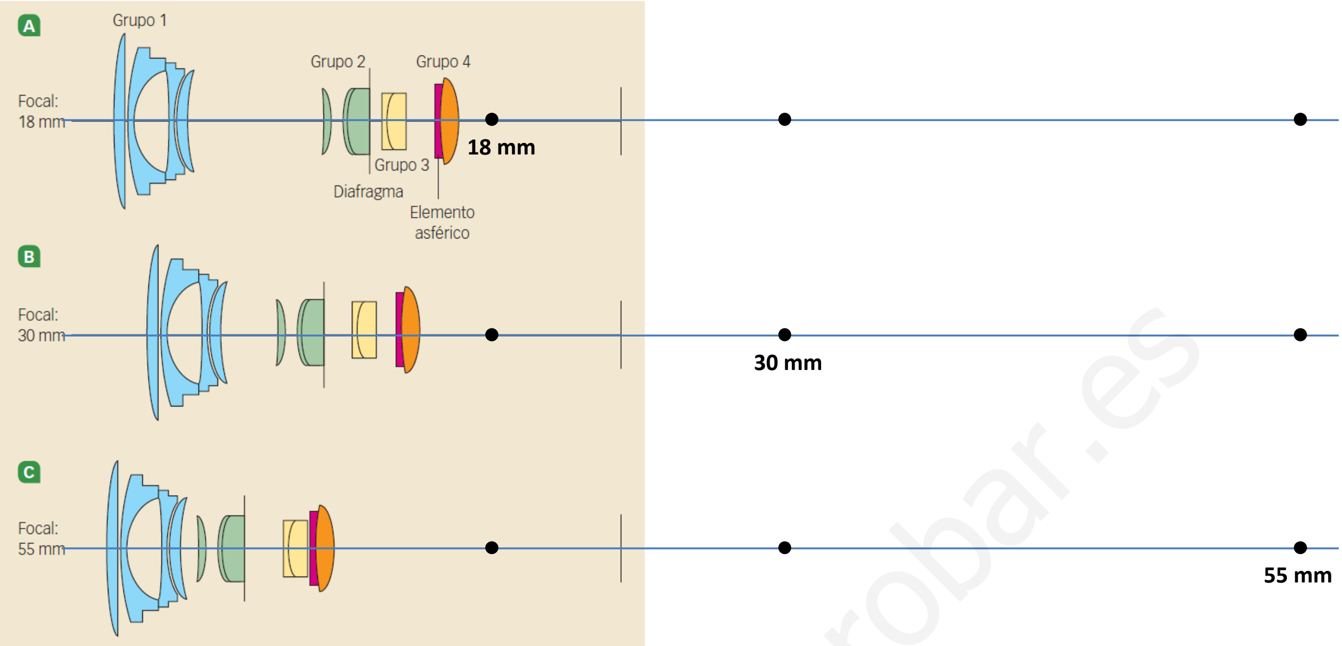
1. ¿Cuántas lentes forman parte del objetivo representado? ¿De qué tipo son?

En este objetivo representado hay 11 lentes en total. Las hay de diversos tipos. Algunas tienen una cara plana y otra curva; otras tienen ambas caras curvas…

2. ¿Pueden moverse todas las lentes de manera individual? Elabora un esquema dibujando los focos del sistema óptico para cada zoom representado.

No. En el objetivo las lentes se distribuyen en grupos. Los grupos sí pueden moverse entre sí, pero las lentes no pueden moverse unas respecto a otras dentro de un grupo.

Para el zoom donde la focal es 18 mm el foco se sitúa más cerca del conjunto de lentes. Para la focal de 50 mm el foco se sitúa más alejado. Así se consiguen más aumentos, aunque el campo de visión es menor.



3. Algunos elementos del sistema óptico se emplean para disminuir aberraciones. Explícalo.

Las aberraciones hacen que, por ejemplo, no todos los colores se enfoquen en el mismo punto. Esto ocurre cuando llegan al sistema óptico rayos que se alejan del eje óptico. Para reducir en la medida de lo posible este hecho, se diseñan lentes teniendo en cuenta el índice de refracción para cada color, por ejemplo, de manera que compensen en cierta medida esta aberración óptica.

El efecto no se elimina por completo, algo que podemos comprobar si aumentamos con mucho zoom una fotografía digital y observamos las zonas límite entre áreas claras y oscuras de la imagen, pero al menos se logra reducir el efecto lo suficiente como para no apreciarlo al contemplar las imágenes con una ampliación no demasiado elevada. Los objetivos que emplean los fotógrafos profesionales son mucho más caros que los convencionales, entre otros motivos, porque en su diseño se tienen muy en cuenta todas las posibles aberraciones y se emplean diseños que recogen la forma de las lentes y el material adecuado para compensar estas aberraciones.

PROYECTO SABER HACER

8

Relatividad

SANTILLANA

Relatividad

8

PARA COMENZAR

- **¿Qué representa cada una de las letras que aparecen en la fórmula de Einstein?**

  La *E* simboliza la energía; la *m*, la masa; y la *c*, la velocidad de la luz en el vacío. La fórmula indica que la energía y la masa son equivalentes y están relacionadas por el cuadrado de la velocidad de la luz en el vacío.

- **¿Por qué es necesario acelerar las partículas a velocidades tan altas para generar nuevas partículas de mayor masa?**

  Porque al acelerar las partículas estas adquieren mucha energía, y según la fórmula de Einstein la energía puede ser convertida en masa. Como el valor de la velocidad de la luz en el vacío es muy elevado, para poder generar partículas, aunque sean de pequeña masa, es necesario utilizar una gran cantidad de energía.

ACTIVIDADES

1. **Un niño está dentro de un tren en reposo, lanza una pelota hacia arriba y la recoge a continuación.**

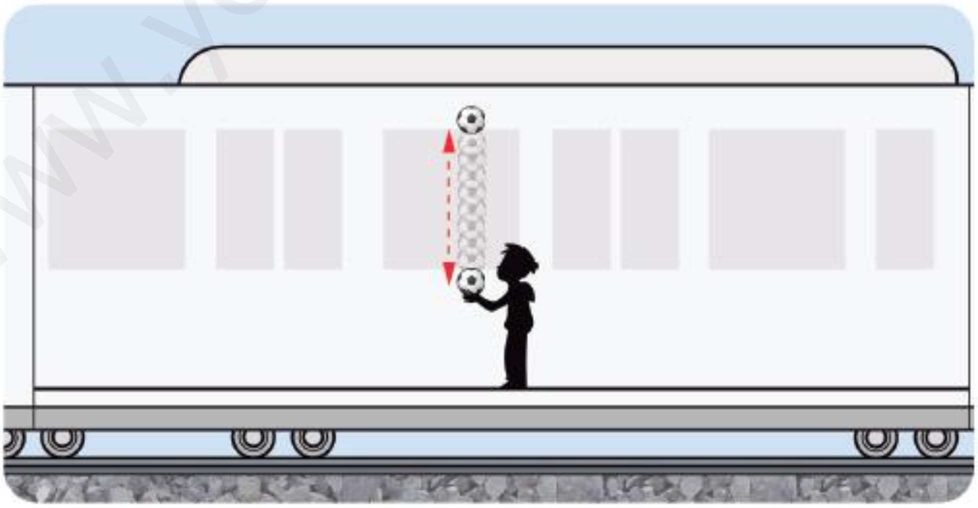
   a) Explica cómo es la trayectoria descrita por la pelota con respecto al niño. Al rato el tren arranca y el niño vuelve a lanzar la pelota, que cae nuevamente en su mano. Describe la nueva trayectoria descrita por la pelota.

   b) Cierto tiempo después el tren pasa por una estación y una joven que espera en el andén observa cómo el niño situado dentro del tren lanza y recoge la pelota tal y como se indica en el apartado a. ¿Qué trayectoria observa la joven del andén en la pelota?

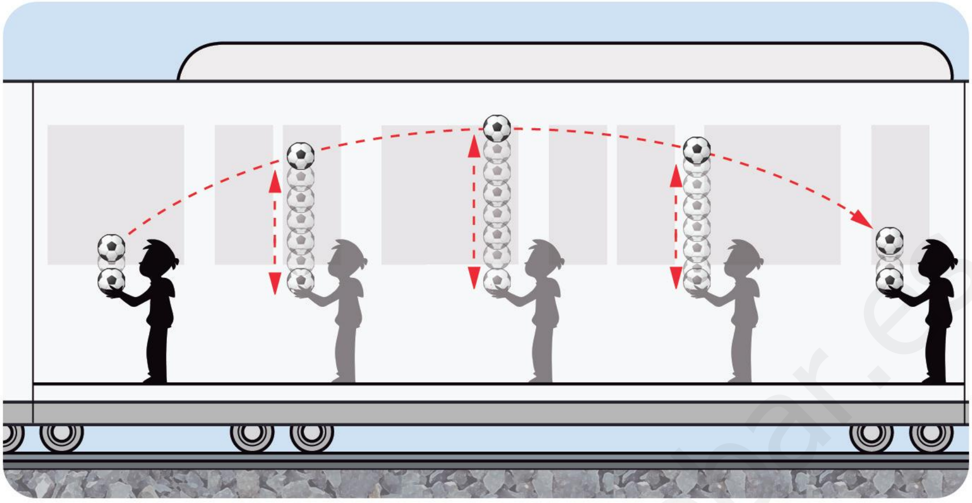
   Explica con un dibujo las trayectorias de cada apartado.

   a) Con respecto al niño, la pelota sigue una trayectoria recta. Primero sube verticalmente, luego se para y comienza de nuevo a caer verticalmente hasta que el niño la recoge de nuevo.

   Luego, con el tren moviéndose con velocidad constante, la trayectoria de la pelota respecto al niño sigue siendo una recta. La pelota sube verticalmente y luego cae verticalmente.



b) Para la joven, la trayectoria no es una recta, puesto que mientras la pelota va subiendo el tren se va desplazando respecto a ella. Para ella la trayectoria es una parábola, puesto que es la composición de dos movimientos: uno vertical con aceleración constante, la aceleración de la gravedad terrestre, y otro movimiento horizontal con velocidad constante.



2. Imagina que dos motocicletas A y B se desplazan por una carretera recta con velocidad constante. Cuando la moto B persigue a la moto A, esta comprueba que se le acerca a una velocidad de 40 km/h. Y si las motos van una al encuentro de la otra, el conductor de la moto A comprueba que la moto B se le acerca a una velocidad que es 4,5 veces mayor que la velocidad anterior.

a) Señala a qué velocidad se desplazan las motocicletas A y B.

b) Indica cuál es la aceleración de la moto A con respecto a la moto B en cada situación descrita.

a) Del primer caso se puede deducir que la velocidad de la moto B es 40 km/h mayor que la velocidad de la moto A.

$$v_B = v_A + 40$$

Del segundo caso se deduce que la suma de ambas velocidades es 4,5 veces mayor que 40 km/h. Es decir:

$$v_A + v_B = 4{,}5 \cdot 40$$

Nos queda, pues, un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Restando ambas ecuaciones:

$$v_B - (v_A + v_B) = v_A + 40 - 4{,}5 \cdot 40 \rightarrow -v_A = v_A + 40 - 4{,}5 \cdot 40 \rightarrow$$
$$\rightarrow 4{,}5 \cdot 40 - 40 = 2 \cdot v_A \rightarrow \frac{3{,}5 \cdot 40}{2} = v_A \rightarrow v_A = 70 \text{ km/h}$$

Y sustituyendo en cualquiera de las ecuaciones:

$$v_B = v_A + 40 = 70 + 40 = 110 \text{ km/h}$$

b) En ambos casos la aceleración de las dos motos es nula, pues se mueven con velocidad constante.

3. Mortimer es un gran aficionado a los viajes espaciales. Su mayor ilusión sería llegar a algún lugar de Alfa Centauro, el sistema estelar más próximo al Sol y que se encuentra a 4,36 años luz de distancia.

a) ¿A qué velocidad debe viajar la nave espacial para que su hija de diez años pueda ver regresar a su padre el día que ella cumple setenta años?

b) Si el padre tenía 30 años el día que inició el viaje, ¿cuántos tendrá a su regreso?

c) A la vista del resultado, discute la posibilidad real de realizar viajes interestelares.

a) El viaje debe producirse de tal modo que en la Tierra transcurran 60 años (Δt).

La velocidad y el tiempo que emplea Mortimer desde el sistema de referencia de su hija están relacionados mediante la expresión:

$$v = \frac{2 \cdot d}{\Delta t}$$

Sustituimos los valores conocidos para d y Δt:

$$v = \frac{2 \cdot 4{,}36 \text{ años} \cdot c}{60 \text{ años}} = 0{,}145 \cdot c$$

b) La teoría de la relatividad nos permite relacionar el intervalo de tiempo experimentado por Mortimer con el que experimenta su hija:

$$\Delta t' = \Delta t \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Sustituyendo los valores conocidos calculamos el tiempo que tarda Mortimer en su viaje desde un sistema de referencia de Mortimer:

$$\Delta t' = 60 \text{ años} \cdot \sqrt{1 - \frac{(0{,}145 \cdot c)^2}{c^2}} = 59{,}36 \text{ años}$$

Para el padre han transcurrido menos de 60 años, pues se ha movido con una velocidad del orden de la velocidad de la luz en el vacío.

Por tanto, la edad del padre cuando regrese será 30 + 59,36 años; es decir 89,36 años.

c) A partir de los resultados obtenidos podemos afirmar que sí es posible realizar viajes interestelares viajando a velocidades próximas a la de la luz aunque estemos hablando de viajes en los que las distancias son muy grandes y por ello el tiempo invertido. Además, hay que tener en cuenta que las naves que realizasen dichos viajes sufrirían el efecto de la dilatación del tiempo, este efecto los favorecería ya que disminuiría el tiempo invertido medido en el sistema de referencia de la nave en cuestión.

4. Un tren de altísima velocidad que mide 1 km de longitud en reposo pasa junto a otro tren en reposo. Para el conductor del tren en reposo, este mide 800 m y percibe que el tren en movimiento tiene la misma longitud que el suyo propio. ¿Cómo es esto posible? ¿A qué velocidad se mueve el tren?

El conductor en reposo aprecia una longitud contraída para el tren en movimiento. Por eso le parece que ambos trenes son iguales aunque cuando están en reposo la longitud del tren que está en movimiento es mayor.

La relación entre ambas longitudes viene dada por la expresión relativista correspondiente:

$$L = \frac{L'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \rightarrow 1 - \frac{v^2}{c^2} = \left(\frac{L'}{L}\right)^2 \rightarrow 1 - \left(\frac{L'}{L}\right)^2 = \frac{v^2}{c^2} \rightarrow \sqrt{1 - \left(\frac{L'}{L}\right)^2} = \frac{v}{c} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{v}{c} = \sqrt{1 - \left(\frac{800 \text{ m}}{1000 \text{ m}}\right)^2} = 0{,}6 \rightarrow v = 0{,}6c$$

5. Un muon pasa junto a la Tierra a una velocidad 0,6 · *c*. Visto desde el muon, ¿cuál es el valor del diámetro terrestre medio en una dirección paralela al movimiento del muon?

Dato: diámetro de la Tierra, medido en la Tierra = 1,3 · 10^7 m.

Para el muon la Tierra se desplaza a una velocidad de 0,6c. Por tanto, observará un diámetro de menor longitud:

$$L = \frac{L'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \rightarrow L' = L \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 1{,}3 \cdot 10^7 \text{ m} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{0{,}6 \cdot c}{c}\right)^2} =$$

$$= 1{,}3 \cdot 10^7 \text{ m} \cdot \sqrt{1 - 0{,}6^2} = 1{,}04 \cdot 10^7 \text{ m}$$

6. Supón una bombilla encendida en un tren que viaja a una velocidad de 80 km/h. Un viajero espacial pasa cerca de él a una velocidad igual a *c*. Calcula la velocidad de la luz que percibirá el viajero si avanza acercándose al tren o alejándose del mismo.

El viajero notará que la velocidad de la luz es igual a *c*, independientemente de si se aleja de la fuente de luz o se acerca. Es uno de los postulados de la relatividad especial: la velocidad de la luz es una constante; no depende de la velocidad relativa entre un observador y una fuente de luz.

7. Supón una nave espacial que viaja a la velocidad de la luz en cuyo interior hay un foco de luz encendido. Un tren que viaja a la velocidad de 80 km/h ve la luz de ese foco. Calcula la velocidad de la luz que percibirán los viajeros del tren si viaja acercándose a la nave o si viaja alejándose de la misma.

Los viajeros del tren percibirán que la velocidad de la luz procedente del foco es igual a *c*, independientemente de si se alejan de la fuente de luz o se acercan. Es uno de los postulados de la relatividad especial: la velocidad de la luz es una constante; no depende de la velocidad relativa entre un observador y una fuente de luz.

8. Contesta:

a) ¿Cuál debe ser la velocidad de una partícula para que su energía total sea un 20 % mayor que la energía que tiene en reposo?

b) Expresa el resultado obtenido en relación con el valor de la velocidad de la luz en el vacío, *c*.

Dato: $c = 3 \cdot 10^8$ m/s.

a) Si la energía total es un 20 % mayor que su energía en reposo, se puede escribir:

$$E = 1{,}2 \cdot E_0 \rightarrow m \cdot \cancel{c^2} = 1{,}2 \cdot m_0 \cdot \cancel{c^2} \rightarrow \frac{m}{m_0} = 1{,}2$$

Por otra parte, podemos escribir la relación entre la masa relativista y la masa en reposo:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \rightarrow \frac{m}{m_0} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Igualando ambas expresiones:

$$1{,}2 = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \rightarrow \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{1{,}2} \rightarrow 1 - \frac{v^2}{c^2} = \left(\frac{1}{1{,}2}\right)^2 \rightarrow 1 - \left(\frac{1}{1{,}2}\right)^2 = \left(\frac{v}{c}\right)^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{v}{c} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{1{,}2}\right)^2} \rightarrow v = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{1{,}2}\right)^2} \cdot c \rightarrow v = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{1{,}2}\right)^2} \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m/s} = 1{,}66 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

b) En función de *c*:

$$\frac{v}{c} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{1{,}2}\right)^2} \rightarrow v = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{1{,}2}\right)^2} \cdot c = 0{,}553 \cdot c$$

9. Se acelera una partícula de $m_0 = 2$ mg de modo que alcanza una velocidad igual a la mitad de la velocidad de la luz en el vacío ($3 \cdot 10^8$ m/s).

a) Calcula la masa de la partícula al moverse a la velocidad *v*.

b) Calcula la energía necesaria para que la partícula alcance dicha velocidad *v*.

a) La relación entre la masa relativista y la masa en reposo es:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{2\text{ mg}}{\sqrt{1-\frac{(0{,}5\cdot c)^2}{c^2}}} \rightarrow m = \frac{2\text{ mg}}{\sqrt{1-0{,}5^2}} = 2{,}31\text{ mg}$$

b) La energía necesaria será igual a la energía total relativista menos la energía en reposo, es decir:

$$E = E_T - E_0 = m\cdot c^2 - m_0\cdot c^2 = c^2\cdot(m-m_0) = (3\cdot 10^8\text{ m/s})^2\cdot(2{,}31\ \cancel{\text{mg}} - 2\ \cancel{\text{mg}})\cdot\frac{1\text{ kg}}{1000000\ \cancel{\text{mg}}} = 2{,}79\cdot 10^{10}\text{ J}$$

10. Señala qué aportó Einstein a la física en relación con el resultado obtenido por Michelson y Morley en su famoso experimento en el que pretendían medir la velocidad de la Tierra con respecto al éter.

Einstein postuló en su teoría de la relatividad especial que la velocidad de la luz en un invariante: no depende del sistema de referencia elegido ni de la velocidad entre la fuente de luz y el observador. La interpretación de Einstein es que el éter no existe, y por eso no se obtenían los resultados esperados por los científicos en el experimento de Michelson-Morley.

11. ¿Cuáles son los dos postulados de la teoría de la relatividad especial de Einstein? Explica el significado de ambos postulados con tus palabras.

Postulados de la teoría de la relatividad especial:

1. Primer postulado: todas las leyes de la física se cumplen por igual en todos los sistemas de referencia inerciales. Al precisar todas, Einstein se refiere tanto a las leyes de la mecánica como a las del electromagnetismo y la óptica. Esto significa que la forma que adoptan las ecuaciones que describen las leyes de la física son la misma en dos sistemas de referencia si uno de ellos se mueve con velocidad constante respecto al otro.
2. Segundo postulado. La velocidad de la luz en el vacío, *c*, es la misma para todos los sistemas de referencia inerciales y es independiente del movimiento relativo entre la fuente emisora y el observador. Esto quiere decir que mediremos el mismo valor aunque nos movamos hacia la fuente de luz o nos alejemos de ella.

12. Una niña en reposo mide el tiempo que transcurre entre dos sucesos. Un niño en movimiento mide también el tiempo transcurrido entre ambos sucesos. Di si el niño y la niña obtienen el mismo resultado. Explica tu respuesta.

Los resultados son diferentes. La diferencia es mayor cuanto mayor sea la velocidad relativa del niño respecto de la niña. En realidad, solo se podrán diferenciar ambos tiempos cuando esta velocidad es del orden de la velocidad de la luz en el vacío.

13. Se coordinan dos relojes de forma que marquen la misma hora. Uno de ellos se deja en la Tierra y el otro se lleva a una nave espacial que despega a las 12:00 con $v = 0{,}9c$ y vuelve a la Tierra cuando su reloj marca las 13:00. ¿Qué hora marcará el reloj que ha quedado en la Tierra?

En el sistema de referencia de la nave ha pasado una hora. Para calcular cuánto tiempo ha pasado en la Tierra usamos las expresiones relativistas que ligan ambos intervalos de tiempo:

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1\text{ h}}{\sqrt{1-\frac{(0{,}9\cdot c)^2}{c^2}}} == \frac{1\text{ h}}{\sqrt{1-0{,}9^2}} = 2{,}29\text{ h} = 2\text{ h } 17'\ 24''$$

Por tanto, el reloj que ha quedado en Tierra marcará las 14:17:24.

14. Se mide el tiempo de vida de una partícula en movimiento y se comprueba que es de $3{,}8\cdot 10^{-8}$ s, mientras que el tiempo de vida de la misma partícula en reposo es $4\cdot 10^{-8}$ s. ¿Es posible? ¿A qué velocidad se movería?

Dato: $c = 3\cdot 10^8$ m/s.

Si empleamos la expresión relativista que liga ambos intervalos, tendríamos.

$$\Delta t=\frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\rightarrow\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=\frac{\Delta t'}{\Delta t}\rightarrow 1-\frac{v^2}{c^2}=\left(\frac{\Delta t'}{\Delta t}\right)^2\rightarrow 1-\left(\frac{\Delta t'}{\Delta t}\right)^2=\frac{v^2}{c^2}\rightarrow$$

$$\rightarrow\sqrt{1-\left(\frac{\Delta t'}{\Delta t}\right)^2}=\frac{v}{c}\rightarrow v=\sqrt{1-\left(\frac{\Delta t'}{\Delta t}\right)^2}\cdot c=\sqrt{1-\left(\frac{4\cdot 10^{-8}\text{ s}}{3{,}8\cdot 10^{-8}\text{ s}}\right)^2}\cdot 3\cdot 10^8\text{ m/s}=\text{No existe solución}$$

Esto quiere decir que no es posible la situación planteada. En efecto, cuando la partícula está en movimiento su tiempo de vida es mayor. (Revisar el ejemplo de los muones).

15. Imagina una nave espacial de 100 m de longitud. Los habitantes de una colonia espacial la observan pasar y dicen que mide 99 m. ¿Cuál es la velocidad de la nave respecto de los habitantes de la colonia?

Dato: $c = 3\cdot 10^8$ m/s.

De nuevo aplicando las expresiones relativistas:

$$L=\frac{L'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\rightarrow 1-\frac{v^2}{c^2}=\left(\frac{L'}{L}\right)^2\rightarrow 1-\left(\frac{L'}{L}\right)^2=\frac{v^2}{c^2}\rightarrow\sqrt{1-\left(\frac{L'}{L}\right)^2}=\frac{v}{c}\rightarrow$$

$$\rightarrow\frac{v}{c}=\sqrt{1-\left(\frac{99}{100}\right)^2}=0{,}14\rightarrow v=4{,}23\cdot 10^7\text{ m/s}$$

16. Una barra se mueve a una velocidad 0,9*c*. Si en reposo su longitud es de 2 m, ¿cuál es la longitud de la barra cuando está en movimiento?

Procediendo análogamente a casos anteriores:

$$L=\frac{L'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\rightarrow L'=L\cdot\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=2\text{ m}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{0{,}9\cdot c}{c}\right)^2}=2\text{ m}\cdot\sqrt{1-0{,}9^2}=0{,}87\text{ m}$$

17. Un observador ve pasar una regla de 50 cm junto a él moviéndose a una velocidad muy alta en la dirección de la longitud de la regla. Mide la longitud y obtiene un valor de 46 cm. ¿A qué velocidad se desplaza la regla?

La contracción observada por el observador se debe a la elevada velocidad con que se mueve la regla.

$$L=\frac{L'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\rightarrow 1-\frac{v^2}{c^2}=\left(\frac{L'}{L}\right)^2\rightarrow 1-\left(\frac{L'}{L}\right)^2=\frac{v^2}{c^2}\rightarrow\sqrt{1-\left(\frac{L'}{L}\right)^2}=\frac{v}{c}\rightarrow$$

$$\rightarrow\frac{v}{c}=\sqrt{1-\left(\frac{46\text{ cm}}{50\text{ cm}}\right)^2}=0{,}39\rightarrow v=0{,}39c$$

18. La distancia Madrid-Sevilla es de 470 km, que el AVE recorre a una velocidad media de 300 km/h. Utilizando la corrección relativista, determina la distancia Madrid-Sevilla que percibe un pasajero de dicho tren.

Dato: $c = 3\cdot 10^8$ m/s.

Como la velocidad es mucho menor que la velocidad de la luz en el vacío, los efectos relativistas no serán apreciables. En cualquier caso, hacemos los cálculos para comprobarlo:

$$L=\frac{L'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\rightarrow L'=L\cdot\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=470\text{ km}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{300\text{ km/h}\cdot\frac{1\text{ h}}{3600\text{ s}}\cdot\frac{1000\text{ m}}{1\text{ km}}}{3\cdot10^8\text{ m/s}}\right)^2}\simeq 470\text{ km}$$

19. Una nave se aleja de la Tierra a 1,5 · 10⁸ m/s mientras una estación de seguimiento terrestre emite un haz láser hacia la nave. ¿Qué velocidad para el haz miden los astronautas de la nave?

La velocidad que miden es exactamente la velocidad de la luz en el vacío: $3\cdot10^8$m/s. Incluso aunque la nave se mueva a velocidades relativistas.

20. Una partícula se mueve con $v = 0{,}98c$. Calcula la relación entre su masa relativista y su masa en reposo.

En este caso aplicamos la fórmula de Einstein para la masa relativista:

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\rightarrow\frac{m}{m_0}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{(0{,}98\cdot c)^2}{c^2}}}\simeq 5$$

21. ¿Qué velocidad máxima podría alcanzar una partícula si le damos cada vez más energía? ¿Cuál sería su masa relativista si la partícula pudiera alcanzar la velocidad de la luz? Explica tus respuestas.

Si le damos cada vez más energía a una partícula, su velocidad va aumentando, pero también su masa, con lo cual cada vez nos cuesta más acelerarla. En el momento en que alcanzase la velocidad de la luz en el vacío sería necesaria una energía infinita para poder acelerarla más. Así, la velocidad máxima que puede alcanzar es *c*, la velocidad de la luz en el vacío.

22. La energía total relativista de un cuerpo ¿puede ser mayor que su energía en reposo? ¿Puede ser igual? ¿Y menor?

La energía total relativista sí puede ser mayor que su energía en reposo. Puede ser igual si el cuerpo está en reposo. Pero no puede ser menor que la energía en reposo. La expresión de la energía total relativista es:

$$E=m\cdot c^2$$

Expresándolo en función de la masa:

$$E=m\cdot c^2=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\cdot c^2$$

Cuando la velocidad es nula, la energía relativista coincide con la energía en reposo. Cualquier otro valor de la velocidad hace que el denominador de la expresión anterior sea menor que uno y, por tanto, la energía relativista es siempre mayor o igual que la energía en reposo.

23. La masa del bosón de Higgs es $2{,}24\cdot10^{-25}$ kg. Comprueba que equivale a 126 GeV, según la ecuación de Einstein.

Datos: 1 eV = $1{,}6\cdot10^{-19}$ J; $c = 3\cdot10^8$ m/s.

Aplicando la expresión de la energía relativista:

$$E=m_0\cdot c^2=2{,}24\cdot10^{-25}\text{ kg}\cdot\left(3\cdot10^8\text{ m/s}\right)^2=2{,}016\cdot10^{-8}\text{ J}$$

Utilizando la equivalencia entre electronvoltio y julio:

$$2{,}016\cdot 10^{-8}\ \cancel{J}\cdot\frac{1\ \cancel{eV}}{1{,}6\cdot 10^{-19}\ \cancel{J}}\cdot\frac{1\ \text{GeV}}{10^{9}\ \cancel{eV}}=126\ \text{GeV}$$

24. En el sincrotrón ALBA se aceleran electrones de modo que su masa llega a ser 6000 veces la masa en reposo. Calcula la energía de los electrones en J y en MeV.

Datos: $c = 3\cdot 10^8$ m/s; $m_e = 9{,}1\cdot 10^{-31}$ kg; $e = 1{,}6\cdot 10^{-19}$ C.

La energía se puede calcular a partir de su masa relativista:

$$E=m\cdot c^2=6000\cdot m_0\cdot c^2=6000\cdot 9{,}1\cdot 10^{-31}\ \text{kg}\cdot\left(3\cdot 10^8\ \text{m/s}\right)^2=4{,}914\cdot 10^{-10}\ \text{J}$$

Ahora lo expresamos en electronvoltios teniendo en cuenta que la equivalencia eV-J coincide con el valor numérico de la carga del electrón:

$$4{,}914\cdot 10^{-10}\ \cancel{J}\cdot\frac{1\ \cancel{eV}}{1{,}6\cdot 10^{-19}\ \cancel{J}}\cdot\frac{1\,\text{MeV}}{10^{6}\ \cancel{eV}}=3071{,}25\,\text{MeV}$$

25. ¿Con qué velocidad se mueve una partícula si su energía total es el triple que su energía en reposo?

En este caso:

$$E=3\cdot E_0\rightarrow m\cdot c^2=3\cdot m_0\cdot c^2\rightarrow\frac{m}{m_0}=3$$

Por otra parte, podemos escribir la relación entre la masa relativista y la masa en reposo:

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\rightarrow\frac{m}{m_0}=\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$$

Igualando ambas expresiones:

$$3=\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\rightarrow\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=\frac{1}{3}\rightarrow 1-\frac{v^2}{c^2}=\left(\frac{1}{3}\right)^2\rightarrow 1-\left(\frac{1}{3}\right)^2=\left(\frac{v}{c}\right)^2\rightarrow$$

$$\rightarrow\frac{v}{c}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}\rightarrow v=\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}\cdot c=0{,}943c$$

26. En un experimento chocan dos haces de protones con la misma velocidad. Tras la colisión se genera un par protón (p^+)-antiprotón (p^-). Calcula:

a) La mínima energía relativista que debe tener cada protón para que se produzca ese hecho.

b) La masa relativista de cada protón.

c) La energía cinética de cada protón.

Datos: $m_{p+} = m_{p-} = 1{,}67\cdot 10^{-27}$ kg; $c = 3\cdot 10^8$ m/s.

a) Si ambas partículas llevan la misma velocidad, como su masa es la misma, ambas tendrán la misma energía relativista. Tras el choque se generan dos nuevas partículas. La energía de los protones será mínima cuando todas las partículas generadas estén en reposo. En ese caso podemos escribir la siguiente expresión:

$$E_{p+}+E_{p+}=m_{0\,p+}\cdot c^2+m_{0\,p+}\cdot c^2+m_{0\,p+}\cdot c^2+m_{0\,p-}\cdot c^2\rightarrow 2\cdot E_{p+}=4\cdot m_{0\,p+}\cdot c^2\rightarrow E_{p+}=\frac{4\cdot m_{0\,p+}\cdot c^2}{2}$$

$$\rightarrow E_{p+}=2\cdot m_{0\,p+}\cdot c^2=2\cdot 1{,}67\cdot 10^{-27}\ \text{kg}\cdot\left(3\cdot 10^8\ \text{m/s}\right)^2=3\cdot 10^{-10}\ \text{J}$$

b) La masa relativista de cada protón la podemos obtener a partir de la energía:

$$E_{p+} = m_{p+} \cdot c^2 \rightarrow m_{p+} = \frac{E_{p+}}{c^2} = \frac{3 \cdot 10^{-10}\ \text{J}}{\left(3 \cdot 10^8\ \text{m/s}\right)^2} = 3{,}34 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}$$

c) Para calcular la energía cinética de cada protón no se puede emplear la fórmula clásica, pues los protones se mueven a velocidades relativistas. Entonces se puede calcular la energía cinética como la energía relativista total menos la energía en reposo. Es decir:

$$E_C = m_{p+} \cdot c^2 - m_{0\,p+} \cdot c^2 = c^2 \cdot \left(m_{p+} - m_{0\,p+}\right) =$$
$$= \left(3 \cdot 10^8\ \text{m/s}\right)^2 \cdot \left(3{,}34 \cdot 10^{-27}\ \text{kg} - 1{,}67 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}\right) = 1{,}5 \cdot 10^{-10}\ \text{J}$$

27. La energía del Sol llega a la Tierra con una potencia de 1,4 kW/m². Si la Tierra está a 1,5 · 10¹¹ m del Sol, calcula la masa que pierde diariamente el Sol.

Dato: $c = 3 \cdot 10^8$ m/s.

Simplemente hay que convertir la energía perdida por el Sol en la masa equivalente usando la fórmula de Einstein. Como el dato nos indica la potencia, para calcular la energía queda:

$$1{,}4\ \frac{\text{W}}{\text{m}^2} = 1{,}4\ \frac{\text{J/s}}{\text{m}^2}$$

Con el dato de la distancia Sol-Tierra podemos calcular la potencia total que llega a la Tierra multiplicando por la superficie de una esfera con radio igual a la distancia Tierra-Sol:

$$1{,}4\ \frac{\text{W}}{\cancel{\text{m}^2}} \cdot 4\pi \cdot \left(1{,}5 \cdot 10^{11}\ \cancel{\text{m}}\right)^2 = 3{,}96 \cdot 10^{23}\ \text{W} = 3{,}96 \cdot 10^{23}\ \frac{\text{J}}{\text{s}}$$

Ahora multiplicamos por los segundos que tiene un día:

$$3{,}96 \cdot 10^{23}\ \frac{\text{J}}{\cancel{\text{s}}} \cdot \frac{24\ \cancel{\text{h}}}{1\ \text{día}} \cdot \frac{3600\ \cancel{\text{s}}}{1\ \cancel{\text{h}}} = 3{,}42 \cdot 10^{28}\ \frac{\text{J}}{\text{día}}$$

Ahora calculamos la masa equivalente:

$$E = m \cdot c^2 \rightarrow m = \frac{E}{c^2} = \frac{3{,}42 \cdot 10^{28}\ \frac{\text{J}}{\text{día}}}{\left(3 \cdot 10^8\ \text{m/s}\right)^2} = 3{,}8 \cdot 10^{11}\ \text{kg/día}$$

Aunque parezca una masa muy grande, es una cantidad pequeña comparada con la masa total del Sol.

FÍSICA EN TU VIDA

1. Explica por qué existe una diferencia entre el tiempo medido por un satélite y un reloj en suelo firme al cabo de cinco años debido a la teoría general de la relatividad.

Porque los campos gravitatorios afectan al espacio-tiempo. En concreto, los relojes en las inmediaciones de un campo gravitatorio van más despacio. Por esto un reloj en un satélite, donde el campo gravitatorio es ligeramente inferior al campo gravitatorio en la superficie terrestre, marcará una hora ligeramente diferente.

2. Calcula el desfase anual introducido en los relojes de los satélites del sistema GPS debido al hecho de que se mueven a una velocidad de 14 000 km/h (3,87 km/s). ¿Es mayor o menor que el comentado en el texto?

Cuando en suelo firme ha transcurrido un año. En un satélite con cierta velocidad el tiempo será ligeramente menor.

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \rightarrow \Delta t' = 1\ \text{año} \cdot \sqrt{1-\left(\frac{3870\ \text{m/s}}{3\cdot 10^8\ \text{m/s}}\right)^2} = 0{,}9999999999167\ \text{años} = 31557599{,}9974\ \text{s}$$

En un año hay 31 557 600 s. Es decir, hay una diferencia de 26 ms al año. Menor que la que se indica en el texto, pues aquí no se han tenido en cuenta los efectos predichos por la relatividad general.

3. El sistema de navegación Galileo, impulsado por muchos países europeos, ha tenido un coste de varios miles de millones de euros.

a) ¿Te parece bien gastar este dinero teniendo en cuenta que ya existe un sistema, el GPS, que ofrece un servicio parecido?

b) ¿Qué ventajas crees que aporta el sistema Galileo, de carácter civil, frente al sistema GPS estadounidense, de carácter militar?

a) Respuesta personal.

b) Las ventajas de un sistema civil es que no se desactivaría en tiempos de conflictos armados, como ya ha ocurrido en alguna ocasión con el sistema GPS.

PROYECTO SABER HACER

9

Física cuántica

SANTILLANA

Física cuántica

9

PARA COMENZAR

- **¿Por qué el espectro observado del boro es diferente del espectro del aluminio, si en ambos casos hay tres electrones en el último nivel electrónico ocupado?**

  Porque los niveles de energía tienen diferente energía. Esto se debe, por ejemplo, a que la carga del núcleo no es la misma en ambos casos. Y el número de electrones total también es diferente. Así, cuando los electrones cambian de un nivel energético a otro la diferencia de energía entre ellos no es igual en el boro que en el aluminio.

- **¿Cómo pueden recibir energía los electrones de un átomo y pasar a un nivel energético superior?**

  Por ejemplo, cuando un fotón incide sobre el electrón en un nivel bajo de energía con una energía que sea igual a la diferencia de energía entre el nivel en que se encuentra el electrón y otro nivel superior.

ACTIVIDADES

1. **La tabla siguiente muestra la longitud de onda de algunas radiaciones del espectro de la luz solar. Complétala calculando la frecuencia de cada una.**

   Datos: $c = 3 \cdot 10^8$ m/s; 1 nm = 10^{-9} m.

Radiación	λ (nm)	f (s^{-1} o Hz)
Violeta	400	
Verde	550	
Rojo	700	

A partir de la longitud de onda es sencillo calcular la frecuencia aplicando la siguiente expresión en cada caso:

$$c = \lambda \cdot f \rightarrow f = \frac{c}{\lambda}$$

Violeta:

$$f_{\text{Violeta}} = \frac{c}{\lambda_{\text{Violeta}}} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{400 \cdot 10^{-9} \text{ m}} = 7{,}5 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$$

Verde:

$$f_{\text{Verde}} = \frac{c}{\lambda_{\text{Verde}}} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{550 \cdot 10^{-9} \text{ m}} = 5{,}45 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$$

Rojo:

$$f_{\text{Rojo}} = \frac{c}{\lambda_{\text{Rojo}}} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{700 \cdot 10^{-9} \text{ m}} = 4{,}29 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$$

2. **Una lámpara emite luz verde con una potencia de 10 W. Calcula cuál será la intensidad de luz que recibe un objeto que se encuentra a 2 m del foco. ¿Y si estuviese a 50 cm del foco?**

La potencia se reparte en el área de la esfera cuyo radio es igual a la distancia al foco. Por tanto, podemos escribir la siguiente:

$$I = \frac{P}{S} = \frac{P}{4\pi \cdot d^2} = \frac{10 \text{ W}}{4\pi \cdot (2 \text{ m})^2} = 0{,}2 \text{ W/m}^2$$

Si la distancia es menor, igual a 50 cm:

$$I = \frac{P}{S} = \frac{P}{4\pi \cdot d^2} = \frac{10\ \text{W}}{4\pi \cdot (0{,}5\ \text{m})^2} = 3{,}18\ \text{W/m}^2$$

Es decir, si la distancia a la lámpara disminuye, la potencia es mayor.

3. **¿Por qué la experiencia de la lámina de oro obligó a rechazar el modelo atómico de Thomson?**

Porque en el modelo de Thomson la carga estaba distribuida por todo el átomo, mientras que la experiencia de la lámina de oro demostró que existen zonas en el átomo donde hay concentrada carga positiva (los protones) y otras que están libres de carga, vacías, por donde las partículas alfa que actuaban como proyectiles pasaban sin experimentar desviación alguna.

4. **Al realizar una experiencia para estudiar el espectro de emisión térmica de un cuerpo negro encontramos que el máximo de emisión coincide con la longitud de onda de 600 nm (color naranja). Calcula:**

a) La temperatura del cuerpo negro en esa experiencia.

b) La intensidad de la radiación emitida.

Datos: cte. Wien = 2,898 · 10^{-3} m · K; σ = 5,67 · 10^{-8} W · m^{-2} · K^{-4}.

a) Podemos aplicar la ley de desplazamiento de Wien:

$$\lambda_{\text{máx.}} \cdot T = 2{,}898 \cdot 10^{-3}\ \text{m} \cdot \text{K} \rightarrow T = \frac{2{,}898 \cdot 10^{-3}\ \text{m} \cdot \text{K}}{\lambda_{\text{máx.}}} = \frac{2{,}898 \cdot 10^{-3}\ \text{m} \cdot \text{K}}{600 \cdot 10^{-9}\ \text{m}} = 4830\ \text{K}$$

b) En este caso aplicaremos la ley de Stefan-Boltzmann, que relaciona la energía emitida por la unidad de tiempo por un cuerpo negro (potencia emitida) con su temperatura absoluta:

$$\frac{dE}{dt} = \sigma \cdot S \cdot T^4 \rightarrow \frac{dE}{dt \cdot S} = \sigma \cdot T^4 = 5{,}67 \cdot 10^{-8}\ \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}^4} \cdot (4830\ \text{K})^4 = 3{,}09 \cdot 10^7\ \text{W/m}^2$$

5. **Un excursionista observa una aurora boreal. La luz emitida tiene una longitud de onda de 557,7 nm. ¿Cuánta energía tiene cada fotón que forma la aurora?**

Datos: *h* = 6,63 · 10^{-34} J · s; *c* = 3 · 10^8 m/s.

En este caso aplicamos la fórmula de Planck para calcular la energía del fotón:

$$E = h \cdot f = h \cdot \frac{c}{\lambda} = 6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s} \cdot \frac{3 \cdot 10^8\ \text{m/s}}{557{,}7 \cdot 10^{-9}\ \text{m}} = 3{,}57 \cdot 10^{-19}\ \text{J}$$

6. **La energía correspondiente a un fotón es de 6 · 10^{-20} J. ¿Cuál será la energía que transporta un fotón cuya longitud de onda es el doble de este valor?**

De nuevo aplicamos la fórmula de Planck para calcular la energía del fotón en ambos casos:

$$E = h \cdot f \rightarrow \begin{cases} E_1 = h \cdot f_1 \\ E_2 = h \cdot f_2 \end{cases}$$

Para el primer fotón:

$$E_1 = h \cdot f_1 = h \cdot \frac{c}{\lambda_1} \rightarrow \lambda_1 = h \cdot \frac{c}{E_1}$$

Para el segundo fotón:

$$E_2 = h \cdot f_2 = h \cdot \frac{c}{\lambda_2} = h \cdot \frac{c}{2 \cdot \lambda_1} = \cancel{h} \cdot \frac{\cancel{c}}{2 \cdot \cancel{h} \cdot \frac{\cancel{c}}{E_1}} = \frac{E_1}{2} = \frac{6 \cdot 10^{-20}\ \text{J}}{2} = 3 \cdot 10^{-20}\ \text{J}$$

La energía es inversamente proporcional a la longitud de onda. Así, si la longitud de onda se duplica, la energía del fotón se reduce a la mitad.

7. Un fotón, si tiene la energía adecuada, puede romper una molécula. Por ejemplo, en la estratosfera los fotones ultravioletas pueden romper las moléculas de oxígeno. En este caso la energía necesaria para el proceso es de 5 eV. Calcula cuál debe ser la longitud de onda máxima del fotón ultravioleta en este proceso.

Datos: $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C; $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ J · s; $c = 3 \cdot 10^{8}$ m/s.

La longitud de onda máxima es aquella que corresponde al caso límite, es decir, aquella que hace que el fotón tenga 5 eV de energía:

$$E = h \cdot f = h \cdot \frac{c}{\lambda} \rightarrow \lambda = h \cdot \frac{c}{E} = 6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s} \frac{3 \cdot 10^{8}\ \text{m/s}}{5\ \text{eV} \cdot \dfrac{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{J}}{1\ \text{eV}}} = 2{,}486 \cdot 10^{-7}\ \text{m} = 248{,}6\ \text{nm}$$

Todos los fotones con una longitud de onda menor tendrán más energía que este y, por tanto, podrán romper la molécula citada.

8. A una superficie de cinc llega luz ultravioleta de 150 nm de longitud de onda.

a) Calcula cuál es la velocidad de los electrones extraídos sabiendo que la función de trabajo del cinc es de 4,31 eV, si es que se produce el efecto fotoeléctrico.

b) A continuación usamos luz cuya longitud de onda es justo la mitad que el caso anterior. ¿Cuál será entonces el valor de la velocidad con la que salen extraídos los electrones del metal?

Datos: $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg; $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ J · s; $c = 3 \cdot 10^{8}$ m/s; 1 eV $= 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ J.

a) Aplicamos la ecuación de Einstein para el efecto fotoeléctrico. La energía de los fotones se invierte, por una parte, en extraer los electrones del metal, y por otra, en acelerar los electrones extraídos. Es decir:

$$E_{\text{Fotón}} = W_{\text{Extracción}} + E_{\text{C Electrón}} \rightarrow E_{\text{C Electrón}} = E_{\text{Fotón}} - W_{\text{Extracción}} \rightarrow \frac{1}{2} m \cdot v^2 = E_{\text{Fotón}} - W_{\text{Extracción}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} m_e \cdot v^2 = E_{\text{Fotón}} - W_{\text{Extracción}} \rightarrow v = \sqrt{2 \cdot \frac{E_{\text{Fotón}} - W_{\text{Extracción}}}{m_e}} = \sqrt{2 \cdot \frac{\dfrac{h \cdot c}{\lambda} - W_{\text{Extracción}}}{m_e}} =$$

$$= \sqrt{2 \cdot \frac{\dfrac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s} \cdot 3 \cdot 10^{8}\ \text{m/s}}{150 \cdot 10^{-9}\ \text{m}} - 4{,}31\ \text{eV} \cdot \dfrac{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{J}}{1\ \text{eV}}}{9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}}} = 1{,}18 \cdot 10^{6}\ \text{m/s}$$

b) Si la longitud de onda es justo la mitad, entonces la energía de los fotones es el doble que en el caso anterior y los electrones saldrán con una velocidad mayor. Aplicando la expresión anterior a los nuevos datos obtenemos:

$$v = \sqrt{2 \cdot \frac{E_{\text{Fotón}} - W_{\text{Extracción}}}{m_e}} = \sqrt{2 \cdot \frac{\dfrac{h \cdot c}{\lambda} - W_{\text{Extracción}}}{m_e}} =$$

$$= \sqrt{2 \cdot \frac{\dfrac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s} \cdot 3 \cdot 10^{8}\ \text{m/s}}{75 \cdot 10^{-9}\ \text{m}} - 4{,}31\ \text{eV} \cdot \dfrac{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{J}}{1\ \text{eV}}}{9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}}} = 2{,}08 \cdot 10^{6}\ \text{m/s}$$

9. Se sabe que el trabajo de extracción de electrones para un determinado metal es de 4,34 eV. Calcula cuál es la longitud de onda máxima para producir el efecto fotoeléctrico en dicho metal.

Datos: 1 eV $= 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ J; $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ J · s; $c = 3 \cdot 10^{8}$ m/s.

La longitud de onda máxima es aquella que hace que el fotón tenga una energía igual al trabajo de extracción del metal. Es decir, cuando la energía cinética del electrón es nula:

$$E_{\text{Fotón}} = W_{\text{Extracción}} \rightarrow \frac{h \cdot c}{\lambda} = W_{\text{Extracción}} \rightarrow \lambda = \frac{h \cdot c}{W_{\text{Extracción}}} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s} \cdot 3 \cdot 10^{8}\ \text{m/s}}{4{,}34\ \text{eV} \cdot \dfrac{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{J}}{1\ \text{eV}}} = 2{,}86 \cdot 10^{-7}\ \text{m} = 286\ \text{nm}$$

10. Con un rayo de luz de determinada longitud de onda no se produce efecto fotoeléctrico en un metal. ¿Qué podemos hacer para conseguir dicho efecto?

a) Aumentar el potencial de frenado.

b) Incrementar la longitud de onda.

c) Elevar la frecuencia.

La respuesta correcta es la c. Si la luz no provoca el efecto fotoeléctrico, es porque los fotones no llevan la energía suficiente. Para elevar la energía de los fotones incidentes hay que elevar la frecuencia. El potencial de frenado es característico de cada metal, mientras que al incrementar la longitud de onda disminuimos la energía de los fotones incidentes.

11. Para poder extraer electrones de una lámina de sodio hacen falta fotones con una energía de al menos 2,3 eV. Indica si tendrá lugar o no el efecto fotoeléctrico:

a) Al iluminar una superficie de sodio con luz roja de 680 nm de longitud de onda.

b) Al iluminar una superficie de sodio con luz azul de 360 nm de longitud de onda.

Datos: $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ J; $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ J · s; $c = 3 \cdot 10^8$ m/s.

a) Tendrá lugar el efecto fotoeléctrico si la energía de los fotones es igual o mayor que el trabajo de extracción. Calculamos la frecuencia umbral correspondiente:

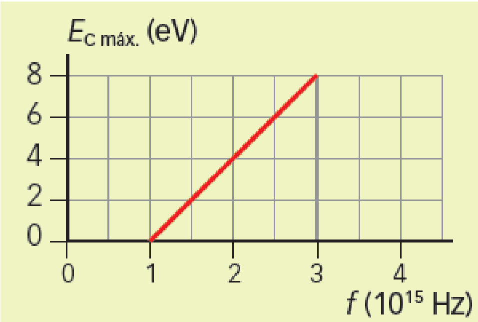
$$E_{\text{Fotón}} = W_{\text{Extracción}} \rightarrow \frac{h \cdot c}{\lambda} = W_{\text{Extracción}} \rightarrow \lambda_{\text{umbral}} = \frac{h \cdot c}{W_{\text{Extracción}}} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s} \cdot 3 \cdot 10^{8}\ \text{m/s}}{2{,}3\ \text{eV} \cdot \dfrac{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{J}}{1\ \text{eV}}} = 5{,}40 \cdot 10^{-7}\ \text{m} = 540\ \text{nm}$$

Por tanto, como la longitud de onda de la luz roja es mayor que la longitud de onda umbral, los fotones rojos tendrán una energía menor que el trabajo de extracción; por tanto, esta luz roja no producirá efecto fotoeléctrico.

b) En este caso la luz azul tiene una longitud de onda menor que la longitud umbral. Esto quiere decir que los fotones azules tendrán una energía mayor que el trabajo de extracción del metal. Por tanto, esta luz azul sí producirá efecto fotoeléctrico.

12. La gráfica representa la energía cinética máxima de los electrones emitidos por un metal en función de la frecuencia de la luz incidente sobre él. Indica la frecuencia umbral del metal. ¿Qué sucede si incide luz con una longitud de onda 700 nm?

Dato: $c = 3 \cdot 10^8$ m/s.



A partir de la gráfica se deduce que la frecuencia umbral es de 10^{15} Hz. Corresponde al caso en que es nula la energía cinética de los electrones extraídos.

Entonces la longitud de onda correspondiente es:

$$\lambda_{\text{umbral}} = \frac{c}{f_{\text{umbral}}} = \frac{3 \cdot 10^{8}\ \text{m/s}}{10^{15}\ \text{Hz}} = 3 \cdot 10^{-7}\ \text{m} = 300\ \text{nm}$$

Ahora incide luz con una longitud de onda de 700 nm, es decir mayor que la longitud de onda umbral. Entonces la energía de los fotones será menor que la energía umbral; por tanto, no se producirá efecto fotoeléctrico.

13. Calcula la energía de la primera raya de la serie de Lyman, de la serie de Balmer y de la serie de Paschen para el átomo de hidrógeno y determina en qué zona del espectro electromagnético se encuentra cada una.

Datos: $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ J · s; $c = 3 \cdot 10^8$ m/s; $R = 10\,967\,757$ m^{-1}.

Para calcular la energía correspondiente podemos aplicar la fórmula de Balmer, generalizada a continuación para otras series y, a continuación, la expresión de la energía:

$$\frac{1}{\lambda}=R\cdot\left(\frac{1}{n_1^2}-\frac{1}{n_2^2}\right)$$

La serie de Lyman corresponde al caso en que n_1 vale 1. La primera línea corresponde a $n_2 = 2$:

$$\frac{1}{\lambda}=R\cdot\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}\right)=10\,967757\text{ m}^{-1}\cdot\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{4}\right)=8\,225\,817{,}75\text{ m}^{-1}\rightarrow$$

$$\rightarrow E_{\text{Lyman}}=h\cdot\frac{c}{\lambda_{\text{Lyman}}}=6{,}63\cdot10^{-34}\text{ J}\cdot\text{s}\cdot3\cdot10^{8}\cdot8\,225\,817{,}75\text{ m}^{-1}=1{,}64\cdot10^{-18}\text{ J}$$

Esta energía corresponde a la zona ultravioleta del espectro electromagnético.

La serie de Balmer corresponde al caso en que n_1 vale 2. La primera línea corresponde a $n_2 = 3$:

$$\frac{1}{\lambda}=R\cdot\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}\right)=10967757\text{ m}^{-1}\cdot\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{9}\right)=1523299{,}58\text{ m}^{-1}\rightarrow$$

$$\rightarrow E_{\text{Lyman}}=h\cdot\frac{c}{\lambda_{\text{Lyman}}}=6{,}63\cdot10^{-34}\text{ J}\cdot\text{s}\cdot3\cdot10^{8}\cdot1523299{,}58\text{ m}^{-1}=3{,}03\cdot10^{-19}\text{ J}$$

Esta energía corresponde a la zona visible del espectro electromagnético.

La serie de Paschen corresponde al caso en que n_1 vale 3. La primera línea corresponde a $n_2 = 4$:

$$\frac{1}{\lambda}=R\cdot\left(\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}\right)=10967757\text{ m}^{-1}\cdot\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{16}\right)=533\,154{,}854\text{ m}^{-1}\rightarrow$$

$$\rightarrow E_{\text{Lyman}}=h\cdot\frac{c}{\lambda_{\text{Lyman}}}=6{,}63\cdot10^{-34}\text{ J}\cdot\text{s}\cdot3\cdot10^{8}\text{ m/s}\cdot533\,154{,}854\text{ m}^{-1}=1{,}06\cdot10^{-19}\text{ J}$$

Esta energía corresponde a la zona del infrarrojo del espectro electromagnético.

14. La energía del electrón del átomo de hidrógeno vale 2,18 · 10^{-18} J cuando se encuentra en la primera órbita. Calcula la energía del fotón que emite el electrón cuando salta del nivel 4 al nivel 2. ¿En qué serie espectral encontraremos esta raya? Compara el valor de la energía de este fotón con el que se obtendría utilizando la fórmula de los espectroscopistas.

Datos: h = 6,63 · 10^{-34} J · s; c = 3 · 10^{8} m/s.

La energía del átomo de hidrógeno en cada órbita (n) se puede escribir así:

$$E_{\text{n}}=-\frac{cte.}{n^2}$$

Para la primera órbita:

$$E_1=-\frac{cte.}{1^2}\rightarrow cte.=-E_1=-2{,}18\cdot10^{-18}\text{ J}$$

El signo menos indica que el electrón está ligado al núcleo.

Si el electrón pasa del nivel 4 al 2, podemos escribir así la diferencia entre ambas energías:

$$E_2-E_4=\left|-\frac{cte.}{n^2}\right|_{n=2}-\left|-\frac{cte.}{n^2}\right|_{n=4}=\left(-\frac{cte.}{2^2}\right)-\left(-\frac{cte.}{4^2}\right)=-cte.\cdot\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{4^2}\right)=2{,}18\cdot10^{-18}\text{ J}\cdot\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{16}\right)=4{,}09\cdot10^{-19}\text{ J}$$

Corresponde a la serie de Balmer.

Utilizando la fórmula de los espectroscopistas:

$$E=h\cdot f=h\cdot\frac{c}{\lambda}=h\cdot c\cdot\frac{1}{\lambda}=h\cdot c\cdot R\cdot\left(\frac{1}{n_1^2}-\frac{1}{n_2^2}\right)=h\cdot c\cdot R\cdot\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{4^2}\right)=$$

$$=6{,}63\cdot10^{-34}\text{ J}\cdot\text{s}\cdot3\cdot10^{8}\text{ m/s}\cdot10\,967\,757\text{ m}^{-1}\cdot\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{16}\right)=4{,}09\cdot10^{-19}\text{ J}$$

Vemos que el valor coincide con el calculado anteriormente.

15. En un experimento se detecta un electrón que se mueve a 10^6 m/s. Compara su longitud de onda de De Broglie con la de una partícula de $9{,}1 \cdot 10^{-6}$ kg que se desplaza a esa misma velocidad por el espacio. ¿Para qué partícula es mayor la longitud de onda de De Broglie?

Dato: $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg.

La longitud de onda de De Broglie depende de la masa de cada partícula y de la velocidad con la que se mueve.

$$\lambda = \frac{h}{m \cdot v}$$

Aplicando la ecuación anterior a cada partícula del enunciado podemos comparar la longitud de onda de De Broglie.

$$\frac{\lambda_{\text{electrón}}}{\lambda_{\text{partícula}}} = \frac{\dfrac{\cancel{h}}{m_{\text{electrón}} \cdot v_{\text{electrón}}}}{\dfrac{\cancel{h}}{m_{\text{partícula}} \cdot v_{\text{partícula}}}} = \frac{m_{\text{partícula}} \cdot v_{\text{partícula}}}{m_{\text{electrón}} \cdot v_{\text{electrón}}}$$

Como las velocidades de ambas partículas son iguales, la relación entre ambas longitudes de onda es inversamente proporcional al cociente de las masas.

$$\frac{\lambda_{\text{electrón}}}{\lambda_{\text{partícula}}} = \frac{m_{\text{partícula}}}{m_{\text{electrón}}} = \frac{9{,}1 \cdot 10^{-6}\ \text{kg}}{9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}} = 10^{25}$$

La longitud de onda de De Broglie es mucho mayor para el electrón, pues su masa es mucho menor que la de la otra partícula.

16. Señala la respuesta o respuestas correctas. Según la hipótesis de De Broglie:

a) Dos electrones moviéndose con diferente velocidad tienen asociada la misma onda.

b) Un electrón y un protón con la misma velocidad tienen asociada la misma onda.

c) La longitud de la onda asociada a un electrón es inversamente proporcional a su momento lineal.

a) Falsa. Dos partículas con la misma masa y diferente velocidad tendrán diferente longitud de onda de De Broglie asociada.

b) Falsa. Aunque las partículas se mueven con la misma velocidad, como tienen masas diferentes sus ondas asociadas serán diferentes.

c) Verdadera. Para un electrón y para cualquier otra partícula la longitud de onda asociada es inversamente proporcional tanto a su masa como a su velocidad. Es decir, es inversamente proporcional a su momento lineal.

17. En un microscopio electrónico los electrones se aceleran mediante una diferencia de potencial de 3500 voltios. ¿Cuál es la longitud de onda asociada a dichos electrones?

Datos: $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ J · s; $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg; $q_e = -1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C.

Para conocer la longitud de onda debemos saber la velocidad con la que se mueven los electrones. Si se aceleran con esa diferencia de potencial, la energía cinética que adquieren es:

$$E_C = |q_e| \cdot V = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \cdot 3500\ \text{V} = 5{,}6 \cdot 10^{-16}\ \text{J}$$

Entonces se puede calcular la velocidad del electrón a partir de la expresión de la energía cinética:

$$E_C = \frac{1}{2} m_e \cdot v^2 \rightarrow v = \sqrt{\frac{2 \cdot E_C}{m_e}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 5{,}6 \cdot 10^{-16}\ \text{J}}{9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}}} = 3{,}51 \cdot 10^7\ \text{m/s}$$

Esta velocidad es un 11 % de la velocidad de la luz, por lo que deberían aplicarse expresiones relativistas para calcular la velocidad del electrón. Pero si no tenemos en cuenta este efecto:

$$\lambda = \frac{h}{m_e \cdot v} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s}}{9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg} \cdot 3{,}51 \cdot 10^7\ \text{m/s}} = 2{,}08 \cdot 10^{-11}\ \text{m}$$

18. Se tienen dos partículas 1 y 2 con la misma energía cinética. Sabemos, además, que la masa de la partícula 2 es igual a 1836 veces la masa de la partícula 1. Indica cuál de las partículas lleva una mayor longitud de onda asociada y explica por qué.

Si tienen la misma energía cinética y la masa de la partícula 2 es mayor, entonces la expresión de la energía cinética no relativista es:

$$E_C = \frac{1}{2} m \cdot v^2 \rightarrow v = \sqrt{\frac{2 \cdot E_C}{m}}$$

Escribimos la relación entre ambas longitudes de onda y sustituimos la expresión anterior en ambos casos. Y utilizamos la relación entre las masas de ambas partículas:

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{\dfrac{h}{m_2 \cdot v_2}}{\dfrac{h}{m_1 \cdot v_1}} = \frac{m_1 \cdot v_1}{m_2 \cdot v_2} = \frac{m_1 \cdot \sqrt{\dfrac{2 \cdot E_{C1}}{m_1}}}{m_2 \cdot \sqrt{\dfrac{2 \cdot E_{C2}}{m_2}}} = \frac{\sqrt{m_1}}{\sqrt{m_2}} = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} = \sqrt{\frac{m_1}{1836 \cdot m_1}} = \sqrt{\frac{1}{1836}} \rightarrow \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{1}{42{,}85}$$

Es decir, la longitud de onda de la partícula 1 es 42,85 veces mayor que la longitud de onda de la partícula 2. La longitud de la partícula 1 es mayor que la longitud de la partícula 2 porque la longitud de onda es inversamente proporcional a la masa de la partícula y la masa de la partícula 1 es menor que la de la partícula 2.

19. Un electrón se encuentra confinado en una región cuya anchura total es de 0,10 nm; es decir, en una región del tamaño aproximado de un átomo. Indica cuál será entonces la incertidumbre en la velocidad del electrón. Datos: $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg; $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ J · s.

Según el principio de incertidumbre de Heisenberg:

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{h}{4\pi}$$

Como nos piden la incertidumbre en la velocidad, escribimos el momento lineal como el producto de la masa por la velocidad. Entonces, despejando queda:

$$\Delta x \cdot \Delta(m \cdot v) \geq \frac{h}{4\pi} \rightarrow \Delta x \cdot m \cdot \Delta v \geq \frac{h}{4\pi} \rightarrow \Delta v \geq \frac{h}{4\pi \cdot \Delta x \cdot m} \rightarrow$$

$$\rightarrow \Delta v \geq \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s}}{4\pi \cdot 0{,}10 \cdot 10^{-9}\ \text{m} \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}} = 5{,}8 \cdot 10^{5}\ \text{m/s}$$

20. Contesta:

a) ¿Qué dice el principio de indeterminación de Heisenberg?

b) ¿Por qué no se tiene en cuenta este principio al estudiar los fenómenos ordinarios?

a) Ver la respuesta en el epígrafe correspondiente del libro del alumno. El origen es la mecánica cuántica.

b) No se tiene en cuenta en los fenómenos ordinarios porque sus efectos solo son apreciables cuando tenemos partículas muy pequeñas moviéndose a velocidades muy elevadas.

21. Cita dos experimentos que cuestionaron la validez de la física clásica y señala cómo lo soluciona la física cuántica.

Por ejemplo, la radiación del cuerpo negro, que no seguía la distribución en frecuencias que predecía la teoría. Otro ejemplo es el efecto fotoeléctrico, que no podía explicarse según la física clásica, pues según esta al aumentar la intensidad de la luz incidente debería ser más fácil extraer fotoelectrones de una superficie metálica, algo que no ocurría. Tampoco se explicaban los espectros atómicos, pues no se conocía cómo se podían formar las líneas espectrales y además explicar por qué las líneas observadas en un átomo de un elemento eran diferentes de las líneas observadas para átomos de otros elementos.

22. ¿Qué hipótesis propuso Planck para explicar la radiación de cuerpo negro? Escribe su expresión matemática y di qué significa cada término.

Planck supuso que los osciladores del cuerpo negro solo podían absorber y emitir energía en pequeños paquetes o cuantos. La expresión matemática correspondiente es:

$$E = h \cdot f$$

En el primer miembro aparece la energía que absorbe o emite un oscilador. En el segundo miembro aparece la constante conocida como constante de Planck y la frecuencia de vibración del oscilador.

23. Calcula la frecuencia y la longitud de onda de un fotón cuya energía es 8,4 eV.

Datos: $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ J · s; $c = 3 \cdot 10^{8}$ m/s; 1 eV = $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ J.

Podemos aplicar la expresión de Planck y despejar la frecuencia teniendo en cuenta el cambio de unidades correspondiente:

$$E = h \cdot f \rightarrow f = \frac{E}{h} = \frac{8{,}4\ \text{eV} \cdot \dfrac{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{J}}{1\ \text{eV}}}{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s}} = 2{,}03 \cdot 10^{15}\ \text{s}^{-1}$$

La longitud de onda se puede calcular fácilmente entonces:

$$c = \lambda \cdot f \rightarrow \lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^{8}\ \text{m/s}}{2{,}03 \cdot 10^{15}\ \text{s}^{-1}} = 1{,}48 \cdot 10^{-7}\ \text{m} = 148\ \text{nm}$$

24. Contesta: ¿en qué consiste la teoría del efecto fotoeléctrico de Einstein? ¿Qué es un fotón? ¿Qué es el trabajo de extracción? ¿Y el potencial de frenado?

La teoría del efecto fotoeléctrico de Einstein dice que al iluminar una superficie metálica, la energía que transportan los fotones, que es proporcional a su frecuencia según indica la fórmula de Planck, se invierte por una parte en extraer el electrón del metal y, por otra, en acelerarlo.

Un fotón es una partícula de luz.

El trabajo de extracción es la energía que debe comunicarse a un electrón de un metal para extraerlo del metal y generar una corriente.

El potencial de frenado es la diferencia de potencial necesaria para detener el electrón extraído del metal con cierta energía cinética.

25. Imagina que tenemos luz azul con una intensidad reducida y luz roja muy intensa. Ambas logran extraer electrones de cierto metal, pero ¿cuál producirá electrones con mayor energía? ¿En qué caso habrá más electrones emitidos? Razona tus respuestas.

La luz azul producirá electrones con mayor energía, pues los fotones «azules» transportan más energía que los fotones «rojos».

El número de electrones es proporcional a la intensidad de la luz. Más intensidad implica más fotones incidentes, lo que quiere decir que habrá más electrones extraídos en el caso de la luz roja, la más intensa.

26. Una célula fotoeléctrica se ilumina con radiación cuya longitud de onda es $\lambda_1 = 0{,}41$ μm. Entonces se observa que los electrones emitidos tienen el doble de velocidad máxima que si la placa se ilumina con radiación cuya longitud de onda es $\lambda_2 = 0{,}50$ μm.

a) ¿Cuál es el trabajo de extracción del metal?

b) ¿Cuál es el potencial de frenado necesario para anular la corriente en cada caso?

Datos: $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C; $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ J · s; $c = 3 \cdot 10^{8}$ m/s.

a) Escribimos la ecuación de Einstein para el efecto fotoeléctrico:

$$E_{\text{Fotón}} = W_{\text{Extracción}} + E_{\text{C Electrón}}$$

Escribimos la ecuación para ambos tipos de radiación:

$$E_{\text{Fotón 1}} = W_{\text{Extracción}} + E_{\text{C Electrón 1}}$$

$$E_{\text{Fotón 2}} = W_{\text{Extracción}} + E_{\text{C Electrón 2}}$$

Si restamos la segunda ecuación a la primera y teniendo en cuenta que el trabajo de extracción es el mismo, ya que es propio de la célula fotoeléctrica:

$$E_{\text{Fotón 1}} - E_{\text{Fotón 2}} = E_{\text{C Electrón 1}} - E_{\text{C Electrón 2}} = 4 \cdot E_{\text{C Electrón 2}} - E_{\text{C Electrón 2}} \rightarrow E_{\text{Fotón 1}} - E_{\text{Fotón 2}} = 3 \cdot E_{\text{C Electrón 2}} \rightarrow$$

$$\rightarrow h \cdot f_1 - h \cdot f_2 = 3 \cdot E_{\text{C Electrón 2}} \rightarrow h \cdot \frac{c}{\lambda_1} - h \cdot \frac{c}{\lambda_2} = 3 \cdot E_{\text{C Electrón 2}} \rightarrow E_{\text{C Electrón 2}} = \frac{h \cdot c}{3} \cdot \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right)$$

Sustituyendo los valores proporcionados por el enunciado:

$$E_{\text{C Electrón 2}} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s} \cdot 3 \cdot 10^{8}\ \text{m/s}}{3} \cdot \left(\frac{1}{0{,}41 \cdot 10^{-6}\text{m}} - \frac{1}{0{,}50 \cdot 10^{-6}\text{m}} \right) = 2{,}91 \cdot 10^{-20}\ \text{J}$$

Con este dato ya podemos calcular el trabajo de extracción del metal sustituyendo en la segunda ecuación de arriba:

$$E_{\text{Fotón 2}} = W_{\text{Extracción}} + E_{\text{C Electrón 2}} \rightarrow W_{\text{Extracción}} = E_{\text{Fotón 2}} - E_{\text{C Electrón 2}} = h \cdot \frac{c}{\lambda_2} - E_{\text{C Electrón 2}} =$$

$$= \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s} \cdot 3 \cdot 10^{8}\ \text{m/s}}{0{,}50 \cdot 10^{-6}\text{m}} - 2{,}91 \cdot 10^{-20}\ \text{J} = 3{,}69 \cdot 10^{-19}\ \text{J}$$

Utilizando la equivalencia entre electronvoltios y julios:

$$W_{\text{Extracción}} = 3{,}69 \cdot 10^{-19}\ \text{J} \cdot \frac{1\ \text{eV}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{J}} = 2{,}30\ \text{eV}$$

b) El potencial de frenado es aquel capaz de detener a los electrones extraídos. Para el segundo caso ya conocemos la energía cinética del electrón, por lo que se puede calcular el potencial de frenado de manera inmediata:

$$E_{\text{C Electrón 2}} = q_{\text{e}} \cdot V_2 \rightarrow V_2 = \frac{E_{\text{C Electrón 2}}}{q_{\text{e}}} = \frac{2{,}91 \cdot 10^{-20}\ \text{J}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{C}} = 0{,}182\ \text{V}$$

Para el otro electrón se puede calcular la energía cinética porque ya sabemos cuál es el trabajo de extracción del metal:

$$E_{\text{Fotón 1}} = W_{\text{Extracción}} + E_{\text{C Electrón 1}} \rightarrow E_{\text{C Electrón 1}} = E_{\text{Fotón 1}} - W_{\text{Extracción}} = h \cdot \frac{c}{\lambda_1} - W_{\text{Extracción}}$$

$$= \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s} \cdot 3 \cdot 10^{8}\ \text{m/s}}{0{,}41 \cdot 10^{-6}\text{m}} - 3{,}69 \cdot 10^{-19}\ \text{J} = 1{,}16 \cdot 10^{-19}\ \text{J}$$

Ahora procedemos como en el apartado anterior:

$$E_{\text{C Electrón 1}} = q_{\text{e}} \cdot V_1 \rightarrow V_1 = \frac{E_{\text{C Electrón 1}}}{q_{\text{e}}} = \frac{1{,}16 \cdot 10^{-19}\ \text{J}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{C}} = 0{,}725\ \text{V}$$

27. Los electrones emitidos por una superficie metálica tienen una energía cinética máxima de 2,5 eV cuando incide sobre ellos una radiación con $\lambda = 350$ nm.

a) ¿Cuál es el trabajo de extracción del metal?

b) Determina el potencial de frenado necesario para frenar los electrones emitidos.

Datos $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C; $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ J · s; $c = 3 \cdot 10^{8}$ m/s.

a) Aplicamos la conservación de la energía. La energía del fotón se invierte en extraer al electrón, por un lado, y en acelerar estos electrones, por otro.

$$E_{\text{Fotón}} = W_{\text{Extracción}} + E_{\text{C Electrón}} \rightarrow W_{\text{Extracción}} = E_{\text{Fotón}} - E_{\text{C Electrón}} = h \cdot \frac{c}{\lambda} - E_{\text{C Electrón}} =$$

$$= \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s} \cdot 3 \cdot 10^{8}\ \text{m/s}}{350 \cdot 10^{-9}\,\text{m}} \cdot \frac{1\ \text{eV}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{J}} - 2{,}5\ \text{eV} = 3{,}55\ \text{eV} - 2{,}5\ \text{eV} = 1{,}05\ \text{eV}$$

b) El potencial de frenado es aquel que detiene los electrones extraídos del metal. Es decir, aquel que iguala en número a la energía cinética del electrón:

$$E_{\text{C Electrón}} = q_{\text{e}} \cdot V_{\text{frenado}} \rightarrow V_{\text{frenado}} = \frac{E_{\text{C Electrón}}}{q_{\text{e}}} = \frac{2{,}5\ \text{eV}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{C}} \cdot \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{J}}{1\ \text{eV}} = 2{,}5\ \text{V}$$

Es decir, si expresamos el valor de la energía del electrón en eV, el potencial de frenado (expresado en voltios) coincide numéricamente con el valor del trabajo de extracción.

28. Se iluminan con luz de longitud de onda $\lambda = 300$ nm láminas de litio ($W_{\text{ext.}} = 2{,}3$ eV), berilio ($W_{\text{ext.}} = 3{,}9$ eV) y mercurio ($W_{\text{ext.}} = 4{,}5$ eV).

a) ¿Se producirá efecto fotoeléctrico en todas las sustancias?

b) ¿Cuál será la energía cinética máxima de los fotoelectrones emitidos en cada metal?

Datos: $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C; $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ J · s; $c = 3 \cdot 10^{8}$ m/s.

a) Para saber si produce efecto fotoeléctrico hay que comprobar si la energía del fotón es igual o mayor que el trabajo de extracción de cada metal.

$$E_{\text{Fotón}} = h \cdot \frac{c}{\lambda} = 6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s} \cdot \frac{3 \cdot 10^{8}\ \text{m/s}}{300 \cdot 10^{-9}\,\text{m}} \cdot \frac{1\ \text{eV}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{J}} = 4{,}14\ \text{eV}$$

Por tanto, se producirá efecto fotoeléctrico en el caso del litio y del berilio. En el mercurio no se producirá efecto fotoeléctrico, puesto que el trabajo de extracción es mayor que la energía del fotón incidente.

b) En el caso del mercurio no hay electrones emitidos, puesto que no se produce efecto fotoeléctrico.

Para calcular la energía cinética máxima de los fotoelectrones aplicamos la ecuación de Einstein para el efecto fotoeléctrico en cada caso. En el caso del litio:

$$E_{\text{Fotón}} = W_{\text{Extracción Li}} + E_{\text{C Electrón}} \rightarrow E_{\text{C Electrón}} = E_{\text{Fotón}} - W_{\text{Extracción Li}} = 4{,}14\ \text{eV} - 2{,}3\ \text{eV} = 1{,}84\ \text{eV}$$

En el caso del berilio, como el trabajo de extracción es mayor, la energía cinética máxima de los electrones será menor:

$$E_{\text{Fotón}} = W_{\text{Extracción Be}} + E_{\text{C Electrón}} \rightarrow E_{\text{C Electrón}} = E_{\text{Fotón}} - W_{\text{Extracción Be}} = 4{,}14\ \text{eV} - 3{,}9\ \text{eV} = 0{,}24\ \text{eV}$$

29. La energía de un fotón coincide con la energía de un electrón en reposo. ¿Cuál es su longitud de onda? ¿Y su frecuencia? Observa la tabla y di a qué tipo de radiación pertenece el fotón.

Ultravioleta	$7{,}5 \cdot 10^{14}$ Hz - $3 \cdot 10^{17}$ Hz
Rayos X	$3 \cdot 10^{17}$ Hz - $3 \cdot 10^{19}$ Hz
Rayos gamma	$> 3 \cdot 10^{19}$ Hz

Datos: $m_{\text{e}} = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg; $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ J · s; $c = 3 \cdot 10^{8}$ m/s.

Usamos las fórmulas de Planck y de Einstein para igualar ambas energías:

$$E_{\text{Fotón}} = E_{\text{Electrón}} \rightarrow h \cdot f = m_{\text{e}} \cdot c^{2} \rightarrow h \cdot \frac{c}{\lambda} = m_{\text{e}} \cdot c^{2} \rightarrow \lambda = \frac{h \cdot \cancel{c}}{m_{\text{e}} \cdot c^{\cancel{2}}} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s}}{9{,}1 \cdot 10^{-31}\,\text{kg} \cdot 3 \cdot 10^{8}\ \text{m/s}} = 2{,}43 \cdot 10^{-12}\ \text{m}$$

La frecuencia del fotón se calcula fácilmente a partir de su longitud de onda:

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \cdot 10^{8}\ \text{m/s}}{2{,}43 \cdot 10^{-12}\ \text{m}} = 1{,}24 \cdot 10^{20}\ \text{Hz}$$

Se trata de un fotón muy energético, un rayo gamma.

30. Explica qué es el espectro atómico de un elemento químico. ¿Por qué los espectros de los gases están formados por líneas discretas?

El espectro de un elemento químico es un conjunto de líneas emitidas o absorbidas por una muestra de dicho elemento. Dichas líneas se producen cuando los electrones que orbitan en los átomos de dicho elemento pasan de una órbita permitida a otra.

Los espectros de gases están formados por líneas discretas porque los electrones solamente pueden pasar de una órbita estable a otra órbita estable. Esto quiere decir que no pueden absorber o emitir fotones de cualquier energía para cambiar de nivel energético, sino que solo pueden absorber o emitir fotones cuya energía coincida con la diferencia de energía entre dos niveles energéticos del electrón en su giro alrededor del núcleo.

31. Se observa el espectro del átomo de hidrógeno y se determina la longitud de onda de una de las rayas de la serie de Lyman: 94,97 nm. Indica cuáles son los niveles energéticos involucrados en el correspondiente tránsito electrónico.

Datos: E_0 (H) = 13,6 eV; $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ J · s; $c = 3 \cdot 10^{8}$ m/s; 1 nm = 10^{-9} m.

A partir de la longitud de onda podemos calcular la energía del fotón:

$$E_{\text{Fotón}} = h \cdot f = h \cdot \frac{c}{\lambda} = 6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s} \cdot \frac{3 \cdot 10^{8}\ \text{m/s}}{94{,}97 \cdot 10^{-9}\,\text{m}} = 2{,}094 \cdot 10^{-18}\ \text{J} \cdot \frac{1\ \text{eV}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\text{J}} = 13{,}09\ \text{eV}$$

Como se trata de una serie de Lyman, la transición se produce entre el nivel fundamental y otro. Podemos aplicar la fórmula de Bohr para el átomo de hidrógeno:

$$E_{\text{n}} = \frac{-13{,}6\ \text{eV}}{n^2}$$

La energía del fotón corresponde a la diferencia de energía entre el nivel fundamental, $n = 1$, y otro nivel:

$$E_{\text{Fotón}} = E_{\text{n}} - E_1 = \frac{-13{,}6\ \text{eV}}{n^2} - \frac{-13{,}6\ \text{eV}}{1^2} = \frac{-13{,}6\ \text{eV}}{n^2} + \frac{13{,}6\ \text{eV}}{1^2}$$

Sustituyendo el valor de la energía del fotón obtenemos:

$$13{,}09\ \text{eV} - 13{,}6\ \text{eV} = \frac{-13{,}6\ \text{eV}}{n^2} \rightarrow -0{,}51\ \text{eV} = \frac{-13{,}6\ \text{eV}}{n^2} \rightarrow n^2 = \frac{-13{,}6\ \text{eV}}{-0{,}51\ \text{eV}} = 5{,}05 \simeq 5$$

Es decir, la transición se produce entre los niveles 1 y 5.

32. Explica la hipótesis de De Broglie acerca del comportamiento de la materia. Indica qué longitud de onda es mayor, la asociada a protones o a electrones, si ambos tienen la misma energía cinética.

La hipótesis de De Broglie dice que toda partícula lleva asociada una onda cuya longitud de onda depende del momento lineal de la partícula según la siguiente expresión:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m \cdot v}$$

Si un electrón y un protón tienen la misma energía cinética, entonces, como el electrón tiene una masa bastante menor que el protón, el electrón llevará una mayor velocidad. Podemos escribir la energía cinética no relativista en la forma:

$$E_{\text{C}} = \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

Despejamos la velocidad en esta ecuación y queda:

$$E_C = \frac{1}{2} m \cdot v^2 \rightarrow v = \sqrt{\frac{2 \cdot E_C}{m}}$$

Ahora sustituimos esta expresión en la ecuación correspondiente a la hipótesis de De Broglie:

$$\lambda = \frac{h}{m \cdot v} \rightarrow \lambda = \frac{h}{m \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot E_C}{m}}} = \frac{h}{\sqrt{2 \cdot E_C \cdot m}}$$

Aplicamos la expresión anterior tanto al electrón como al protón. Como nos dicen que ambas partículas llevan la misma energía cinética:

- $\lambda_{\text{Electrón}} = \frac{h}{\sqrt{2 \cdot E_C \cdot m_{\text{Electrón}}}}$
- $\lambda_{\text{Protón}} = \frac{h}{\sqrt{2 \cdot E_C \cdot m_{\text{Protón}}}}$

Dividiendo una ecuación entre la otra:

$$\frac{\lambda_{\text{Electrón}}}{\lambda_{\text{Protón}}} = \frac{\frac{h}{\sqrt{2 \cdot E_C \cdot m_{\text{Electrón}}}}}{\frac{h}{\sqrt{2 \cdot E_C \cdot m_{\text{Protón}}}}} = \frac{\sqrt{2 \cdot E_C \cdot m_{\text{Protón}}}}{\sqrt{2 \cdot E_C \cdot m_{\text{Electrón}}}} = \sqrt{\frac{m_{\text{Protón}}}{m_{\text{Electrón}}}}$$

Como la masa del protón es mayor que la masa del electrón, entonces el electrón llevará asociada una onda de De Broglie con una longitud de onda mayor.

33. Los electrones de un microscopio electrónico son acelerados mediante una diferencia de potencial de 25 kV. ¿Cuál es su longitud de onda asociada?

Datos: $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ J · s; $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C; $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg.

La longitud de onda asociada se calcula con la expresión de De Broglie:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m \cdot v}$$

A partir de la diferencia de potencial puede calcularse la energía cinética del electrón:

$$|e| \cdot V = \frac{1}{2} m_e \cdot v^2 \rightarrow v = \sqrt{\frac{2 \cdot |e| \cdot V}{m_e}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \cdot 25 \cdot 10^3\ \text{V}}{9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}}} = 9{,}38 \cdot 10^7\ \text{m/s}$$

Esta velocidad implica que deberíamos realizar cálculos relativistas para obtener un resultado más exacto, pero sin tener en cuenta los efectos relativistas para el electrón:

$$\lambda = \frac{h}{m \cdot v} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s}}{9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg} \cdot 9{,}38 \cdot 10^7\ \text{m/s}} = 7{,}77 \cdot 10^{-12}\ \text{m}$$

34. Imagina una pelota de tenis y un electrón moviéndose con igual velocidad. ¿Cuál de los dos tiene mayor longitud de onda? Supón ahora que la energía cinética del electrón es igual a la de la pelota. ¿Se modifica tu respuesta anterior?

Si la velocidad es la misma en ambos casos, tiene mayor longitud de onda el objeto con menor masa, tal y como se deduce de la expresión de De Broglie, es decir, el electrón.

$$\lambda = \frac{h}{m \cdot v}$$

Ahora suponemos que los dos cuerpos tienen la misma energía cinética. Utilizando la expresión de la energía cinética en la anterior obtenemos:

$$\lambda = \frac{h}{m \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot E_C}{m}}} = \frac{h}{\sqrt{2 \cdot E_C \cdot m}}$$

Entonces:

- $\lambda_{\text{Electrón}} = \dfrac{h}{\sqrt{2 \cdot E_C \cdot m_{\text{Electrón}}}}$
- $\lambda_{\text{Pelota}} = \dfrac{h}{\sqrt{2 \cdot E_C \cdot m_{\text{Pelota}}}}$

Dividiendo una ecuación entre la otra:

$$\frac{\lambda_{\text{Electrón}}}{\lambda_{\text{Pelota}}} = \frac{\dfrac{h}{\sqrt{2 \cdot E_C \cdot m_{\text{Electrón}}}}}{\dfrac{h}{\sqrt{2 \cdot E_C \cdot m_{\text{Pelota}}}}} = \frac{\sqrt{\cancel{2} \cdot \cancel{E_C} \cdot m_{\text{Pelota}}}}{\sqrt{\cancel{2} \cdot \cancel{E_C} \cdot m_{\text{Electrón}}}} = \sqrt{\frac{m_{\text{Pelota}}}{m_{\text{Electrón}}}}$$

Como la masa de la pelota es mayor que la del electrón, la longitud de onda del electrón será mayor que la de la pelota. Por tanto, no se modifica la respuesta anterior, sigue siendo el electrón el cuerpo con mayor longitud de onda.

35. Un láser emite luz monocromática con $\lambda = 632$ nm y 4 mW/cm² sobre una superficie de potasio, cuyo trabajo de extracción vale 2,22 eV. ¿Emitirá electrones la superficie de potasio? ¿Y si la intensidad del láser aumenta y llega a 8 mW/cm²? Justifica tus respuestas.

a) Se cambia el láser por otro con $\lambda = 500$ nm. ¿Se emiten electrones? ¿Cuál es su energía cinética máxima?

b) Para el caso en que $\lambda = 500$ nm, determina la longitud de onda de De Broglie asociada a los electrones extraídos del potasio.

Datos: $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ J · s; $c = 3 \cdot 10^8$ m/s; $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg; 1 J = $6{,}24 \cdot 10^{18}$ eV.

Habrá que comprobar si la energía de cada fotón es igual o mayor que el trabajo de extracción del metal:

$$E_{\text{Fotón}} = h \cdot f = h \cdot \frac{c}{\lambda} = 6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s} \cdot \frac{3 \cdot 10^8\ \text{m/s}}{632 \cdot 10^{-9}\ \text{m}} = 3{,}15 \cdot 10^{-19}\ \text{J} \cdot \frac{1\ \text{eV}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{J}} = 1{,}97\ \text{eV}$$

Por tanto, como la energía del fotón es menor que el trabajo de extracción, no se producirá efecto fotoeléctrico.

Si aumentamos la intensidad dará lo mismo, puesto que la energía de cada fotón no cambia; simplemente hay más fotones incidiendo cada segundo en el metal, pero no se extraerán tampoco electrones.

a) Si el láser se cambia por otro, los fotones tendrán una energía diferente. Operando de forma similar al apartado anterior:

$$E_{\text{Fotón}} = h \cdot f = h \cdot \frac{c}{\lambda} = 6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s} \cdot \frac{3 \cdot 10^8\ \text{m/s}}{500 \cdot 10^{-9}\ \text{m}} = 3{,}98 \cdot 10^{-19}\ \text{J} \cdot \frac{1\ \text{eV}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{J}} = 2{,}49\ \text{eV}$$

Entonces sí se producirá el efecto fotoeléctrico, porque ahora el fotón tiene una energía mayor que el trabajo de extracción del metal. La energía cinética máxima será igual a la diferencia entre la energía del fotón y el trabajo de extracción del metal:

$$E_{\text{C Electrón}} = E_{\text{Fotón}} - W_{\text{Extracción}} = 2{,}49\ \text{eV} - 2{,}22\ \text{eV} = 0{,}27\ \text{eV}$$

Utilizando la equivalencia entre electronvoltios y julios:

$$E_{\text{C Electrón}} = 0{,}27\ \text{eV} \cdot \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{J}}{1\ \text{eV}} = 4{,}32 \cdot 10^{-20}\ \text{eV}$$

b) Para calcular la longitud de onda, como conocemos la energía cinética del electrón:

$$\lambda = \frac{h}{m \cdot v} = \frac{h}{m \cdot \sqrt{\dfrac{2 \cdot E_C}{m}}} = \frac{h}{\sqrt{2 \cdot E_C \cdot m}} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s}}{\sqrt{2 \cdot 4{,}32 \cdot 10^{-20}\ \text{eV} \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}}} = 2{,}37 \cdot 10^{-9}\ \text{m} = 237\ \text{nm}$$

36. Al incidir luz monocromática de $1{,}1 \cdot 10^{15}$ s⁻¹ sobre un material se observan electrones emitidos con una velocidad máxima de $1{,}05 \cdot 10^6$ m/s.

a) Calcula el trabajo de extracción del material.

b) Determina cuál es la longitud de onda de la luz incidente.

c) Determina la longitud de onda de De Broglie de los electrones emitidos con la máxima velocidad.

d) Si incide radiación con $\lambda = 240$ nm, ¿cuál será la velocidad máxima de los electrones?

Datos: $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ kg; $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ J · s; $c = 3 \cdot 10^8$ m/s.

a) La energía del fotón se invierte en extraer el electrón y en acelerarlo. Aplicando la conservación de la energía:

$$E_{\text{Fotón}} = W_{\text{Extracción}} + E_{\text{C Electrón}} \rightarrow W_{\text{Extracción}} = E_{\text{Fotón}} - E_{\text{C Electrón}}$$

La energía del fotón se calcula a partir de su frecuencia:

$$E_{\text{Fotón}} = h \cdot f = 6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s} \cdot 1{,}1 \cdot 10^{15}\ \text{Hz} \cdot \frac{1\ \text{eV}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{J}} = 4{,}56\ \text{eV}$$

El trabajo de extracción se puede calcular entonces:

$$E_{\text{Fotón}} = W_{\text{Extracción}} + E_{\text{C Electrón}} \rightarrow W_{\text{Extracción}} = E_{\text{Fotón}} - \frac{1}{2} \cdot m_e \cdot v^2 =$$

$$= 4{,}56\ \text{eV} - \frac{1}{2} \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg} \cdot \left(1{,}05 \cdot 10^6\ \text{m/s}\right)^2 \cdot \frac{1\ \text{eV}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{J}} = 1{,}43\ \text{eV}$$

b) La longitud de onda incidente se calcula fácilmente a partir de la frecuencia del fotón:

$$c = \lambda \cdot f \rightarrow \lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8\ \text{m/s}}{1{,}1 \cdot 10^{15}\ \text{Hz}} = 2{,}73 \cdot 10^{-7}\ \text{m}$$

c) La longitud de onda de De Broglie asociada a los electrones que salen con la máxima velocidad es:

$$\lambda = \frac{h}{m_e \cdot v} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s}}{9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg} \cdot 1{,}05 \cdot 10^6\ \text{m/s}} = 6{,}94 \cdot 10^{-10}\ \text{m}$$

d) Si cambia la longitud de onda de la radiación incidente, entonces la velocidad máxima de los electrones emitidos variará. Como en este caso la longitud de onda es menor que en el apartado b, los fotones llevan más energía que antes, y por lo tanto es de esperar que la velocidad máxima de los electrones emitidos sea mayor que la calculada para la anterior longitud de onda de la radiación.

La energía del fotón es ahora:

$$E_{\text{Fotón}} = h \cdot \frac{c}{\lambda} = 6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s} \cdot \frac{3 \cdot 10^8\ \text{m/s}}{240 \cdot 10^{-9}\ \text{m}} \cdot \frac{1\ \text{eV}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{J}} = 5{,}18\ \text{eV}$$

En efecto:

$$E_{\text{Fotón}} = W_{\text{Extracción}} + E_{\text{C Electrón}} \rightarrow E_{\text{C Electrón}} = E_{\text{Fotón}} - W_{\text{Extracción}} \rightarrow \frac{1}{2} \cdot m_e \cdot v^2 = E_{\text{Fotón}} - W_{\text{Extracción}} \rightarrow$$

$$\rightarrow v = \sqrt{\frac{2 \cdot \left(E_{\text{Fotón}} - W_{\text{Extracción}}\right)}{m_e}} = \sqrt{\frac{2 \cdot \left(5{,}18\ \text{eV} - 1{,}43\ \text{eV}\right) \cdot \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{J}}{1\ \text{eV}}}{9{,}1 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}}} = 1{,}15 \cdot 10^6\ \text{m/s}$$

Como vemos, la velocidad máxima de los electrones es mayor que con la radiación anterior.

37. Enuncia el principio de incertidumbre de Heisenberg.

a) ¿Cuál es su expresión matemática?

b) ¿Qué significan las magnitudes que aparecen?

El principio de incertidumbre o de indeterminación de Heisenberg dice que no es posible conocer simultáneamente y con total precisión la posición y la velocidad de una partícula.

a) La expresión matemática es:

$$\Delta x \cdot \Delta p = \frac{h}{4\pi} \rightarrow \Delta x \cdot \Delta\left(m \cdot v\right) = \frac{h}{4\pi}$$

b) Las magnitudes que aparecen son la posición, la masa y la velocidad de la partícula, en el miembro de la izquierda, y la constante de Planck en el miembro de la derecha.

38. ¿Cuál será la indeterminación en la velocidad de una pelota de masa 50 g si su posición se determina con una exactitud de 1 nm?

Datos: $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ J · s; 1 nm = 10^{-9} m.

Podemos aplicar la expresión matemática del principio de indeterminación de Heisenberg:

$$\Delta x \cdot \Delta p = \frac{h}{4\pi} \rightarrow \Delta x \cdot \Delta(m \cdot v) = \frac{h}{4\pi} \rightarrow \Delta v = \frac{h}{4\pi \cdot \Delta x \cdot m} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s}}{4\pi \cdot 10^{-9}\ \text{m} \cdot 0{,}050\ \text{kg}} = 1{,}06 \cdot 10^{-24}\ \text{m/s}$$

Es decir, para un objeto macroscópico la incertidumbre en la velocidad es muy pequeña, incluso midiendo la posición con mucho detalle.

39. Un láser de helio-neón emite luz monocromática cuya longitud de onda es $\lambda = 632$ nm. Calcula la frecuencia de cada fotón emitido. ¿Qué energía lleva cada fotón?

Datos: $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ J · s; $c = 3 \cdot 10^8$ m/s; 1 nm = 10^{-9} m.

La frecuencia se puede calcular de manera inmediata a partir de la longitud de onda del fotón:

$$c = \lambda \cdot f \rightarrow f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \cdot 10^8\ \text{m/s}}{632 \cdot 10^{-9}\ \text{m}} = 4{,}75 \cdot 10^{14}\ \text{Hz}$$

La energía de cada fotón se calcula también fácilmente, en este caso aplicando la expresión de Planck:

$$E = h \cdot f = 6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s} \cdot 4{,}75 \cdot 10^{14}\ \text{Hz} = 3{,}15 \cdot 10^{-19}\ \text{J}$$

40. Se cree que los brotes de rayos γ de muy alta energía se generan cuando se forma un agujero negro durante el colapso gravitatorio de una estrella de gran masa. En uno de estos brotes se han detectado fotones con $\lambda = 2 \cdot 10^{-12}$ m. Calcula su energía. Compárala con la energía de un láser de luz visible de $6 \cdot 10^{14}$ Hz.

Datos: $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ J · s; $c = 3 \cdot 10^8$ m/s.

La energía de los fotones se calcula con la expresión de Planck, a partir de su frecuencia (o su longitud de onda).

$$E_{\text{Fotón}} = h \cdot \frac{c}{\lambda} = 6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s} \cdot \frac{3 \cdot 10^8\ \text{m/s}}{2 \cdot 10^{-12}\ \text{m}} = 9{,}94 \cdot 10^{-14}\ \text{J}$$

La energía de un láser en el rango visible es:

$$E_{\text{Fotón}} = h \cdot f = 6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{J} \cdot \text{s} \cdot 6 \cdot 10^{14}\ \text{Hz} = 3{,}98 \cdot 10^{-19}\ \text{J}$$

Es decir, la energía que llevan los fotones gamma generados durante la formación de un agujero negro es mucho mayor que la energía que llevan los fotones emitidos por un láser en el rango visible del espectro.

FÍSICA EN TU VIDA

1. Explica a partir de los dibujos por qué es posible almacenar mucha más información en un disco Blu-ray que en un disco CD-ROM o CD-Audio, incluso aunque en ambos el tamaño y el número de capas sea el mismo.

Porque en un disco Blu-ray las marcas están mucho más juntas que en el caso de un CD o DVD, y la densidad de datos almacenados por unidad de superficie es mayor.

2. ¿Qué ventajas aporta el hecho de que los discos Blu-ray y DVD tengan el mismo tamaño?

Pues que los lectores de discos Blu-ray también podrán leer discos CD y DVD. De esta manera un reproductor de películas en Blu-ray también podrá reproducir la colección de discos DVD, por ejemplo.

3. ¿Qué propiedad de la luz hace que el láser azul sea más preciso que el láser rojo?

La longitud de onda de la luz azul es más pequeña que la de la luz roja. Esto supone que el láser azul es más preciso que el rojo, y por eso pueden emplearse discos donde la distancia entre marcas es menor.

PROYECTO SABER HACER

10

Física nuclear

SANTILLANA

Física nuclear

10

PARA COMENZAR

- **¿En qué se diferencian las reacciones nucleares de las reacciones químicas que has estudiado en cursos anteriores?**

  En las reacciones químicas se produce un trasvase de electrones de un átomo a otro. Es decir, los cambios tienen lugar a nivel de la corteza del átomo, mientras que en una reacción nuclear existen cambios a nivel nuclear. Existe un trasvase de protones y de neutrones de un núcleo a otro, generalmente.

- **¿Qué medidas de seguridad se toman para evitar daños en la salud a la hora de manipular materiales radiactivos?**

  Las personas que manipulan material radiactivo deben protegerse empleando prendas especiales, como gruesos chalecos de plomo. Además, hay que vigilar que el tiempo de exposición al material radiactivo sea muy bajo.

ACTIVIDADES

1. Indica en qué se diferencian los tres tipos de radiaciones características de los procesos radiactivos.

En la radiactividad α un núcleo padre emite una partícula α y se convierte en otro núcleo con dos protones y dos neutrones menos. El número másico disminuye en cuatro unidades, y el número atómico, en dos.

En la radiactividad β se produce una emisión de un electrón por parte de un neutrón, que se convierte en el proceso en un protón. De esta manera no varía el número másico, pero se incrementa en una unidad el número atómico.

En la radiactividad γ un núcleo excitado emite un fotón y pasa a un estado con menos energía. En este caso no varían ni el número másico ni el número atómico.

2. Busca la relación entre el logaritmo neperiano y el logaritmo decimal de un número.

La relación entre ambos logaritmos es esta:

$$\log_{10} a = \ln a \cdot \log_{10} e$$

3. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $15 = 5 \cdot e^x$

b) $10^{-3} = 5 \cdot e^{2x}$

a) Como se trata de una ecuación exponencial, tomamos logaritmos en ambos miembros de la ecuación y utilizando las propiedades del producto y del cociente de los logaritmos obtenemos:

$$\ln 15 = \ln\left(5 \cdot e^x\right) \rightarrow \ln 15 = \ln 5 + \ln e^x \rightarrow \ln 15 - \ln 5 = \ln e^x \rightarrow$$

$$\rightarrow \ln\left(\frac{15}{5}\right) = \cancel{\ln}\ \cancel{e}^x \rightarrow \ln 3 = x = 1{,}099$$

b) De nuevo procedemos como en el caso anterior. Tomamos logaritmos neperianos en ambos miembros:

$$\frac{10^{-3}}{5} = e^{2x} \rightarrow \ln \frac{10^{-3}}{5} = \ln\left(e^{2x}\right) \rightarrow \ln \frac{10^{-3}}{5} = 2x \rightarrow x = \frac{\ln\left(10^{-3}/5\right)}{2} = -4{,}26$$

4. Estudia los siguientes núclidos y establece entre ellos todas las relaciones que puedas. Señala los que pertenecen al mismo elemento químico:

- $^{31}_{16}\mathrm{X}$
- $^{30}_{15}\mathrm{Y}$
- $^{31}_{17}\mathrm{Z}$
- $^{33}_{16}\mathrm{W}$
- $^{34}_{17}\mathrm{P}$

Pertenecen al mismo elemento químico aquellos que tienen igual *Z*. Es decir, los núcleos X y W, por un lado y los núcleos Z y P, por otro. Estos son isótopos entre sí.

Son isóbaros aquellos que tienen el mismo número másico. Es decir, los núcleos X y Z.

Son isótonos los que tienen el mismo número de neutrones. Es decir, aquellos con igual diferencia $A - Z$. En nuestro caso, los núcleos X e Y tienen el mismo número de neutrones. Y también los núcleos W y P.

5. Para el núcleo $^{12}_{6}\mathrm{C}$, cuya masa es 12,0000 u, calcula:

a) El defecto de masa.

b) La energía de enlace total y la energía de enlace por nucleón.

Datos: $m_p = 1{,}0073$ u; $m_n = 1{,}0087$ u; 1 u = 931,5 MeV/c^2.

a) El defecto de masa se calcula a partir de la masa del núcleo y la masa de sus constituyentes. El núcleo de carbono tiene seis protones y seis neutrones, por tanto:

$$\Delta m = \left(6 \cdot m_p + 6 \cdot m_n\right) - m\left(^{12}\mathrm{C}\right) = \left(6 \cdot 1{,}0073\,\mathrm{u} + 6 \cdot 1{,}0087\,\mathrm{u}\right) - 12\ \mathrm{u} = 0{,}096\,\mathrm{u}$$

b) La energía total de enlace se calcula multiplicando este exceso de masa por la velocidad de la luz. O como nos dan la equivalencia entre u y MeV:

$$E = \Delta m \cdot c^2 = 0{,}096\ \cancel{\mathrm{u}} \cdot \frac{931{,}5\,\mathrm{MeV}/\cancel{c^2}}{1\ \cancel{\mathrm{u}}} \cdot \cancel{c^2} = 89{,}424\ \mathrm{MeV}$$

Como hay doce nucleones:

$$\frac{E_{\mathrm{enlace}}}{\mathrm{nucleón}} = \frac{E}{A} = \frac{89{,}424\ \mathrm{MeV}}{12} = 7{,}452\ \mathrm{MeV/nucleón}$$

6. Para el núclido de hierro con $Z = 26$ y $A = 56$ la masa vale 55,9394 u. Calcula:

a) El defecto de masa.

b) La energía de enlace del núcleo y la energía de enlace por nucleón. Expresa el resultado en julios.

Datos: $m_p = 1{,}0073$ u; $m_n = 1{,}0087$ u; 1 u = 1,66 · 10^{-27} kg; $c = 3 \cdot 10^8$ m/s.

a) El defecto de masa se calcula a partir de la masa del núcleo y la masa de los neutrones y protones:

$$\Delta m = \left[Z \cdot m_p + \left(Z - A\right) \cdot m_n\right] - m\left(^{56}_{26}\mathrm{Fe}\right) = \left(26 \cdot 1{,}0073\,\mathrm{u} + 30 \cdot 1{,}0087\,\mathrm{u}\right) - 55{,}9394\ \mathrm{u} = 0{,}5114\,\mathrm{u}$$

b) La energía total de enlace se calcula multiplicando este exceso de masa por la velocidad de la luz:

$$E = \Delta m \cdot c^2 = 0{,}5114\ \cancel{\mathrm{u}} \cdot \frac{1{,}66 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}}{1\ \cancel{\mathrm{u}}} \cdot \left(3 \cdot 10^8\ \mathrm{m/s}\right)^2 = 7{,}64 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{J}$$

Como en este caso hay 56 nucleones la energía de enlace por nucleón será:

$$\frac{E_{\mathrm{enlace}}}{\mathrm{nucleón}} = \frac{E}{A} = \frac{7{,}64 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{J}}{56} = 1{,}364 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{J}$$

7. El núclido $^{232}_{90}\mathrm{Th}$ es radiactivo. Se desintegra emitiendo una partícula α, dos partículas β y radiación γ. Entonces, ¿cuál será el núclido resultante de la desintegración?

Primero se desintegra emitiendo una partícula α. Por tanto, la reacción que tiene lugar es:

$$^{232}_{90}\mathrm{Th} \rightarrow {}^{228}_{88}\mathrm{Ra} + {}^{4}_{2}\alpha$$

Luego emite dos partículas β. Esto quiere decir que dos neutrones de su núcleo se transforman en dos protones. Por tanto:

$$^{228}_{88}\text{Ra} \rightarrow {}^{228}_{86}\text{Rn} + \beta^- + \beta^-$$

Es decir, el núclido resultante de la desintegración es el $^{230}_{86}\text{Rn}$.

8. **Observa la siguiente desintegración radiactiva y señala qué tipo de desintegración se produce en cada una de las etapas señaladas:**

$$^{238}_{92}\textbf{U} \rightarrow {}^{234}_{90}\textbf{Th} \rightarrow {}^{234}_{91}\textbf{Pa}$$

En la primera etapa se produce una desintegración α. El número másico disminuye en cuatro unidades, y el número atómico, en dos.

$$^{127}_{92}\text{U} \rightarrow {}^{224}_{90}\text{Th}$$

En la segunda etapa se produce una desintegración β. El número másico no cambia y el número atómico aumenta en una unidad.

$$^{224}_{90}\text{Th} \rightarrow {}^{224}_{91}\text{Pa}$$

9. **Analizando una muestra radiactiva se comprueba que cuando transcurre un mes (30 días) su actividad es una quinta parte de la que tenía al principio.**

a) **Determina el valor de la constante de desintegración.**

b) **Calcula el periodo de semidesintegración.**

c) **Al cabo de 30 días mide la actividad de la muestra y se determina que vale 7,88 · 10^{14} Bq. Calcula cuántos átomos radiactivos había inicialmente.**

d) **Describe brevemente un proceso de desintegración en el que se emite una partícula β (beta).**

a) La actividad radiactiva va disminuyendo porque cada vez van quedando menos núclidos radiactivos. Depende del tipo de núclido y del número de núclidos, *N*:

$$A = \lambda \cdot N$$

Y el número de núclidos se puede expresar en función del número inicial de núclidos y el tiempo transcurrido como:

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

Comparando la actividad inicial y la actividad tras transcurrir un mes, utilizando las expresiones anteriores, obtenemos:

$$\frac{A_{1\,\text{mes}}}{A_0} = \frac{\cancel{\lambda} \cdot N_{1\,\text{mes}}}{\cancel{\lambda} \cdot N_0} = \frac{\cancel{N_0} \cdot e^{-\lambda \cdot t}}{\cancel{N_0}} \rightarrow \frac{A_{1\,\text{mes}}}{A_0} = e^{-\lambda \cdot t} \rightarrow \ln\left(\frac{A_{1\,\text{mes}}}{A_0}\right) = \cancel{\ln}\left(\cancel{e}^{-\lambda \cdot t}\right)$$

$$\rightarrow \ln\left(\frac{A_{1\,\text{mes}}}{A_0}\right) = -\lambda \cdot t \rightarrow \lambda = -\frac{\ln\left(\frac{\cancel{A_0}/5}{\cancel{A_0}}\right)}{t}$$

Utilizando las propiedades de los logaritmos:

$$\lambda = \frac{\ln(5)}{t} = \frac{\ln(5)}{1\ \text{mes}} = 1{,}609\ \text{mes}^{-1}$$

Lo expresamos en días:

$$\lambda = 1{,}609\ \text{mes}^{-1} \cdot \frac{1\ \text{mes}}{30\ \text{días}} = 5{,}365 \cdot 10^{-2}\ \text{días}^{-1}$$

b) El periodo de semidesintegración se calcula a partir de la constante de desintegración:

$$T_{1/2}=\frac{\ln 2}{\lambda}=\frac{\ln 2}{5{,}365\cdot 10^{-2}\ \text{días}^{-1}}=12{,}92\ \text{días}$$

c) Empleando la ecuación usada en el primer apartado:

$$A_0=\lambda\cdot N_0$$

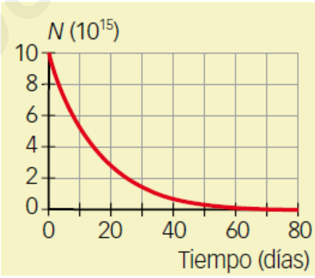
No sabemos la actividad inicial, pero sí sabemos que era 5 veces mayor que la que tiene cuando ha transcurrido un mes. Por tanto:

$$A_0=5\cdot A_{1\,\text{mes}}=\lambda\cdot N_0\rightarrow N_0=\frac{5\cdot A_{1\,\text{mes}}}{\lambda}=\frac{5\cdot 7{,}88\cdot 10^{14}\ \text{Bq}}{5{,}365\cdot 10^{-2}\ \frac{1}{\text{día}}\cdot\frac{1\ \text{día}}{24\cdot 3600\ \text{s}}}=6{,}35\cdot 10^{21}\ \text{átomos}$$

d) En la desintegración β^- un neutrón se convierte en un protón. En el proceso se emiten un electrón y un neutrino (un antineutrino electrónico).

$$\text{n}\rightarrow\text{p}+\text{e}^-+\bar{\nu}_e$$

10. La gráfica recoge la evolución del número de núclidos de una muestra. A partir de la gráfica, indica el valor de la constante de desintegración radiactiva, λ, para esta sustancia. Al cabo de 100 años, ¿habrá más o menos de la mitad de los núclidos que había al comienzo?



A partir de la gráfica podemos saber que el periodo de semidesintegración es de 10 días, por definición del periodo de semidesintegración, transcurrido ese tiempo la cantidad de núcleos se ha reducido al 50 %.

Entonces se puede calcular el valor de la constante de desintegración radiactiva a partir de la expresión que relaciona el número de núclidos actuales con el número de núclidos iniciales:

$$N=N_0\cdot e^{-\lambda\cdot t}\rightarrow\frac{N}{N_0}=e^{-\lambda\cdot t}$$

Cuando ha transcurrido un tiempo igual al periodo de semidesintegración, queda la mitad de los núcleos que había inicialmente:

$$\frac{1}{2}=e^{-\lambda\cdot T_{1/2}}$$

Resolvemos esta ecuación tomando logaritmos a ambos lados de la igualdad y aplicando propiedades de los logaritmos. De esta forma obtenemos la constante de desintegración radiactiva:

$$\ln\frac{1}{2}=-\lambda\cdot T_{1/2}\rightarrow\cancel{\ln 1}-\ln 2=-\lambda\cdot T_{1/2}\rightarrow\lambda=\frac{\ln 2}{T_{1/2}}=\frac{\ln 2}{10\ \text{días}}=0{,}0693\ \text{días}^{-1}$$

Como el tiempo que nos indican es mayor que el periodo de semidesintegración, al cabo de 100 años habrá menos de la mitad de los núcleos que había al comienzo.

11. Completa en tu cuaderno las siguientes reacciones nucleares:

a) $^{9}_{4}\text{Be}+\ldots\rightarrow{}^{12}_{6}\text{C}+{}^{1}_{0}\text{n}\ldots$

b) $^{23}_{11}\text{Na}+{}^{2}_{1}\text{H}\rightarrow{}^{24}_{11}\text{Na}+\ldots$

c) $^{27}_{13}\text{Al}+{}^{4}_{2}\text{He}\rightarrow{}^{30}_{15}\text{P}+\ldots$

d) $^{30}_{15}\text{P}\rightarrow{}^{30}_{14}\text{Si}+\ldots$

Teniendo en cuenta que en todas las ecuaciones debe conservarse la carga eléctrica y el número de nucleones:

a) $^{9}_{4}\text{Be}+{}^{4}_{2}\mathbf{He}\rightarrow{}^{12}_{6}\text{C}+{}^{1}_{0}\text{n}$

b) $^{23}_{11}\text{Na}+{}^{2}_{1}\text{H}\rightarrow{}^{24}_{11}\text{Na}+{}^{1}_{1}\mathbf{p}$

c) $^{27}_{13}\text{Al}+{}^{4}_{2}\text{He}\rightarrow{}^{30}_{15}\text{P}+{}^{1}_{0}\mathbf{n}$

d) $^{30}_{15}\text{P}\rightarrow{}^{30}_{14}\text{Si}+{}^{0}_{1}\mathbf{e}^{+}$

12. **Una muestra de 2 g de ^{235}U se fisiona, de modo que cada núcleo produce $2 \cdot 10^6$ eV. Si todos los núcleos se fisionan, calcula la energía total que se libera. Expresa el resultado en julios y en kilovatios hora.**

Datos: $N_A = 6{,}022 \cdot 10^{23}$; $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C.

Debemos calcular cuántos núcleos hay en la muestra y lo hacemos a partir de la cantidad de muestra que tenemos y de su número másico:

$$2\ \cancel{g} \cdot \frac{1\ \cancel{mol}}{235\ \cancel{g}} \cdot \frac{6{,}022 \cdot 10^{23}\ \text{núcleos}}{1\ \cancel{mol}} = 5{,}125 \cdot 10^{21}\ \text{núcleos}$$

Sabiendo la energía que libera un núcleo obtenemos la energía total que se libera:

$$5{,}125 \cdot 10^{21}\ \cancel{\text{núcleos}} \cdot \frac{2 \cdot 10^6\ \text{eV}}{1\ \cancel{\text{núcleo}}} = 1{,}025 \cdot 10^{28}\ \text{eV}$$

Expresada en julios es:

$$1{,}025 \cdot 10^{28}\ \cancel{eV} \cdot \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{J}}{1\ \text{eV}} = 1{,}64 \cdot 10^9\ \text{J}$$

Ahora relacionamos el kilovatio hora y el julio:

$$1\ \text{kWh} = 1000\ \text{W} \cdot 1\ \text{h} = 1000\ \frac{\text{J}}{\cancel{s}} \cdot 1\ \cancel{h} \cdot \frac{3600\ \cancel{s}}{1\ \cancel{h}} = 3{,}6 \cdot 10^6\ \text{J}$$

Por tanto, podemos expresar la energía en kWh:

$$1{,}64 \cdot 10^9\ \cancel{J} \cdot \frac{1\ \text{kWh}}{3{,}6 \cdot 10^6\ \cancel{J}} = 455{,}57\ \text{kWh}$$

13. **El $^{131}_{53}I$, que está presente en los reactores de las centrales nucleares, es un isótopo muy peligroso para la salud, pues el yodo se fija con mucha facilidad en la glándula tiroides.**

a) Escribe la reacción de desintegración de este isótopo radiactivo sabiendo que emite partículas β^-.

b) Calcula cuánta energía libera este núclido al desintegrarse. Expresa el resultado en unidades del sistema internacional.

Datos: $m(^{131}I) = 130{,}906\ 12$ u; $m(^{131}Xe) = 130{,}905\ 08$ u; $m(\beta^-) = 5{,}4891 \cdot 10^{-4}$ u; 1 u $= 1{,}66 \cdot 10^{-27}$ kg; $c = 3 \cdot 10^8$ m/s.

a) Si el núcleo emite un electrón, es porque un neutrón se convierte en un protón. El número másico no cambia, mientras que el número atómico aumenta en una unidad. La reacción de desintegración correspondiente es:

$$^{131}_{53}I \rightarrow +\, ^{131}_{54}Xe + \beta^- + \bar{\nu}_e$$

b) Al desintegrarse se produce un desprendimiento de energía debido a la disminución de masa. Es decir, la suma de la masa de las partículas originadas es menor que la masa del núclido inicial. La diferencia será:

$$\Delta m = m\left(^{131}_{53}I\right) - \left(m\left(^{131}_{54}Xe\right) + m\left(\beta^-\right)\right) = 130{,}906\ 12\ \text{u} - \left(130{,}905\ 08\ \text{u} + 5{,}4891 \cdot 10^{-4}\ \text{u}\right) = 4{,}9109 \cdot 10^{-4}\ \text{u}$$

Ahora convertimos esta masa en energía mediante la fórmula de Einstein. Como nos piden el resultado en unidades del SI, expresamos la masa en kg:

$$E = \Delta m \cdot c^2 = 4{,}9109 \cdot 10^{-4}\ \cancel{u} \cdot \frac{1{,}6605 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}}{1\ \cancel{u}} \cdot \left(3 \cdot 10^8\ \text{m/s}\right)^2 = 7{,}34 \cdot 10^{-14}\ \text{J}$$

14. **Cuando explota una bomba de hidrógeno se produce la siguiente reacción:**

$$^{2}_{1}\mathrm{H} + {}^{3}_{1}\mathrm{H} \rightarrow {}^{4}_{2}\mathrm{He} + {}^{1}_{0}\mathrm{n}$$

Calcula la energía de enlace por nucleón para el $^{4}_{2}\mathrm{He}$ y la energía liberada al formarse un átomo de helio.

Datos: $m(^{2}_{1}\mathrm{H}) = 2{,}014\ 74$ u; $m(^{3}_{1}\mathrm{H}) = 3{,}017\ 00$ u; $m(^{4}_{2}\mathrm{He}) = 4{,}002\ 603$ u; $m(^{1}_{0}\mathrm{n}) = 1{,}008\ 665$ u; $m(^{1}_{1}\mathrm{p}) = 1{,}007\ 825$ u; 1 u $= 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg; $c = 3 \cdot 10^{8}$ m/s.

Para calcular la energía de enlace por nucleón calculamos el defecto de masa para el núcleo pedido:

$$\Delta m = \left(2 \cdot m_{\mathrm{p}} + 2 \cdot m_{\mathrm{n}}\right) - m\left({}^{4}_{2}\mathrm{He}\right) = \left(2 \cdot 1{,}007\ 825\ \mathrm{u} + 2 \cdot 1{,}008\ 665\ \mathrm{u}\right) - 4{,}002\ 603\ \mathrm{u} = 0{,}030377\ \mathrm{u}$$

La energía de enlace por nucleón será entonces:

$$\frac{E_{\mathrm{Enlace}}}{\mathrm{nucleón}} = \frac{\Delta m \cdot c^2}{A} = \frac{0{,}030377\ \cancel{\mathrm{u}} \cdot \dfrac{1{,}67 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}}{1\ \cancel{\mathrm{u}}} \cdot \left(3 \cdot 10^{8}\ \mathrm{m/s}\right)^2}{4} = 1{,}1414 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{J/nucleón}$$

La energía liberada al formarse un núcleo de helio se calcula a partir de las masas de las sustancias que intervienen en la reacción:

$$E = \Delta m \cdot c^2 = \left[m\left({}^{2}_{1}\mathrm{H}\right) + m\left({}^{3}_{1}\mathrm{H}\right) - m\left({}^{4}_{2}\mathrm{He}\right) - m\left({}^{1}_{0}\mathrm{n}\right)\right] \cdot c^2 =$$

$$= \left[2{,}014\ 74\ \cancel{\mathrm{u}} + 3{,}017\ 00\ \cancel{\mathrm{u}} - 4{,}002\ 603\ \cancel{\mathrm{u}} - 1{,}008\ 665\ \cancel{\mathrm{u}}\right] \cdot \frac{1{,}67 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg}}{1\ \cancel{\mathrm{u}}} \cdot \left(3 \cdot 10^{8}\ \mathrm{m/s}\right)^2 = 3{,}077 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{J}$$

15. **¿En qué consiste la fisión nuclear? ¿Y la fusión nuclear? Observa las siguientes reacciones nucleares y señala si se trata de reacciones de fisión o de fusión nuclear:**

a) $^{2}_{1}\mathrm{H} + {}^{3}_{1}\mathrm{H} \rightarrow {}^{4}_{1}\mathrm{He} + {}^{1}_{0}\mathrm{n}$

b) $^{1}_{1}\mathrm{H} + {}^{1}_{0}\mathrm{n} \rightarrow {}^{2}_{1}\mathrm{H}$

c) $^{235}_{92}\mathrm{U} + {}^{1}_{0}\mathrm{n} \rightarrow {}^{141}_{56}\mathrm{Ba} + {}^{92}_{36}\mathrm{Kr} + 3\ {}^{1}_{0}\mathrm{n}$

d) $^{235}_{92}\mathrm{U} + {}^{1}_{0}\mathrm{n} \rightarrow {}^{140}_{54}\mathrm{Xe} + {}^{94}_{38}\mathrm{Sr} + 2\ {}^{1}_{0}\mathrm{n}$

La fisión nuclear es el proceso en el que un núclido, generalmente de masa elevada, se rompe en dos o más fracciones de menor masa.

La fusión nuclear es un proceso en el que dos núclidos de masa baja se unen dando un núclido de masa más alta. La masa de los productos de la fusión es ligeramente inferior a la masa de los reactivos, lo que determina la liberación de la cantidad equivalente de energía.

a) Se trata de fusión nuclear, puesto que dos núcleos se unen para dar un núcleo mayor.

b) Se trata de fusión nuclear, puesto que dos núcleos se unen para dar un núcleo mayor.

c) Se trata de fisión nuclear, puesto que un núcleo se divide en dos núcleos más pequeños.

d) Se trata de fisión nuclear, puesto que un núcleo se divide en dos núcleos más pequeños.

16. **La gammagrafía se emplea en diferentes ámbitos. Por ejemplo, para diagnosticar tumores. En estos casos se suministra al paciente un isótopo radiactivo del tecnecio, un emisor de rayos gamma. El periodo de semidesintegración de este isótopo es de 6 horas.**

Calcula el tiempo que debe transcurrir para que la actividad observada en el paciente sea inferior al 5 % de la actividad medida en el instante en que se le inyectó el radioisótopo.

La actividad de una muestra radiactiva depende del número de núcleos existentes y de la constante de desintegración. Para el caso del tecnecio que nos indican:

$$\frac{A}{A_0} = \frac{\cancel{\lambda} \cdot N}{\cancel{\lambda} \cdot N_0} = \frac{\cancel{N_0} \cdot e^{-\lambda \cdot t}}{\cancel{N_0}} \rightarrow \frac{A}{A_0} = e^{-\lambda \cdot t} \rightarrow \ln\left(\frac{A}{A_0}\right) = \ln\left(e^{-\lambda \cdot t}\right) \rightarrow \ln\left(\frac{A}{A_0}\right) = -\lambda \cdot t$$

A partir de la relación entre el número de núclidos en un momento dado y el inicial podemos expresar la constante de desintegración, λ, en función del periodo de semidesintegración, $T_{1/2}$, que es el tiempo que tarda en reducirse a la mitad el número de núclidos iniciales:

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} \rightarrow \frac{N}{N_0} = e^{-\lambda \cdot t} \rightarrow \frac{\frac{\cancel{N_0}}{2}}{\cancel{N_0}} = e^{-\lambda \cdot T_{1/2}} \rightarrow \frac{1}{2} = e^{-\lambda \cdot T_{1/2}}$$

Resolvemos esta ecuación tomando logaritmos a ambos lados de la igualdad y aplicando propiedades de los logaritmos. De esta forma obtenemos la constante de desintegración radiactiva:

$$\ln\frac{1}{2} = -\lambda \cdot T_{1/2} \rightarrow \cancel{\ln 1} - \ln 2 = -\lambda \cdot T_{1/2} \rightarrow \lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$$

Sustituyendo en la expresión anterior:

$$\ln\left(\frac{A}{A_0}\right) = -\frac{\ln 2}{T_{1/2}} \cdot t$$

Despejando y sustituyendo los valores que indica el enunciado:

$$\ln\left(\frac{A}{A_0}\right) = -\frac{\ln 2}{T_{1/2}} \cdot t \rightarrow t = -\frac{\ln\left(\frac{A}{A_0}\right)}{\ln 2} \cdot T_{1/2} = -\frac{\ln(0{,}05)}{\ln 2} \cdot 6\ \text{h} = 25{,}93\ \text{h}$$

17. Tras el accidente ocurrido en la central nuclear de Fukushima (Japón) en 2011 se liberó ^{238}Pu, un isótopo cuyo periodo de semidesintegración es de 88 años. Determina cuánto tiempo transcurrirá hasta que quede una décima parte del ^{238}Pu emitido.

Escribimos la ecuación que liga la variación de los núcleos emitidos con el periodo de semidesintegración:

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} \rightarrow \frac{N}{N_0} = e^{-\lambda \cdot t} \rightarrow \ln\left(\frac{N}{N_0}\right) = \ln\left(e^{-\lambda \cdot t}\right) \rightarrow \ln\left(\frac{N}{N_0}\right) = -\lambda \cdot t \rightarrow \ln\left(\frac{N}{N_0}\right) = -\frac{\ln 2}{T_{1/2}} \cdot t \rightarrow$$

$$\rightarrow t = -\frac{\ln\left(\frac{N}{N_0}\right)}{\ln 2} \cdot T_{1/2} \rightarrow t = -\frac{\ln\left(\frac{1}{10}\right)}{\ln 2} \cdot 88\ \text{años} = 292{,}33\ \text{años}$$

18. El ^{60}Co es un isótopo radiactivo que emite rayos γ. Su periodo de semidesintegración es de 5,25 años. Calcula cuánto ^{60}Co tendremos al cabo de dos años si se tiene una muestra inicial de 100 g.

Aplicamos la ecuación exponencial que liga la masa de una muestra radiactiva con la masa inicial:

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} \rightarrow m = m_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} = m_0 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{T_{1/2}} \cdot t} = 100\ \text{g} \cdot e^{-\frac{\ln 2}{5{,}25\ \cancel{\text{años}}} \cdot 2\ \cancel{\text{años}}} = 76{,}79\ \text{g}$$

19. En una cueva se encuentran restos orgánicos y al realizar la prueba del carbono-14 se observa que la actividad de la muestra es de 10^8 desintegraciones · s^{-1}. Calcula:

a) La masa inicial de la muestra.

b) La actividad cuando han transcurrido 5000 años y la masa de la muestra en ese instante.

Datos: $T_{1/2}$ (^{14}C) = 5730 años; N_A = 6,022 · 10^{23} mol^{-1}; M(^{14}C) = 14 g/mol.

a) Para calcular la masa inicial se emplea la ecuación exponencial que relaciona la masa de una muestra radiactiva con la muestra inicial y la actividad.

$$A = \lambda \cdot N \rightarrow A = \lambda \cdot \frac{m}{M\left({}^{14}\text{C}\right)} \cdot N_\text{A} \rightarrow m = \frac{A \cdot M\left({}^{14}\text{C}\right)}{\lambda \cdot N_\text{A}} = \frac{A \cdot M\left({}^{14}\text{C}\right)}{\frac{\ln 2}{T_{1/2}} \cdot N_\text{A}} =$$

$$= \frac{10^8 \text{ des.} \cdot \cancel{\text{s}^{-1}} \cdot 14 \text{ g}/\cancel{\text{mol}}}{\frac{\ln 2}{5730\ \cancel{\text{años}} \cdot \frac{365{,}25\ \cancel{\text{días}}}{1\ \cancel{\text{año}}} \cdot \frac{24\ \cancel{\text{h}}}{1\ \cancel{\text{día}}} \cdot \frac{3600\ \cancel{\text{s}}}{1\ \cancel{\text{h}}}} \cdot 6{,}022 \cdot 10^{23} \text{ át.}/\cancel{\text{mol}}} = 6{,}065 \cdot 10^{-4} \text{ g}$$

b) Cuando han transcurrido 5000 años la actividad habrá disminuido porque hay menos núclidos.

$$A = \lambda \cdot N = \lambda \cdot N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} \rightarrow \frac{A}{A_0} = \frac{\lambda \cdot N}{\lambda \cdot N_0} = \frac{\cancel{\lambda \cdot N_0} \cdot e^{-\lambda \cdot t}}{\cancel{\lambda \cdot N_0}} \rightarrow A = A_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} = A_0 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{T_{1/2}} \cdot t} =$$

$$= 10^8 \text{ des.} \cdot \text{s}^{-1} \cdot e^{-\frac{\ln 2}{5730 \text{ años}} \cdot 5000 \text{ años}} = 5{,}46 \cdot 10^7 \text{des.} \cdot \text{s}^{-1} = 5{,}46 \cdot 10^7 \text{ Bq}$$

La masa de la muestra se puede calcular a partir de los núclidos que quedan sin desintegrar.

$$A = \lambda \cdot N \rightarrow N = \frac{A}{\lambda} \rightarrow \frac{m}{M\left({}^{14}\text{C}\right)} \cdot N_\text{A} = \frac{A}{\lambda} \rightarrow m = \frac{A \cdot M\left({}^{14}\text{C}\right)}{\lambda \cdot N_\text{A}} = \frac{A \cdot M\left({}^{14}\text{C}\right)}{\frac{\ln 2}{T_{1/2}} \cdot N_\text{A}} =$$

$$= \frac{5{,}46 \cdot 10^7 \text{ des} \cdot \cancel{\text{s}^{-1}} \cdot 14 \text{ g}/\cancel{\text{mol}}}{\frac{\ln 2}{5730\ \cancel{\text{años}} \cdot \frac{365{,}25\ \cancel{\text{días}}}{1\ \cancel{\text{año}}} \cdot \frac{24\ \cancel{\text{h}}}{1\ \cancel{\text{día}}} \cdot \frac{3600\ \cancel{\text{s}}}{1\ \cancel{\text{h}}}} \cdot 6{,}022 \cdot 10^{23} \text{ át.}/\cancel{\text{mol}}} = 3{,}311 \cdot 10^{-4} \text{ g}$$

20. En una excavación arqueológica se encuentra una muestra orgánica en la que queda una décima parte del carbono ^{14}C que contenía la muestra inicialmente.

a) Calcula la edad que tiene la muestra orgánica encontrada en la excavación.

b) Sabemos que actualmente hay 10^{14} átomos de ^{14}C en la muestra. Calcula cuál es entonces su actividad.

Dato: $T_{1/2}$ (^{14}C) = 5730 años.

a) La relación entre los núclidos presentes y los que había al principio se puede relacionar con el periodo de semidesintegración del núclido. Queda:

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} \rightarrow \frac{N}{N_0} = e^{-\lambda \cdot t} \rightarrow \ln\left(\frac{N}{N_0}\right) = \ln\left(e^{-\lambda \cdot t}\right) \rightarrow \ln\left(\frac{N}{N_0}\right) = -\lambda \cdot t \rightarrow \ln\left(\frac{N}{N_0}\right) = -\frac{\ln 2}{T_{1/2}} \cdot t \rightarrow$$

$$\rightarrow t = -\frac{\ln\left(\frac{N}{N_0}\right)}{\ln 2} \cdot T_{1/2} \rightarrow t = -\frac{\ln\left(\frac{1}{10}\right)}{\ln 2} \cdot 5730 \text{ años} = 19\,034{,}6 \text{ años}$$

b) La actividad está relacionada con la cantidad de núclidos presentes en cada momento:

$$A = \lambda \cdot N = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \cdot N = \frac{\ln 2}{5730\ \cancel{\text{años}} \cdot \frac{365{,}25\ \cancel{\text{días}}}{1\ \cancel{\text{año}}} \cdot \frac{24\ \cancel{\text{h}}}{1\ \cancel{\text{día}}} \cdot \frac{3600\ \cancel{\text{s}}}{1\ \cancel{\text{h}}}} \cdot 10^{14} \text{ núcleos} = 383{,}3 \text{ Bq}$$

21. La masa de un núcleo atómico ¿es mayor o menor que la suma de las masas de las partículas que lo forman? ¿Por qué?

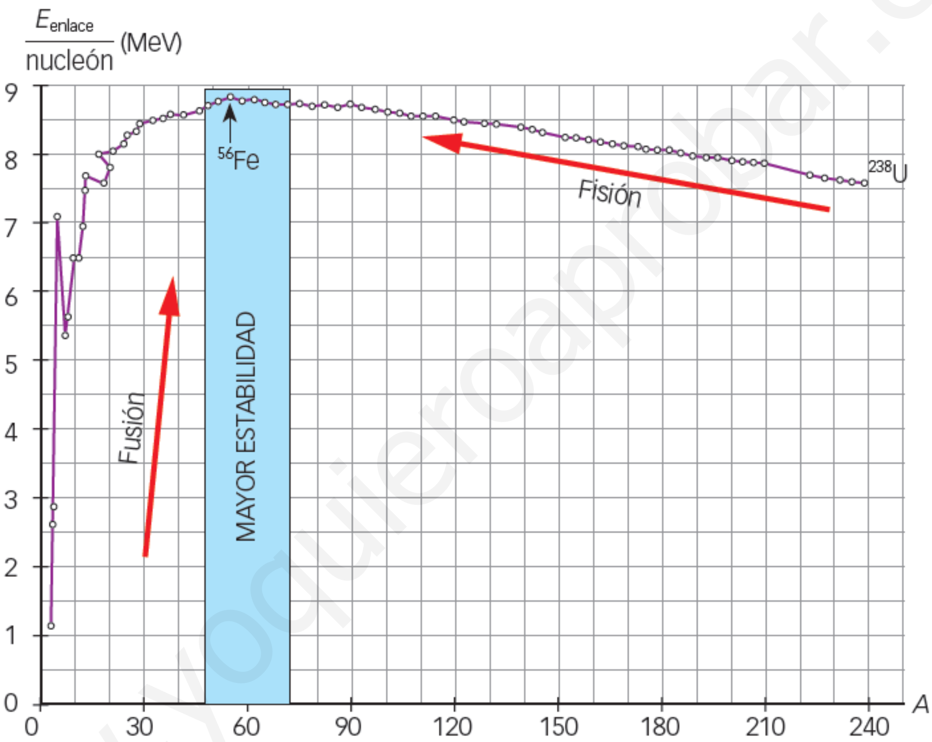
La masa de un núcleo es menor que la suma de las masas de las partículas que lo forman porque una parte de la masa aparece en forma de enlace entre los nucleones que forman el núcleo, según la fórmula de Einstein:

$$E = \Delta m \cdot c^2$$

Δm es la diferencia entre la suma de la masa de las partículas que forman el núcleo y la masa del núcleo.

22. ¿Qué se entiende por estabilidad nuclear? Representa cómo varía la energía de enlace por nucleón en función del número másico de los diferentes núcleos atómicos y usa la gráfica para explicar cómo es posible obtener energía mediante reacciones de fusión y de fisión nuclear.

La estabilidad se refiere a la energía de enlace por nucleón. En un núcleo, cuanto mayor sea la energía de enlace por nucleón, más estable será el núcleo, pues las fuerzas entre sus nucleones serán mayores.



Los núcleos más pequeños que el hierro pueden fusionarse y liberar energía en el proceso. En cambio, los núcleos mayores que los de hierro deben fisionarse para poder liberar energía.

23. Calcula la energía de enlace por nucleón para el ^{55}Mn, cuya masa es 54,938 u. Expresa el resultado en MeV.

Datos: Z (Mn) = 25; m_p = 1,0073 u; m_n = 1,0087 u; 1 u = 931 MeV/c²; 1 u = 1,66 · 10⁻²⁷ kg; c = 3 · 10⁸ m/s; 1 eV = 1,6 · 10⁻¹⁹ J.

El defecto de masa en este caso vale:

$$\Delta m = 25 \cdot m_p + 30 \cdot m_n - m\left({}^{55}\text{Mn}\right) = 25 \cdot 1{,}0073\ \text{u} + 30 \cdot 1{,}0087\ \text{u} - 54{,}938\ \text{u} = 0{,}5055\ \text{u}$$

Ahora convertimos esta masa en energía mediante la fórmula de Einstein.

$$\frac{E_{\text{Enlace}}}{\text{nucleón}} = \frac{\Delta m \cdot c^2}{A} = \frac{0{,}5055\ \cancel{\text{u}} \cdot \dfrac{1{,}66 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}}{1\ \cancel{\text{u}}} \cdot \left(3 \cdot 10^8\ \text{m/s}\right)^2}{55} = 1{,}373 \cdot 10^{-12}\ \text{J/nucleón}$$

Cambiando de unidades:

$$1{,}373\cdot 10^{-12}\ \text{J/nucleón}\cdot\frac{1\ \text{eV}}{1{,}6\cdot 10^{-19}\ \text{J}}\cdot\frac{1\ \text{MeV}}{10^{6}\ \text{eV}}=8{,}582\ \text{MeV/nucleón}$$

24. Para los isótopos ${}^{12}_{6}C$ y ${}^{13}_{6}C$, di cuál es más estable y calcula la energía de enlace por nucleón.

Datos: $m({}^{12}_{6}C)=12{,}0000$ u; $m({}^{13}_{6}C)=13{,}0034$ u; $m_p=1{,}0073$ u; $m_n=1{,}0087$ u; 1 u $=1{,}66\cdot 10^{-27}$ kg; $c=3\cdot 10^{8}\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

El más estable será aquel que tenga una mayor energía de enlace por nucleón. Calculamos primero el defecto de masa para cada caso:

- ${}^{12}_{6}C \rightarrow \Delta m=6\cdot m_p+6\cdot m_n-m\left({}^{12}_{6}C\right)=6\cdot 1{,}0073\ \text{u}+6\cdot 1{,}0087\ \text{u}-12{,}0000\ \text{u}=0{,}096\ \text{u}$
- ${}^{13}_{6}C \rightarrow \Delta m=6\cdot m_p+7\cdot m_n-m\left({}^{13}_{6}C\right)=6\cdot 1{,}0073\ \text{u}+7\cdot 1{,}0087\ \text{u}-13{,}0034\ \text{u}=0{,}1013\ \text{u}$

Ahora convertimos esta masa en energía de enlace mediante la fórmula de Einstein.

$$\frac{E_{\text{Enlace}}}{\text{nucleón}}=\frac{\Delta m\cdot c^2}{A}$$

Aplicamos la ecuación anterior a ambos núclidos:

- ${}^{12}_{6}C \rightarrow \dfrac{E_{\text{Enlace}}}{\text{nucleón}}=\dfrac{\Delta m\cdot c^2}{A}=\dfrac{0{,}096\ \cancel{\text{u}}\cdot\dfrac{1{,}66\cdot 10^{-27}\ \text{kg}}{1\ \cancel{\text{u}}}\cdot\left(3\cdot 10^{8}\ \text{m/s}\right)^2}{12}=1{,}195\cdot 10^{-12}\ \text{J/nucleón}$
- ${}^{13}_{6}C \rightarrow \dfrac{E_{\text{Enlace}}}{\text{nucleón}}=\dfrac{\Delta m\cdot c^2}{A}=\dfrac{0{,}1013\ \cancel{\text{u}}\cdot\dfrac{1{,}66\cdot 10^{-27}\ \text{kg}}{1\ \cancel{\text{u}}}\cdot\left(3\cdot 10^{8}\ \text{m/s}\right)^2}{13}=1{,}164\cdot 10^{-12}\ \text{J/nucleón}$

Por tanto, el más estable es el ${}^{12}_{6}C$.

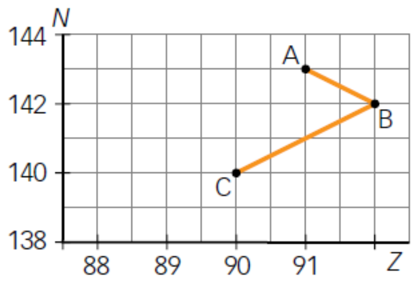
25. Un núcleo atómico emite una partícula α y dos partículas β. Determina cómo varían *Z* y *A*.

En cada desintegración α el número másico, *A*, disminuye en cuatro unidades y el número atómico, *Z*, en dos. En cada desintegración β, A no varía y *Z* aumenta en una unidad. Por tanto:

$${}^{A}_{Z}X\xrightarrow{\text{Desintegración }\alpha}{}^{A-4}_{Z-2}X\xrightarrow{\text{Desintegración }\beta}{}^{A-4}_{Z-2+1}X\xrightarrow{\text{Desintegración }\beta}{}^{A-4}_{Z-2+1+1}X\rightarrow{}^{A-4}_{Z}X$$

Es decir, al final obtenemos un núcleo del mismo elemento químico, puesto que *Z* no varía, y con un número másico reducido en cuatro unidades. Es decir, obtenemos un isótopo más ligero del elemento de partida.

26. Los puntos del gráfico representan isótopos, y las flechas, desintegraciones. Indica *Z* y *A* para los isótopos A, B y C, y los tipos de desintegraciones A → B y B→ C?



El isótopo A tiene un número atómico de 91. Su número másico es 91 + 143 = 234.

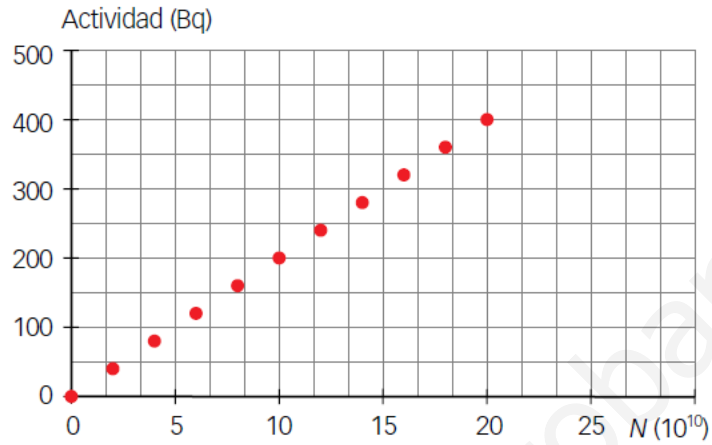
El isótopo B tiene un número atómico de 92. Su número másico es 92 + 142 = 234.

El isótopo C tiene un número atómico de 90. Su número másico es 90 + 140 = 230.

La desintegración A $\rightarrow$ B es una desintegración β, puesto que el número atómico se incrementa en una unidad y el número másico no varía.

La desintegración B $\rightarrow$ C es una desintegración α, puesto que el número atómico disminuye en dos unidades y el número másico disminuye en cuatro unidades.

27. La gráfica recoge la actividad de una muestra en función del número de átomos del isótopo radiactivo que contiene.



a) Halla el periodo de semidesintegración del isótopo.

b) Representa cómo varía el número de átomos del isótopo radiactivo en la muestra con el tiempo.

a) La actividad aumenta a medida que se incrementa el número de átomos. Podemos relacionar la actividad con el número de átomos mediante la siguiente expresión:

$$A = \lambda \cdot N \rightarrow \lambda = \frac{A}{N}$$

Por otra parte, el número de núclidos de una muestra radiactiva evoluciona según la siguiente ecuación:

$$N = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} \rightarrow \frac{N}{N_0} = e^{-\lambda \cdot t}$$

Cuando ha transcurrido un tiempo igual al periodo de semidesintegración queda la mitad de los núcleos que había inicialmente. Es decir:

$$\frac{1}{2} = e^{-\lambda \cdot T_{1/2}} \rightarrow \ln\frac{1}{2} = -\lambda \cdot T_{1/2} \rightarrow \cancel{\ln 1} - \ln 2 = -\lambda \cdot T_{1/2} \rightarrow \lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$$

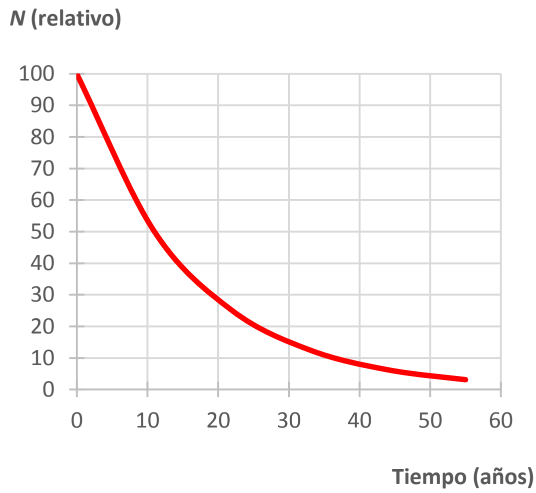
Entonces, igualando las dos expresiones obtenidas para λ:

$$\frac{A}{N} = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \rightarrow T_{1/2} = \frac{\ln 2 \cdot N}{A}$$

Elegimos un punto cualquiera de la gráfica para calcular el periodo de semidesintegración:

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2 \cdot 20 \cdot 10^{10}\ \text{núcleos}}{400\ \text{des./s}} = 3{,}47 \cdot 10^{8}\ \cancel{\text{s}} \cdot \frac{1\ \cancel{\text{día}}}{24\ \cancel{\text{h}}} \cdot \frac{1\ \cancel{\text{h}}}{3600\ \cancel{\text{s}}} \cdot \frac{1\ \text{año}}{365{,}25\ \cancel{\text{días}}} \simeq 11\ \text{años}$$

b) Representación:



28. La vida media de un isótopo es de 50 años. Calcula:

a) El tiempo necesario para que la actividad se reduzca al 40 %.

b) Las desintegraciones que tienen lugar cada hora en una muestra de 10^{10} núcleos radiactivos.

a) Con el tiempo la actividad de cualquier muestra se irá reduciendo pues cada vez van quedando menos núcleos radiactivos de la muestra inicial. La actividad viene dada por la expresión:

$$A = \lambda \cdot N = \lambda \cdot N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} = \lambda \cdot N_0 \cdot e^{-\frac{\ln 2}{T_{1/2}} \cdot t}$$

Si la actividad se reduce al 40 %, podemos escribir la siguiente relación entre la actividad final y la actividad inicial:

$$\frac{A}{A_0} = \frac{\lambda \cdot N}{\lambda \cdot N_0} = \frac{\cancel{\lambda \cdot N_0} \cdot e^{-\lambda \cdot t}}{\cancel{\lambda \cdot N_0}} \rightarrow \frac{A}{A_0} = e^{-\lambda \cdot t} \rightarrow \frac{A}{A_0} = e^{-\frac{\ln 2}{T_{1/2}} \cdot t} \rightarrow \ln\left(\frac{A}{A_0}\right) = -\frac{\ln 2}{T_{1/2}} \cdot t \rightarrow$$

$$\rightarrow t = -\frac{\ln\left(\frac{A}{A_0}\right)}{\ln 2} \cdot T_{1/2} \rightarrow t = -\frac{\ln\left(\frac{40}{100}\right)}{\ln 2} \cdot 50 \text{ años} = 66{,}1 \text{ años}$$

b) Las desintegraciones que tienen lugar cada hora se pueden calcular a partir de la actividad de la muestra:

$$A = \lambda \cdot N = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \cdot N = \frac{\ln 2}{50 \text{ años} \cdot \frac{365{,}25 \ \cancel{\text{días}}}{1 \ \cancel{\text{año}}} \cdot \frac{24 \ \cancel{\text{h}}}{1 \ \cancel{\text{día}}} \cdot \frac{3600 \ \cancel{\text{s}}}{1 \ \cancel{\text{h}}}} \cdot 10^{10} \text{ núcleos} = 4{,}393 \text{ des./s} = 4{,}393 \text{ Bq}$$

Como nos piden las desintegraciones que tienen lugar en una hora:

$$4{,}393 \text{ des.}/\cancel{\text{s}} \cdot \frac{3600 \ \cancel{\text{s}}}{1 \text{ h}} = 1{,}581 \cdot 10^4 \text{ des./h}$$

29. Una muestra contiene 5 g de masa de material radiactivo. Al cabo de 25 años quedan 4,95 g de dicho material.

a) ¿Cuál es el periodo de semidesintegración?

b) ¿Cuánto tiempo debemos esperar hasta que queden 4 g de material radiactivo?

a) La masa va disminuyendo porque van desapareciendo núcleos que se desintegran. La masa en cada momento está relacionada con el número de núcleos que quedan.

$$m = cte.\cdot N \rightarrow \frac{m}{m_0} = \frac{\cancel{cte.}\cdot N}{\cancel{cte.}\cdot N_0} = \frac{N}{N_0} = \frac{\cancel{N_0}\cdot e^{-\lambda\cdot t}}{\cancel{N_0}} \rightarrow \frac{m}{m_0} = e^{-\lambda\cdot t} \rightarrow \frac{m}{m_0} = e^{-\frac{\ln 2}{T_{1/2}}\cdot t} \rightarrow$$

$$\rightarrow \ln\left(\frac{m}{m_0}\right) = \ln\left(e^{-\frac{\ln 2}{T_{1/2}}\cdot t}\right) \rightarrow \ln\left(\frac{m}{m_0}\right) = -\frac{\ln 2}{T_{1/2}}\cdot t \rightarrow T_{1/2} = -\frac{\ln 2}{\ln\left(\frac{m}{m_0}\right)}\cdot t \rightarrow$$

$$\rightarrow T_{1/2} = -\frac{\ln 2}{\ln\left(\frac{4{,}95\ \cancel{g}}{5\ \cancel{g}}\right)}\cdot 25\ \text{años} = 1724{,}19\ \text{años}$$

b) Para que queden solamente 4 g debe transcurrir aún más tiempo. Veamos cuánto, ahora que ya conocemos el periodo de semidesintegración:

$$\frac{m}{m_0} = e^{-\frac{\ln 2}{T_{1/2}}\cdot t} \rightarrow \ln\left(\frac{m}{m_0}\right) = \ln\left(e^{-\frac{\ln 2}{T_{1/2}}\cdot t}\right) \rightarrow \ln\left(\frac{m}{m_0}\right) = -\frac{\ln 2}{T_{1/2}}\cdot t \rightarrow$$

$$\rightarrow t = -\frac{\ln\left(\frac{m}{m_0}\right)}{\ln 2}\cdot T_{1/2} \rightarrow t = -\frac{\ln\left(\frac{4\ \cancel{g}}{5\ \cancel{g}}\right)}{\ln 2}\cdot 1724{,}19\ \text{años} = 555{,}07\ \text{años}$$

30. Dos isótopos radiactivos tienen diferentes constantes de desintegración. Si partimos de una muestra de 10 g de cada uno de ellos, ¿de cuál quedarán más núclidos sin desintegrar al cabo del tiempo?

La constante de desintegración es inversamente proporcional al periodo de semidesintegración. Por tanto, si partimos de la misma cantidad de ambas muestras, al cabo del tiempo quedarán más núclidos sin desintegrar de la muestra cuyo periodo de semidesintegración es mayor, es decir, del isótopo cuya constante de desintegración es menor.

$$N = N_0\cdot e^{-\lambda\cdot t} \rightarrow \frac{N_1}{N_2} = \frac{\cancel{N_0}\cdot e^{-\frac{\ln 2}{(T_{1/2})_1}\cdot t}}{\cancel{N_0}\cdot e^{-\frac{\ln 2}{(T_{1/2})_2}\cdot t}} \rightarrow \frac{N_1}{N_2} = \frac{e^{-\frac{\ln 2}{(T_{1/2})_1}\cdot t}}{e^{-\frac{\ln 2}{(T_{1/2})_2}\cdot t}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{N_1}{N_2} = e^{-\frac{\ln 2}{(T_{1/2})_1}\cdot t}\cdot e^{+\frac{\ln 2}{(T_{1/2})_2}\cdot t} = e^{+\frac{\ln 2}{(T_{1/2})_2}\cdot t-\frac{\ln 2}{(T_{1/2})_1}\cdot t} \rightarrow \frac{N_1}{N_2} = e^{\ln 2\cdot t\cdot\left(\frac{1}{(T_{1/2})_2}-\frac{1}{(T_{1/2})_1}\right)}$$

Tomamos ahora logaritmos en ambos miembros de la ecuación:

$$\ln\left(\frac{N_1}{N_2}\right) = \ln\left(e^{\ln 2\cdot t\cdot\left(\frac{1}{(T_{1/2})_2}-\frac{1}{(T_{1/2})_1}\right)}\right) \rightarrow \ln\left(\frac{N_1}{N_2}\right) = \ln 2\cdot t\cdot\left(\frac{1}{(T_{1/2})_2}-\frac{1}{(T_{1/2})_1}\right)$$

Al cabo de cierto tiempo, el mismo para ambos, tenemos:

$$(T_{1/2})_1 > (T_{1/2})_2 \rightarrow \frac{1}{(T_{1/2})_2} > \frac{1}{(T_{1/2})_1} \rightarrow \frac{1}{(T_{1/2})_2} - \frac{1}{(T_{1/2})_1} > 0 \rightarrow \ln\left(\frac{N_1}{N_2}\right) > 0 \rightarrow \frac{N_1}{N_2} > 1 \rightarrow N_1 > N_2$$

Es decir, quedan más núcleos de aquel que tiene un periodo de semidesintegración mayor.

31. **El tritio es un isótopo del hidrógeno con dos neutrones en su núcleo. Se produce en la atmósfera cuando los átomos de nitrógeno chocan con otra partícula desconocida según la reacción escrita abajo. Determina cuántos protones y neutrones hay en la partícula Q:**

$$^{14}_{7}\text{N}+{}^{X}_{Y}\text{Q}\rightarrow{}^{12}_{6}\text{C}+{}^{3}_{1}\text{H}$$

El tritio es radiactivo. Su periodo de semidesintegración es de 12 años. Supón que se parte de una muestra de 200 g de tritio. Representa en una gráfica cómo varía la cantidad de tritio a lo largo de los siguientes 36 años.

En la ecuación anterior debe conservarse la carga eléctrica y el número de nucleones. Por tanto:

$$7+y=6+1\rightarrow y=0$$

Es decir, la partícula Q no tiene carga eléctrica.

Por otra parte:

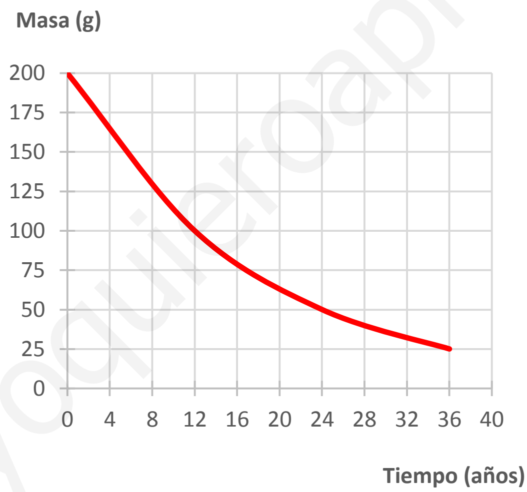
$$14+x=12+3\rightarrow x=1$$

Por tanto, la partícula Q es un neutrón y la reacción completa sería esta:

$$^{14}_{7}\text{N}+{}^{1}_{0}\text{n}\rightarrow{}^{12}_{6}\text{C}+{}^{3}_{1}\text{H}$$

Si el periodo de semidesintegración es de 12 años, eso quiere decir que al cabo de 12 años quedará la mitad de la muestra sin desintegrar: 100 g. Tras otros 12 años, cuando han transcurrido 24 años, quedará la cuarta parte: 50 g; y tras 36 años quedará la octava parte: 25 g.

Gráficamente:



32. **Escribe la reacción correspondiente al bombardeo de $^{14}_{7}\text{N}$ con partículas α, en la que se forma $^{17}_{8}\text{O}$ y otras partículas.**

El isótopo de oxígeno tiene un protón más que el isótopo de nitrógeno en su núcleo. Además, su número másico es mayor en tres unidades. Y la partícula α tiene 2 neutrones y 2 protones. Por tanto, podemos escribir:

$$^{14}_{7}\text{N}+{}^{4}_{2}\alpha\rightarrow{}^{17}_{8}\text{O}+{}^{1}_{-1}\text{X}$$

Es decir, en la reacción debe aparecer una partícula con carga negativa y además debe aparecer una partícula con número másico 1. Por tanto, se forman un neutrón y un electrón. La reacción correspondiente es:

$$^{14}_{7}\text{N}+{}^{4}_{2}\alpha\rightarrow{}^{17}_{8}\text{O}+{}^{1}_{0}\text{n}+\text{e}^{-}$$

33. Anota en tu cuaderno qué reacción representa los productos de la fisión del $^{235}_{92}U$ tras absorber un neutrón.

a) $^{209}_{82}Pb + 5\alpha + 2p + 5n$ **b)** $^{90}_{38}Sr + ^{140}_{54}Xe + 6n$ **c)** $^{141}_{56}Ba + ^{92}_{36}Kr + 3n$

Al bombardear deben conservarse las cargas y el número de nucleones. Por tanto, a la derecha de la ecuación debe haber productos con una carga positiva igual a la carga del núcleo de uranio, es decir, 82. Y debe haber en total 235 + 1 = 236 nucleones (los 235 del uranio más el neutrón).

Las ecuaciones que satisfacen estos criterios son la b y la c:

$$^{235}_{92}U + ^{1}_{0}n \rightarrow ^{90}_{38}Sr + ^{140}_{54}Xe + 6\ ^{1}_{0}n$$

$$^{235}_{92}U + ^{1}_{0}n \rightarrow ^{141}_{56}Ba + ^{92}_{36}Kr + 3\ ^{1}_{0}n$$

34. El uranio-235 tiene unos cuarenta modos posibles de desintegración por absorción de un neutrón.

a) Completa la reacción nuclear siguiente, que ocurre cuando un núcleo de ^{235}U absorbe un neutrón:

$$^{1}_{0}n + ^{235}_{92}U \rightarrow ^{95}_{38}Sr + ^{c}_{d}Xn + 2\ ^{1}_{0}n$$

Indica también cuántos neutrones y protones tiene este núcleo de uranio.

b) Calcula la energía producida en la fisión de un núcleo de uranio 235, de acuerdo con la reacción anterior.

Datos: m_n = 1,008 66 u; $m(^{235}U)$ = 235,124 u; $m(^{95}Sr)$ = 94,9194 u; $m(^{139}Xe)$ = 138,919 u; $c = 3 \cdot 10^8$ m s^{-1}; 1 u = 1,660 54 · 10^{-27} kg.

a) Para completar la reacción hay que tener en cuenta que debe conservarse tanto el número de nucleones como la carga eléctrica. Por tanto:

$$1 + 235 = 95 + c + 2 \cdot 1 \rightarrow c = 236 - 95 - 2 = 139$$

$$92 = 38 + d \rightarrow d = 54$$

La reacción queda entonces:

$$^{1}_{0}n + ^{235}_{92}U \rightarrow ^{95}_{38}Sr + ^{139}_{54}Xn + 2\ ^{1}_{0}n$$

El núcleo de uranio tiene 92 protones y 235 – 92 = 143 neutrones.

b) La energía producida depende de la diferencia de masa entre los reactivos y los productos. Para la reacción en la que se fisiona un núcleo:

$$\Delta m = m\left(^{235}_{92}U\right) + m\left(^{1}_{0}n\right) - m\left(^{95}_{38}Sr\right) - m\left(^{139}_{54}Xe\right) - 2 \cdot m\left(^{1}_{0}n\right) = m\left(^{235}_{92}U\right) - m\left(^{95}_{38}Sr\right) - m\left(^{139}_{54}Xe\right) - m\left(^{1}_{0}n\right) =$$
$$= 235{,}124\ u - 94{,}9194\ u - 138{,}919\ u - 1{,}008\ 66\ u = 0{,}2769\ u$$

Ahora convertimos esta masa en energía mediante la fórmula de Einstein.

$$E = \Delta m \cdot c^2 = 0{,}2769\ \cancel{u} \cdot \frac{1{,}660\ 54 \cdot 10^{-27}\ kg}{1\ \cancel{u}} \cdot \left(3 \cdot 10^8\ m/s\right)^2 = 4{,}138 \cdot 10^{-11}\ J/núcleo$$

35. En esta reacción nuclear se liberan 11,47 MeV.

$$^{A}_{Z}Li + ^{1}_{1}H \rightarrow 2\ ^{4}_{2}He$$

Completa los números *A* y *Z* y calcula la masa atómica del isótopo de litio.

Datos: *m*(H) = 1,0078 u; *m*(He) = 4,0026 u; 1 u = 931 MeV/c^2.

Para completar la reacción hay que tener en cuenta que debe conservarse tanto el número de nucleones como la carga eléctrica. Por tanto:

$$A + 1 = 8 \rightarrow A = 7$$

$$Z + 1 = 4 \rightarrow Z = 3$$

La reacción queda entonces:

$$^{7}_{3}Li + ^{1}_{1}H \rightarrow 2\ ^{4}_{2}He$$

La masa del isótopo de litio se puede calcular a partir de las masas de los demás núclidos y de la energía liberada.

$$E = \Delta m \cdot c^2 = \left[m\left({}^{7}_{3}\text{Li}\right) + m\left({}^{1}_{1}\text{H}\right) - 2 \cdot m\left({}^{4}_{2}\text{He}\right) \right] \cdot c^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{E}{c^2} = m\left({}^{7}_{3}\text{Li}\right) + m\left({}^{1}_{1}\text{H}\right) - 2 \cdot m\left({}^{4}_{2}\text{He}\right) \rightarrow m\left({}^{7}_{3}\text{Li}\right) = \frac{E}{c^2} - m\left({}^{1}_{1}\text{H}\right) + 2 \cdot m\left({}^{4}_{2}\text{He}\right) =$$

$$= \frac{11{,}47\ \cancel{\text{MeV}} \cdot \dfrac{1\ \text{u}}{931\ \cancel{\text{MeV}} \cdot \cancel{c^2}}}{\cancel{c^2}} - 1{,}0078\ \text{u} + 2 \cdot 4{,}0026\ \text{u} \rightarrow m\left({}^{7}_{3}\text{Li}\right) = 7{,}0097\ \text{u}$$

36. En algunas estrellas se producen reacciones de fusión del ciclo de carbono. En la etapa final un protón se une con el núcleo ${}^{15}_{7}\text{N}$ para dar ${}^{12}_{6}\text{C}$ y un núcleo de helio.

a) Escribe la reacción nuclear correspondiente.

b) ¿Cuánta energía se genera al formar 10 kg de ${}^{12}_{6}\text{C}$?

Datos: $m({}^{1}_{1}\text{H}) = 1{,}007\ 825$ u; $m({}^{15}_{7}\text{N}) = 15{,}000\ 108$ u; $m({}^{12}_{6}\text{C}) = 12{,}000\ 000$ u; $m({}^{4}_{2}\text{He}) = 4{,}002\ 603$ u; 1 u $= 1{,}7 \cdot 10^{-27}$ kg; $c = 3 \cdot 10^8$ m/s.

a) Para completar la reacción hay que tener en cuenta que deben conservarse tanto el número de nucleones como la carga eléctrica. Por tanto:

$${}^{15}_{7}\text{N} + {}^{1}_{1}\text{p} \rightarrow {}^{12}_{6}\text{C} + {}^{4}_{2}\text{He}$$

b) Al formar un núcleo de ^{12}C se genera cierta energía que podemos calcular realizando el balance energético en la reacción nuclear anterior. Así:

$$\Delta m = m\left({}^{15}_{7}\text{N}\right) + m\left({}^{1}_{1}\text{H}\right) - m\left({}^{12}_{6}\text{C}\right) - m\left({}^{4}_{2}\text{He}\right) = 15{,}000\ 108\ \text{u} + 1{,}007\ 825 - 12{,}000\ 000\ \text{u} - 4{,}002\ 603\ \text{u} =$$

$$= 5{,}333 \cdot 10^{-3}\ \text{u}$$

Entonces la energía generada durante la formación de un núcleo de ^{12}C es:

$$E = \Delta m \cdot c^2 = 5{,}333 \cdot 10^{-3}\ \text{u} \cdot \frac{1{,}7 \cdot 10^{-27}\ \text{kg}}{1\ \text{u}} \cdot \left(3 \cdot 10^8\ \text{m/s}\right)^2 = 8{,}155 \cdot 10^{-13}\ \text{J}$$

Como piden la energía liberada al formar 10 kg:

$$8{,}155 \cdot 10^{-13}\ \frac{\text{J}}{\cancel{1\ \text{átomo C}}} \cdot \frac{\cancel{1\ \text{átomo C}}}{12\ \cancel{\text{u}}} \cdot \frac{1\ \cancel{\text{u}}}{1{,}7 \cdot 10^{-27}\ \cancel{\text{kg}}} \cdot 10\ \cancel{\text{kg}} = 4 \cdot 10^{13}\ \text{J}$$

37. El ^{131}I es un isótopo radiactivo empleado para tratar el cáncer y enfermedades del tiroides. Su periodo de semidesintegración es de ocho días, según esta reacción:

$${}^{131}_{53}\text{I} \rightarrow {}^{x}_{y}\text{Xe} + \beta^- + \gamma$$

a) Determina X, Y.

b) ¿Cuánto tiempo transcurrirá hasta que la cantidad de ^{131}I introducida en un paciente se reduzca hasta el 6,25 % de su valor inicial?

a) En la reacción anterior debe conservarse el número de nucleones y la carga eléctrica. Es decir:

$$131 = x + 0 + 0 \rightarrow x = 131\ ;\ 53 = y - 1 \rightarrow y = 54$$

Por tanto, la reacción será esta:

$${}^{131}_{53}\text{I} \rightarrow {}^{131}_{54}\text{Xe} + \beta^- + {}^{0}_{0}\overline{\nu}_e$$

Se trata de una desintegración β: un neutrón del núcleo se convierte en un protón.

b) La actividad está relacionada con el número de núclidos. A medida que se va desintegrando sustancia van quedando menos núclidos y la actividad va disminuyendo.

$$A = \lambda \cdot N \rightarrow \frac{A}{A_0} = \frac{\lambda \cdot N}{\lambda \cdot N_0} = \frac{\cancel{\lambda \cdot N_0} \cdot e^{-\lambda \cdot t}}{\cancel{\lambda \cdot N_0}} \rightarrow \frac{A}{A_0} = e^{-\lambda \cdot t} \rightarrow \frac{A}{A_0} = e^{-\frac{\ln 2}{T_{1/2}} \cdot t} \rightarrow \ln\left(\frac{A}{A_0}\right) = -\frac{\ln 2}{T_{1/2}} \cdot t \rightarrow$$

$$\rightarrow t = -\frac{\ln\left(\frac{A}{A_0}\right)}{\ln 2} \cdot T_{1/2} \rightarrow t = -\frac{\ln\left(\frac{6{,}25}{100}\right)}{\ln 2} \cdot 8 \text{ días} = 32 \text{ días}$$

FÍSICA EN TU VIDA

1. ¿Por qué se usan preferiblemente isótopos con un periodo de semidesintegración corto en las gammagrafías?

Porque así no hay que esperar mucho tiempo para poder realizar la prueba correspondiente en el paciente, ya que la imagen se forma a partir de los fotones gamma emitidos durante la desintegración del isótopo empleado.

2. ¿Qué indican las zonas coloreadas con diferentes tonos en una gammagrafía?

Las zonas coloreadas indican las regiones en las que se han detectado los fotones gamma emitidos por el isótopo radiactivo.

3. ¿Por qué se dice que las gammagrafías son inocuas para el paciente, si en realidad se introduce en su organismo una sustancia radiactiva?

Porque dicha sustancia radiactiva no altera los tejidos del paciente. Es una cantidad poco elevada que no reviste peligro. Además, deben emplearse sustancias que no emitan fotones gamma muy energéticos, ya que cuanta más energía tienen los fotones, más daños causan en el organismo.

4. Se dice que la gammagrafía es una técnica muy completa porque, a diferencia de otras técnicas de diagnóstico muestran el cuerpo humano en funcionamiento. Explica esto con algún ejemplo.

Si el paciente ingiere una sustancia radiactiva, esta puede pasar, por ejemplo, al torrente sanguíneo, de modo que se puede ver cómo se mueve esta sustancia por el organismo y obtener un mapa detallado, por ejemplo, del aparato circulatorio.

PROYECTO SABER HACER

11

Física de partículas

SANTILLANA

Física de partículas

11

PARA COMENZAR

- **¿Qué quiere decir que una partícula es fundamental? ¿Es el muon una partícula fundamental? ¿Qué partículas fundamentales conoces?**

  Quiere decir que no está constituida por otras partículas más pequeñas. El muon sí es una partícula fundamental, porque no está formada por otras partículas de menor tamaño.

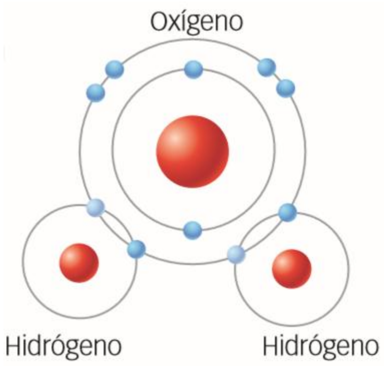
  Respuesta personal. Algunas partículas fundamentales: electrón, fotón, neutrino, quark.

- **Cuando se coloca un potente imán cerca de una cámara de niebla, pueden observarse algunas estelas curvadas. Explica este fenómeno.**

  Cuando se coloca un imán cerca de un detector de partículas, las partículas que llegan al detector sufren la acción del campo magnético del imán, y entonces pueden sufrir una fuerza de Lorentz si la velocidad de la partícula y el campo magnético no son paralelos.

ACTIVIDADES

1. La molécula de agua está formada por dos átomos de hidrógeno y uno de oxígeno, tal y como se representa. Teniendo en cuenta que el radio del átomo de O es 0,66 Å y el radio del átomo de H es 0,31 Å, calcula:



a) La fuerza gravitatoria entre un átomo de O y un átomo de H.

b) La fuerza electrostática (indica su sentido) entre el núcleo de un átomo de H y el de un átomo de O.

c) La fuerza gravitatoria entre los electrones de un enlace y el núcleo del átomo de O.

d) La fuerza electrostática entre los electrones de un enlace y el núcleo del átomo de O.

Dato: 1 Å = 10^{-10} m. Ver otros datos en estas páginas.

a) La fuerza gravitatoria se calcula a partir de la masa de las partículas y de la distancia que las separa. El átomo de hidrógeno está formado por un protón y un electrón, y el átomo de oxígeno, por ocho protones, ocho neutrones y ocho electrones. Aproximando la masa del neutrón a la del protón obtenemos:

$$F = G\cdot\frac{m_1\cdot m_2}{d^2} = 6{,}67\cdot10^{-11}\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{kg}^2}\cdot\frac{\left(1{,}673\cdot10^{-27}+9{,}110\cdot10^{-31}\right)\text{kg}\cdot\left(16\cdot1{,}673\cdot10^{-27}+8\cdot9{,}110\cdot10^{-31}\right)\text{kg}}{\left(0{,}66\cdot10^{-10}\ \text{m}+0{,}31\cdot10^{-10}\ \text{m}\right)^2} =$$

$$= 3{,}18\cdot10^{-43}\ \text{N}$$

b) La fuerza existente entre ambas partículas es de repulsión, pues tanto el núcleo de H como el de O tienen carga neta positiva. La dirección es la de la recta que contiene a ambos núcleos y el sentido, en cada núcleo, el que apunta en sentido opuesto al otro núcleo. Teniendo en cuenta que la carga del núcleo de H será igual a la carga del protón que lo constituye, y la carga del núcleo de O, a la de los ocho protones que contiene se obtiene:

$$F = K\cdot\frac{q_{\text{H}}\cdot q_{\text{O}}}{d^2} = 9\cdot10^9\ \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{C}^2}\cdot\frac{1{,}6\cdot10^{-19}\ \text{C}\cdot8\cdot1{,}6\cdot10^{-19}\ \text{C}}{\left[\left(0{,}66+0{,}31\right)\cdot10^{-10}\ \text{m}\right]^2} = 1{,}96\cdot10^{-7}\ \text{N}$$

c) En este caso la distancia entre ambas masas será igual al radio del átomo de O, m_1 será la masa de uno de los electrones que forman el enlace y m_2 será la masa del núcleo del átomo de O, es decir, la masa de 8 protones y 8 neutrones.

Aproximando, igual que antes, la masa del neutrón a la del protón obtenemos:

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{d^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2} \cdot \frac{9{,}110 \cdot 10^{-31}\text{kg} \cdot 16 \cdot 1{,}673 \cdot 10^{-27}\text{kg}}{\left(0{,}66 \cdot 10^{-10}\ \text{m}\right)^2} = 3{,}73 \cdot 10^{-46}\ \text{N}$$

d) La fuerza existente entre ambas partículas es de atracción, pues el electrón del enlace tiene carga negativa y el núcleo de O tiene carga positiva. Teniendo en cuenta que la carga del núcleo del átomo de oxígeno es ocho veces la carga del protón porque está formado por ocho protones:

$$F = K \cdot \frac{q_\text{H} \cdot q_\text{O}}{d^2} = 9 \cdot 10^9\ \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2} \cdot \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \cdot 8 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{C}}{\left(0{,}66 \cdot 10^{-10}\ \text{m}\right)^2} = 4{,}23 \cdot 10^{-7}\ \text{N}$$

2. El núcleo de radón-220 se desintegra emitiendo un núcleo de helio-4 a 1,75 · 10^7 m/s y deja un átomo de polonio-216. Si el radón estaba inicialmente en reposo, ¿qué velocidad tendrá el átomo de polonio? (Se supone que no hay otros intercambios de energía).

Datos: $M\left({}^4_2\text{He}\right) = 4{,}003\ \text{u}$; $M\left({}^{216}_{84}\text{Po}\right) = 216{,}051\ \text{u}$.

En el proceso se debe conservar el momento lineal. Si el núcleo inicial se desintegra en dos, cada uno saldrá en un sentido, ambos con la misma dirección. El momento lineal total debe ser nulo:

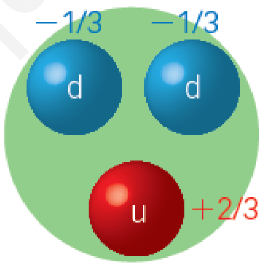
$$\vec{p} = 0 \rightarrow \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0 \rightarrow \vec{p}_1 = -\vec{p}_2 \rightarrow p_2 = p_1 \rightarrow m_\text{Po} \cdot v_\text{Po} = m_\text{He} \cdot v_\text{He} \rightarrow$$

$$\rightarrow v_\text{Po} = \frac{m_\text{He} \cdot v_\text{He}}{m_\text{Po}} = \frac{4{,}003\ \cancel{\text{u}}}{216{,}051\ \cancel{\text{u}}} \cdot 1{,}75 \cdot 10^7\ \text{m/s} = 3{,}24 \cdot 10^5\ \text{m/s}$$

Se mueve en dirección opuesta al núcleo de helio.

3. Dibuja los quarks que forman un neutrón. Obtén la carga eléctrica del neutrón a partir de las características de sus quarks. Analiza cómo puede ser el espín y la carga de color de cada quark que forma el neutrón.

El neutrón está formado por dos quarks d y un quark u. En el dibujo el color de los quarks únicamente hacer referencia a su carga eléctrica. No se ha tenido en cuenta la carga de color.



La carga del neutrón se calcula a partir de las cargas de los quarks que lo constituyen:

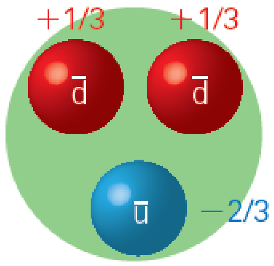
$$q_\text{n} = 2 \cdot q(\text{d}) + q(\text{u}) = 2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{2}{3} = 0$$

El espín del neutrón debe ser semientero, pues cada uno de los quarks tiene espín semientero.

La carga de color de cada quark que forma el neutrón debe ser tal que la partícula sea globalmente «incolora». Es decir, habrá un quark «rojo», otro «verde» y otro «azul».

4. Dibuja los quarks que forman un antineutrón. Obtén la carga eléctrica del antineutrón a partir de las características de sus quarks. Analiza cómo puede ser el espín y la carga de color de cada quark del antineutrón.

El antineutrón está formado por dos antiquarks $\overline{\mathrm{d}}$ y un antiquark $\overline{\mathrm{u}}$. En el dibujo el color de los quarks únicamente hace referencia a su carga eléctrica. No se ha tenido en cuenta la carga de color por el momento.



La carga del antineutrón se calcula a partir de las cargas de los antiquarks que lo constituyen:

$$q_{\bar{n}} = 2\cdot q(\overline{\mathrm{d}}) + q(\overline{\mathrm{u}}) = 2\cdot\left(+\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{2}{3}\right) = 0$$

El espín del antineutrón debe ser semientero, pues cada uno de los antiquarks tiene espín semientero.

La carga de color de cada quark que forma el antineutrón debe ser tal que la partícula sea globalmente «incolora». Es decir, habrá un quark «antirrojo», otro «antiverde» y otro «antiazul».

5. Teniendo en cuenta las distancias que se expresan más abajo, razona cuáles son las interacciones más importantes que tienen lugar:

a) Entre dos moléculas de agua.

b) Dentro de una molécula de agua.

c) Dentro del átomo de O.

d) Dentro del núcleo del átomo de O.

Datos: distancia entre los centros de dos moléculas de agua: $3 \cdot 10^{-10}$ m; diámetros: molécula de agua → $1{,}5 \cdot 10^{-10}$ m; átomo de O → 10^{-10} m; núcleo → 10^{-15} m; protón → 10^{-17} m.

a) Entre dos moléculas de agua las interacciones más importantes son las eléctricas, puesto que a esa distancia las fuerzas nucleares tienen una intensidad muy, muy reducida.

La fuerza gravitatoria también es muy pequeña.

Pero como el núcleo de oxígeno tira más fuerte del par de electrones del enlace que el núcleo de hidrógeno, la molécula de agua es polar. Existe una cierta carga negativa desplazada hacia el núcleo de oxígeno y una cierta carga positiva desplazada hacia el núcleo de hidrógeno. Por tanto, se producen fuerzas de naturaleza eléctrica entre el átomo de oxígeno de una molécula y el átomo de hidrógeno de una molécula vecina.

b) Dentro de una molécula de agua predominan las fuerzas eléctricas que ligan los electrones del enlace con los átomos que forman la molécula.

c) Dentro del átomo de O predominan las fuerzas eléctricas existentes entre los electrones, con carga negativa, y el núcleo del átomo, con carga positiva.

d) Dentro del núcleo del átomo de O predominan las fuerzas nucleares. Los protones se repelen entre sí, pero entre los neutrones y protones del núcleo existe una fuerza nuclear, la fuerza nuclear fuerte, que mantiene unido al núcleo.

6. Analiza cuáles de las siguientes partículas son fermiones y cuáles son bosones:

a) Muon.
b) Neutrón.
c) Z.
d) Sigma.
e) Quark arriba (u).
f) Pion.
g) Neutrino.
h) Gluon.
i) Fotón.
j) Quark fondo (b).

Fermiones: muon, neutrón, sigma, quark arriba, neutrino, quark fondo.
Bosones: Z, pion, gluon, fotón.

7. Razona cuál es el tipo de partícula de intercambio que aparece o es responsable de los siguientes fenómenos:

a) Estabilidad del núcleo.
b) Efecto fotoeléctrico.
c) Estabilidad del protón.
d) Emisión de radiación beta por un núcleo atómico.

a) Pion.
b) Antineutrino
c) Gluon.
d) Antineutrino.

8. El esquema del margen muestra todas las partículas elementales del modelo estándar y la relación entre ellas. Observa el gráfico y responde:

a) ¿Por qué no hay ninguna línea que enlace el bosón de Higgs con los fotones y los gluones?
b) ¿Por qué hay un bucle en torno al bosón de Higgs? ¿Qué significa?
c) ¿Por qué hay un bucle en torno a los gluones? ¿Qué significa?
d) ¿Por qué no hay ningún bucle en torno a los leptones ni en torno a los quarks?
e) ¿Por qué no hay ningún enlace entre los gluones y los leptones?

a) Porque los fotones y los gluones no tienen masa, y el bosón de Higgs interacciona con las partículas que tienen masa.
b) Porque el bosón de Higgs sí tiene masa. El bucle significa que interacciona consigo mismo.
c) Porque los gluones son los portadores de la fuerza fuerte y a su vez se ven afectados por ella.
d) Porque ni los leptones ni los quarks transmiten ninguna interacción.
e) Porque a los leptones no les afecta la fuerza fuerte, la que transmiten los gluones.

9. Comprueba que en la desintegración beta del neutrón se conserva:

a) La carga eléctrica.
b) El número leptónico.
c) El número bariónico.

a) En la desintegración beta del neutrón:

$$n \rightarrow p + e + \bar{\nu}_e$$

El balance de carga eléctrica es:

$$0 \rightarrow 1 + (-1) + 0 = 0$$

Es decir, se conserva la carga eléctrica en el proceso.

b) El balance de número leptónico es:

$$0 \rightarrow 0+1+(-1)=0$$

Es decir, se conserva el número leptónico.

c) El balance de número bariónico es:

$$1 \rightarrow 1+0+0=1$$

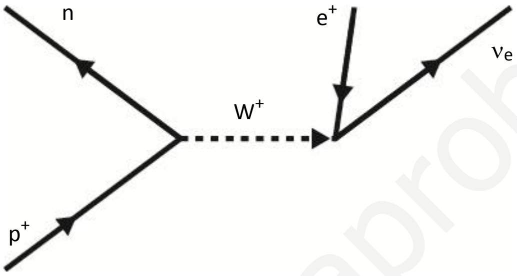
Es decir, se conserva el número bariónico.

10. Escribe el diagrama de Feynman correspondiente a los siguientes procesos:

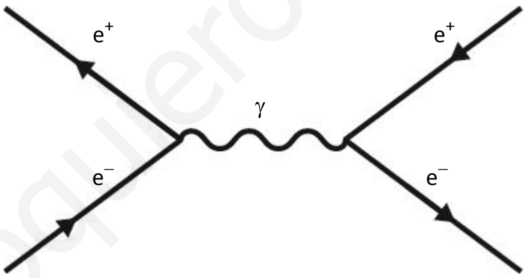
a) Un protón decae dando un positrón y un neutrino electrónico.

b) Un electrón y un positrón intercambian un fotón dando un electrón y un positrón en otro estado energético.

a) El diagrama correspondiente es:

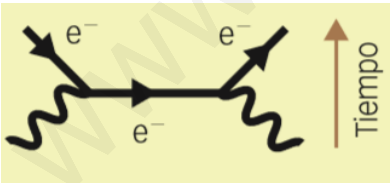


b) El diagrama correspondiente es:

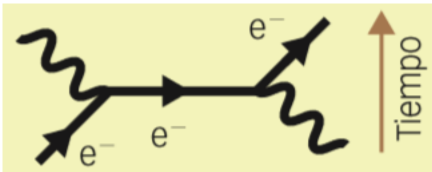


11. Describe la interacción que se representa en los siguientes diagramas de Feynman:

a)



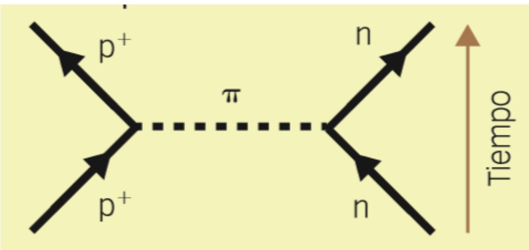
b)



a) Dos fotones interaccionan y dan lugar a un electrón y un positrón.

b) Un electrón interacciona con un fotón y tras el proceso aparecen de nuevo el fotón y el electrón.

12. Observa la interacción que se describe en el siguiente esquema:



a) Identifica el tipo de interacción fundamental.

b) Comprueba que se conservan la carga eléctrica y los números leptónico y bariónico.

a) Se trata de la interacción nuclear fuerte. Un protón interacciona con un neutrón, intercambian un pion y tras el proceso aparecen de nuevo un protón y un neutrón.

b) La carga eléctrica se conserva, puesto que el pion tiene carga positiva. La carga neta es cero antes y después del proceso.

El número leptónico se conserva porque tenemos las mismas partículas al principio que al final.

$$0+0=0+0$$

Lo mismo ocurre con el número bariónico.

$$1+1=1+1$$

13. Razona qué ventajas e inconvenientes puede tener un acelerador lineal frente a uno circular.

En un acelerador lineal es más sencillo acelerar a las partículas: resulta más sencillo la disposición de los imanes y otros elementos necesarios para acelerar las partículas. Además, en un acelerador lineal las partículas cargadas no emiten radiación debido al giro, tal y como ocurre en los aceleradores circulares. Por el contrario, se necesita una instalación kilométrica para conseguir partículas con energías muy intensas, como las que se estudian en la actualidad para poder formar algunos quarks, por ejemplo.

En un acelerador circular pueden conseguirse energías muy altas sin aumentar más y más las dimensiones de la instalación, aunque se necesitan imanes muy potentes para conseguir energías cada vez más altas en los giros de las partículas que luego colisionan.

14. Busca información que te permita construir una línea de tiempo en la que figure la energía alcanzada en cada colisionador y las partículas detectadas en él.

Respuesta personal. Sugerir a los alumnos y alumnas la búsqueda de información en fuentes oficiales, como las páginas web del CERN o del Fermilab.

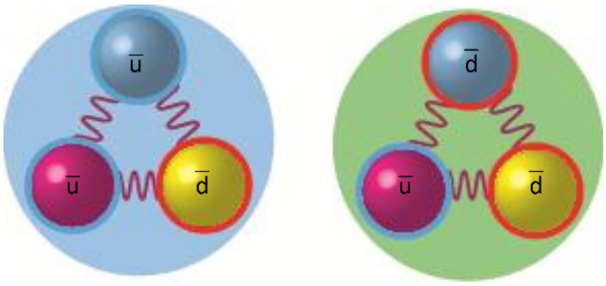
Colisionador	Año	Energía alcanzada (GeV)
PS (CERN)	1959	28
SLAC	1961	22
Fermilab	1972	500
DESY	1974	7
SPS (CERN)	1976	5600
Tevatrón (Fermilab)	1982	1000
LHC (CERN)	2008	13 000

15. Elabora un dibujo similar a la figura A para representar un antiprotón y otro para representar un antineutrón.

a) ¿Cuál es la masa de un antiprotón? ¿Y su carga?

b) ¿Cuál es la masa de un antineutrón? ¿Y su carga? ¿En qué se diferencia un antineutrón de un neutrón?

Respuesta:



Un antiprotón está formado por dos antiquarks u y un antiquark d. Un antineutrón está formado por dos antiquarks d y un antiquark u. Los antiquarks con borde azul tienen carga negativa (–2/3 en este caso), y los que tienen borde rojo, carga positiva (+1/3 en este caso).

a) La masa de un antiprotón es la misma que la masa de un protón. Su carga eléctrica es opuesta. Es decir, tiene una carga de $-2/3 - 2/3 + 1/3 = -1$. O sea, $-1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C.

b) La masa de un antineutrón es la misma que la masa de un neutrón. Su carga eléctrica es nula, como la del neutrón. Un antineutrón es distinto de un neutrón. El antineutrón está formado por dos antiquarks $\bar{d}$ y un antiquark $\bar{u}$.

16. Según el texto, ¿la masa de un protón coincide con la suma de las masas de los quarks que lo constituyen? ¿Cómo se explica este hecho?

No, la masa de un protón es mucho mayor que la masa de los tres quarks que lo constituyen. Esto se explica suponiendo que en el protón, además de los dos quarks u y el quark d, existe un mar de quarks y antiquarks, y de gluones, todos ellos moviéndose con velocidades relativistas, es decir, con mucha energía. Además, existe energía en el protón debido a los enlaces que se producen entre las partículas debido a la interacción nuclear fuerte. Todo esto provoca que la masa del protón sea mucho mayor que la masa de los quarks de valencia; esto es, los quarks que no tienen su antipartícula asociada en el mar de quarks.

17. ¿Qué es el «mar de quarks» al que se hace referencia en el documento?

Es un conjunto formado por parejas quarks-antiquarks moviéndose con velocidades relativistas y que permanecen confinados en el interior de los protones y de los neutrones, determinando que la masa de estos sea mucho mayor que la masa de los quarks de valencia que forman estas partículas: uud para el protón y udd para el neutrón.

18. Coloca en orden creciente de masa estas partículas:

- **Átomo de O.**
- **Protón.**
- **Electrón.**
- **Quark arriba.**
- **Pion.**
- **Neutrino.**
- **Molécula de agua.**
- **Bosón de Higgs.**

La que tiene menor masa es el neutrino. El orden adecuado sería:

neutrino < electrón < pion < quark arriba < protón < átomo de oxígeno < molécula de agua < bosón de Higgs

19. Indica cuáles de las siguientes partículas son elementales y cuáles tienen una estructura interna:

- **Positrón.**
- **Neutrón.**
- **Neutrino.**
- **Barión.**
- **Quark arriba.**
- **Pion.**
- **Partícula tau.**
- **Partícula sigma.**

Son elementales: positrón, neutrino, quark arriba, partícula tau.

Tienen estructura interna: neutrón (udd), pion (quark-antiquark: $u\bar{u}$, $d\bar{d}$, $u\bar{d}$), partícula sigma (uus, uds, dds).

20. Busca información en el texto para completar en tu cuaderno la tabla siguiente. Teniendo en cuenta la composición de cada partícula, justifica su carga eléctrica. Identifica cada una de ellas como mesón o barión.

Respuesta:

Símbolo	n	Υ	Ω^-	φ	Λ^0	Ξ^-
Nombre	Neutrón	Upsilon	Omega	Phi	Lambda	Xi
Composición	udd	$b\bar{b}$	sss	$s\bar{s}$	uds	dss
Carga	0	0	–1	0	0	–1
Tipo de hadrón	Barión	Mesón	Barión	Mesón	Barión	Barión

21. Explica qué tipo de interacción fundamental es responsable de los siguientes fenómenos:

a) Disolución de sal común en agua.

b) Formación de auroras boreales.

c) Transformación de un neutrón en un protón.

d) Mareas altas y bajas.

e) Estabilidad de un átomo.

f) Estabilidad de un núcleo atómico.

g) Estabilidad de un protón.

a) Interacción electromagnética.

b) Interacción electromagnética.

c) Interacción nuclear débil.

d) Interacción gravitatoria.

e) Interacción electromagnética.

f) Interacción nuclear fuerte residual.

g) Interacción nuclear fuerte fundamental.

22. El estudio de las distintas interacciones evolucionó hacia lo que se conoce como teorías de unificación. Explica en qué consisten y en qué condiciones se pueden dar las siguientes:

a) Unificación electromagnética.

b) Unificación electrodébil.

c) Teoría de la gran unificación.

d) Teoría del todo.

a) La unificación electromagnética puso de manifiesto que las fuerzas eléctricas y magnéticas están relacionadas y pueden unificarse en una sola fuerza: la electromagnética.

b) La unificación electrodébil relaciona la fuerza nuclear débil y la fuerza electromagnética. Esta unificación tiene lugar a energías muy altas, lo que equivale a una época en la que el universo tenía una edad temprana.

c) Unifica la teoría electrodébil y la fuerza nuclear fuerte. Tiene lugar a energías aún más altas que en el caso anterior; es decir, esta unificación tuvo lugar en una época muy temprana de la historia del universo.

d) La teoría del todo relaciona la fuerza gravitatoria con todas las demás. Pero aún no hay indicios de esta unificación. No existe una teoría que unifique las teorías de gran unificación con la interacción gravitatoria.

23. Razona en qué casos es cierta o es falsa la siguiente afirmación:

«La intensidad de una interacción aumenta cuanto más próximas están las partículas que la sufren».

Es adecuada para describir algunas interacciones, como la gravitatoria o la eléctrica, pero es cierta para las demás. Por ejemplo, en los quarks existe una fuerza llamada nuclear fuerte que es más intensa a medida que intentamos separar los quarks; por eso no se observan quarks aislados, sino que siempre aparecen formando parte de otras partículas formadas por dos o tres partículas, como los mesones o los nucleones.

24. Explica por qué el protón tiene una carga eléctrica de +1 y el neutrón tiene carga eléctrica 0 si ambos están formados por tres quarks.

Porque no están formados por los mismos quarks. El quark u tiene carga +2/3, mientras que el quark d tiene una carga de –1/3, en unidades de la carga del electrón. Como un protón tiene una constitución uud, tendrá $+2/3 + 2/3 - 1/3 = 0$. Y el neutrón tendrá una carga igual a $-1/3 - 1/3 + 2/3 = 0$.

25. **Relaciona en tu cuaderno las siguientes interacciones con la partícula mediadora correspondiente:**

a) Colisión entre un electrón y un positrón → Fotón

b) Conversión de un protón en un neutrón → Mesón

c) Unión entre dos protones en un núcleo → Mesón

d) Unión entre las partículas que forman un mesón → Gluon

e) Interacción entre un neutrón y un neutrino → Z^0

f) Colisión entre un protón y un antiprotón → Fotón

26. **El muon es un leptón con carga –1 que sufre un decaimiento, convirtiéndose en un neutrino muon.**

a) Utiliza las leyes de conservación de carga eléctrica, número leptónico y bariónico para determinar todas las partículas que intervienen en el proceso.

b) ¿Cuál puede ser la partícula mediadora de la interacción?

a) Aplicamos la conservación de la carga eléctrica:

$$\mu \to X + \nu_\mu$$

A la izquierda la carga es –1. A la derecha es 0. Por tanto, debe formarse una partícula con carga negativa –1.

El número leptónico asociado al muon a la izquierda es 1 y a la derecha es 1, por lo que la partícula X no debe estar asociada al muon.

El número bariónico es 0 a ambos lados. Ya está conservado, por lo que la partícula formada no es un barión.

La partícula X es un electrón.

Y para que se conserve el número leptónico asociado al electrón, también debe formarse un antineutrino del electrón, que tiene número leptónico asociado al electrón –1. La ecuación, queda, pues:

$$\mu \to e + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$$

b) La partícula mediadora de la interacción debe ser un bosón portador de la interacción débil, puesto que hay neutrinos involucrados en el proceso. Es el W^-, pues el muon da lugar a una partícula con carga negativa: el electrón, y dos neutrinos.

27. **En 1923 el físico Arthur Compton demostró que, cuando una radiación electromagnética choca con un electrón libre, la radiación pierde parte de su energía y el electrón la gana.**

a) Analiza las partículas que interaccionan y las partículas que tendremos finalmente.

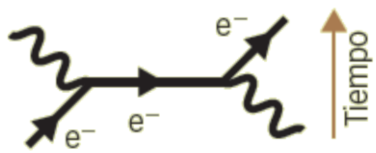
b) Analiza el tipo de interacción.

c) Elabora el diagrama de Feynman que la representa.

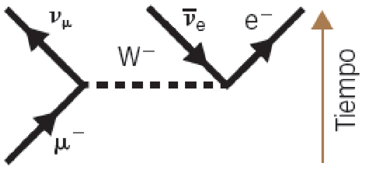
a) En este proceso interviene el fotón que forma la radiación electromagnética y el electrón.

b) Se trata de una interacción electromagnética.

c) El diagrama de Feynman correspondiente a este proceso es el siguiente:



28. Describe la interacción que se representa en el siguiente diagrama de Feynman e identifica el tipo de interacción. Comprueba que se conserva la carga eléctrica y los números leptónico y bariónico.



Este proceso representa la conversión de un muon en un electrón. Se trata de una interacción débil puesto que aparece la partícula W^- como mediadora. El muon se convierte en una partícula W^- y un neutrino muónico. A continuación la partícula W^- produce un electrón y un antineutrino electrónico.

Conservación de la carga eléctrica:

$$q_\mu = -1$$
$$q_{\nu_\mu} + q_{\bar{\nu}_e} + q_{e^-} = 0 + 0 - 1 = -1$$

Por tanto, se conserva la carga eléctrica.

Conservación del número leptónico asociado al muon:

$$L_\mu = +1$$
$$L_{\nu_\mu} + L_{\bar{\nu}_e} + L_{e^-} = 1 + 0 + 0 = +1$$

Por tanto, se conserva el número leptónico asociado al muon.

Conservación del número leptónico asociado al electrón:

$$L_\mu = 0$$
$$L_{\nu_\mu} + L_{\bar{\nu}_e} + L_{e^-} = 0 - 1 + 1 = 0$$

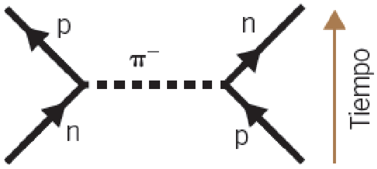
Por tanto, se conserva el número leptónico asociado al electrón.

Conservación del número bariónico:

$$B_\mu = 0$$
$$B_{\nu_\mu} + B_{\bar{\nu}_e} + B_{e^-} = 0 + 0 + 0 = 0$$

Por tanto, se conserva el número bariónico.

29. Observa la interacción que se describe en el siguiente esquema:



a) Identifica el tipo de interacción fundamental.

b) Explica con detalle la transformación que sufren los quarks de las diferentes partículas.

c) Comprueba que se conserva la carga eléctrica y los números leptónico y bariónico.

a) Se trata de la interacción fuerte residual, pues un neutrón se transforma en un protón y un protón se transforma en un neutrón en el proceso, al intercambiar un pion negativo.

b) Un neutrón está formado por la siguiente composición de quarks: udd. Un protón está formado por uud. Así, en este proceso un quark d del neutrón se transforma en un quark u y un quark u del protón se transforma en un quark d.

$$n \rightarrow p + \pi^-$$
$$p + \pi^- \rightarrow n$$

c) Conservación de la carga eléctrica:

$$n \rightarrow p + \pi^-$$
$$0 = +1 - 1 \rightarrow 0 = 0$$
$$p + \pi^- \rightarrow n$$
$$+1 - 1 = 0 \rightarrow 0 = 0$$

Se conserva la carga eléctrica.

Conservación del número leptónico. Todas las partículas que intervienen tienen $L = 0$. Por tanto, se conserva el número leptónico.

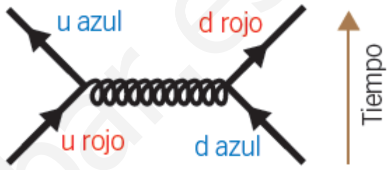
Conservación del número bariónico. Tanto el protón como el neutrón tienen número bariónico igual a 1. El pion está formado por un quark y un antiquark. Por tanto, como el número bariónico de un quark es 1/3 y el de un antiquark es –1/3, el número bariónico del pion es cero.

$$n \rightarrow p + \pi^-$$
$$+1 = +1 + 0 \rightarrow 1 = 1$$

$$p + \pi^- \rightarrow n$$
$$+1 + 0 = 1 \rightarrow 1 = 1$$

Se conserva el número bariónico.

30. El esquema siguiente muestra una interacción entre dos quarks. Analízala y responde:



a) ¿Cuáles son las características observadas de los quarks al inicio y al final de la interacción?

b) ¿Cómo es la partícula de intercambio?

c) ¿Qué tipo de interacción se manifiesta?

a) Al inicio hay un quark u rojo y un quark d azul. El quark u tiene carga +2/3, mientras que el quark d tiene carga –1/3. Ambos tienen número bariónico +1/3 y número leptónico = 0.

Al final de la interacción el quark u rojo ha cambiado de color y se ha transformado en un quark u azul. El quark d azul también cambia de color y se transforma en un quark d rojo.

b) La partícula de intercambio es un gluon rojo-antiazul. Se trata de una partícula sin carga eléctrica.

c) Se trata de una interacción fuerte fundamental, pues aparece el gluon como partícula mediadora.

31. Busca información que te permita conocer dónde y cuándo se detectaron las distintas partículas elementales.

a) Representa los datos en una línea de tiempo y analiza si el avance en los descubrimientos fue progresivo o más intenso en unas épocas o en otras. Discute las posibles razones de este hecho.

b) Organiza las partículas por el lugar geográfico en el que fueron descubiertas. Relaciónalo con la capacidad económica de los mismos.

c) Escribe un pequeño ensayo que relacione el avance científico con el avance económico.

Respuesta personal.

Partícula	Año de descubrimiento	Lugar
Electrón	1897	Gran Bretaña
Fotón	1915	Varios
Protón	1918	Gran Bretaña
Positrón	1932	EE. UU.
Neutrón	1932	Gran Bretaña
Muon	1937	EE. UU.
Pion	1947	Gran Bretaña
Lambda	1947	Observado en rayos cósmicos
Kaon	1947	Gran Bretaña
Delta	1951	EE. UU.
Xi	1952	Gran Bretaña
Antiprotón	1955	EE. UU.
Neutrino	1956	EE. UU.

Partícula	Año de descubrimiento	Lugar
Phi	1959	EE. UU.
Omega	1964	EE. UU.
Quark u	1967	EE. UU.
Quark d	1967	EE. UU.
Quark s	1974	EE. UU.
Quark c	1974	EE. UU.
J/Psi	1974	EE. UU.
Tau	1975	EE. UU.
Quark b	1977	EE. UU.
Upsilon	1977	EE. UU.
Gluon	1978	Alemania
Bosón $W^{+/-}$	1983	Suiza-Francia (CERN)
Bosón Z^0	1983	Suiza-Francia (CERN)
Quark t	1995	EE. UU.
Bosón de Higgs	2012	Suiza-Francia (CERN)

a) Al analizar la línea temporal se observa que los descubrimientos se concentran en determinadas épocas. Esto se debe a los avances teóricos y técnicos que permiten, por ejemplo, poner en marcha un nuevo acelerador o colisionador.

b) Las partículas fueron descubiertas allí donde existen los aceleradores capaces de proporcionar la mayor cantidad de energía a las partículas que colisionan. Y para montar un acelerador hace falta mucho dinero, puesto que las energías involucradas son muy altas y es necesario construir una máquina de dimensiones gigantescas, abarcando varios kilómetros en el caso de los aceleradores y colisionadores modernos.

c) Respuesta personal. En la ciencia actual, donde son necesarias complejas instalaciones y la coordinación de un equipo de muchos científicos se requieren grandes presupuestos, y esto solamente está al alcance de los países que más invierten en ciencia. El CERN, por ejemplo, es un consorcio en el que intervienen muchos países aportando entre todos el elevado presupuesto necesario para desarrollar instalaciones como el LHC. Es decir, sin desarrollo económico no es posible el descubrimiento experimental de las partículas fundamentales, al menos en la época actual. Una excepción la constituyen las partículas, como el positrón, que fueron descubiertas en los rayos cósmicos, pues el universo es un enorme acelerador y es capaz de proporcionarnos partículas de elevada energía.

32. Elige alguno de los grandes laboratorios de partículas que existen en el mundo y realiza una presentación multimedia en la que expliques:

a) Lugar donde está ubicado, fecha de creación y sucesivas mejoras.

b) Características físicas.

c) Esquema de la instalación.

d) Detalle de las partes más significativas.

e) Tipo de partículas que se estudian.

f) Descubrimientos más importantes.

Respuesta personal.

FÍSICA EN TU VIDA

1. ¿Por qué se adjunta el adjetivo magnético al nombre de esta técnica?

Porque se emplea un campo magnético muy intenso para poder obtener las imágenes.

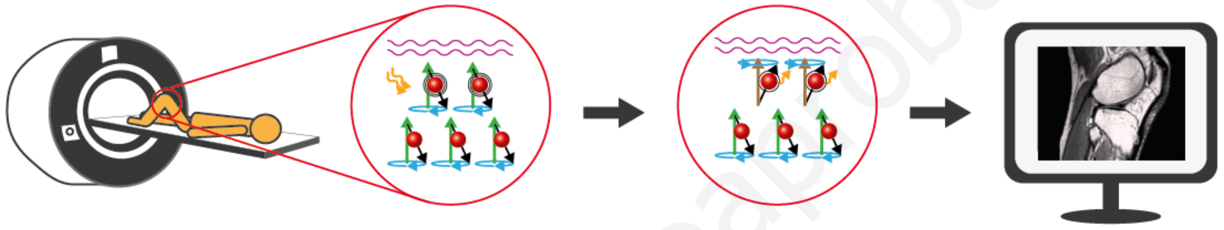
2. ¿Por qué crees que el paciente debe permanecer quieto mientras dura la exploración en una RMN? ¿Qué ocurriría si el paciente se moviese?

Para obtener una imagen lo más nítida posible.

Si el paciente se mueve, las zonas del cuerpo estudiadas se desplazan y entonces no se puede interpretar correctamente de dónde proceden los fotones detectados necesarios para formar la imagen.

3. Explica con un dibujo cómo se formaría la imagen de los ligamentos de la rodilla de un paciente.

Los átomos presentes en la rodilla del paciente reciben energía procedente del elevado campo magnético y se excitan, de modo que los fotones emitidos al caer de nuevo a su estado fundamental forman la imagen.



4. La RMN y otras técnicas médicas resultan caras. En ocasiones, los médicos prefieren pedir pruebas menos costosas, aun sabiendo que el diagnóstico no será tan fiable. ¿Qué te parece esta medida?

Respuesta personal. Es evidente que no se puede prescribir una resonancia magnética ante la menor dolencia. Por eso se emplean como primeros recursos las radiografías, realizadas con una técnica mucho menos costosa.

PROYECTO SABER HACER

12

Historia del universo

SANTILLANA

Historia del universo

12

PARA COMENZAR

- **Explica el significado de la frase: «Mirar más lejos es mirar hacia el pasado». ¿Cómo utilizamos este hecho para conocer la historia del universo?**

  La velocidad de la luz es muy grande, pero finita. Esto quiere decir que la luz que recibimos de un astro tarda más tiempo cuanto más lejos de nosotros esté dicho astro. Por eso, si miramos objetos muy lejanos, los vemos tal y como eran cuando la luz salió de allí, es decir, en el pasado.

  Este hecho permite conocer la historia del universo, puesto que al observar objetos situados a diferentes distancias los vemos en momentos diferentes de la historia del universo.

- **¿Qué edad tenía el universo cuando emitió la galaxia MACS0647-JD la luz que vemos en la imagen?**

  Si la edad es el 3,6 % de su edad actual, 13 800 millones de años:

$$\frac{3{,}6}{100}\cdot 13\,800 \text{ millones de años} \simeq 500 \text{ años}$$

ACTIVIDADES

1. **Júpiter se encuentra a una distancia del Sol de 5,2 ua. Calcula esta distancia en años luz y en pársecs.**

Aplicamos el factor de conversión correspondiente para expresarlo en años luz:

$$5{,}2\ \cancel{\text{ua}}\cdot\frac{1 \text{ año luz}}{9{,}46\cdot 10^{15}\ \cancel{\text{m}}}\cdot\frac{1{,}5\cdot 10^{11}\ \cancel{\text{m}}}{1\ \cancel{\text{ua}}}=8{,}25\cdot 10^{-5} \text{ años luz}$$

Y en pársecs:

$$5{,}2\ \cancel{\text{ua}}\cdot\frac{1 \text{ pc}}{206\,265\ \cancel{\text{ua}}}=2{,}52\cdot 10^{-5} \text{ pc}$$

2. **La distancia del Sol al centro de la Vía Láctea es 8500 pc. Calcula esta distancia en años luz y en unidades astronómicas.**

De nuevo aplicamos los factores de conversión correspondientes.

$$8500\ \cancel{\text{pc}}\cdot\frac{3{,}2616 \text{ años luz}}{1\ \cancel{\text{pc}}}=2{,}77\cdot 10^{4} \text{ años luz}$$

$$8500\ \cancel{\text{pc}}\cdot\frac{206\,265 \text{ ua}}{1\ \cancel{\text{pc}}}=1{,}75\cdot 10^{9} \text{ ua}$$

3. **Utilizando la información que se muestra en este epígrafe, explica cómo se puede deducir la distancia a la que se encuentra una estrella cefeida cuyo periodo es de cuatro días.**

El periodo de la cefeida está relacionado con la magnitud absoluta, *M*, o luminosidad de la cefeida. Es decir, si medimos el periodo podemos conocer cuánta luz emite la cefeida. Por otra parte, observando la estrella desde Tierra podemos conocer su brillo, es decir, su magnitud aparente, *m*, o cuánta energía nos llega. Y comparando la energía que emite (luminosidad) con la energía que recibimos (brillo), deducimos la distancia.

4. Completa un esquema numerado con los pasos que hay que seguir para deducir la distancia a una nebulosa. ¿Podríamos elegir cualquiera de sus estrellas para el estudio?

Para deducir la distancia a una nebulosa:

1. Identificamos un objeto, o mejor varios, de luminosidad conocida.
2. Medimos el brillo o magnitud aparente de dicho objeto.
3. Comparamos la magnitud absoluta con la magnitud aparente y deducimos la luminosidad.

No se puede elegir cualquier estrella para realizar el estudio porque no conocemos la luminosidad de todas las estrellas. En el caso de las cefeidas se aprovecha el hecho de que el periodo de variación en el brillo de la estrella está relacionado con la luminosidad o magnitud absoluta de la estrella.

5. Razona cuál crees que es la mayor utilidad de la ley de Hubble en astronomía.

La ley de Hubble permite conocer la distancia a objetos lejanos en el universo midiendo el desplazamiento de las líneas espectrales.

6. Razona por qué los primeros elementos químicos que se crearon fueron el H y el He y estaban en una proporción 3:1.

El H y el He son los elementos que tienen menos protones en su núcleo. Y al comienzo del universo no existían núcleos, sino distintas partículas moviéndose con altas energías. En un núcleo de H hay una sola partícula: un protón. En un núcleo de He hay cuatro partículas: dos protones y dos neutrones. Por eso se formaron más núcleos de H que de He.

7. Explica cómo se formó la radiación cósmica de fondo.

A medida que el universo se fue enfriando, los núcleos atómicos fueron capaces de retener a los electrones girando alrededor de ellos. En ese momento la luz pudo atravesar una cantidad apreciable de espacio, pues hasta entonces los fotones eran continuamente dispersados por los electrones libres no ligados a los átomos. Esto sucedió unos 400 000 años después del nacimiento del universo.

Estos fotones son los que constituyen la radiación cósmica de fondo.

8. ¿Cómo se explica la aparición de las primeras estrellas y galaxias?

Las primeras estrellas y galaxias se formaron gracias a la acumulación de materia debido a la atracción gravitatoria. Las primitivas inhomogeneidades de densidad en el universo hicieron que la masa se agrupase en torno a ciertas acumulaciones de materia que se fueron haciendo cada vez más grandes debido a la atracción gravitatoria.

9. ¿Qué queremos decir al señalar que la evolución de una estrella depende de su masa?

Pues que el tiempo de la vida de la estrella y las diferentes fases por las que pasa dependen de la masa de la estrella. Las estrellas más masivas queman su combustible mucho más rápidamente, por lo que su vida es mucho más corta que la de las estrellas de menos masa.

Además, una estrella masiva puede acabar sus días formando una explosión de supernova, por ejemplo, algo que no puede lograr una estrella de poca masa como el Sol.

10. ¿Cómo se explica la abundancia de distintos elementos químicos si en los primeros minutos de vida del universo solamente se formaron hidrógeno, helio y un poco de litio?

Los elementos químicos más pesados que el litio se han formado en el interior de las estrellas en reacciones de fusión nuclear. Y los elementos más pesados que el hierro se han generado en las explosiones de supernova.

11. Explica qué hechos experimentales hicieron pensar a los astrónomos que en el universo había más materia de la que podemos detectar con nuestros telescopios.

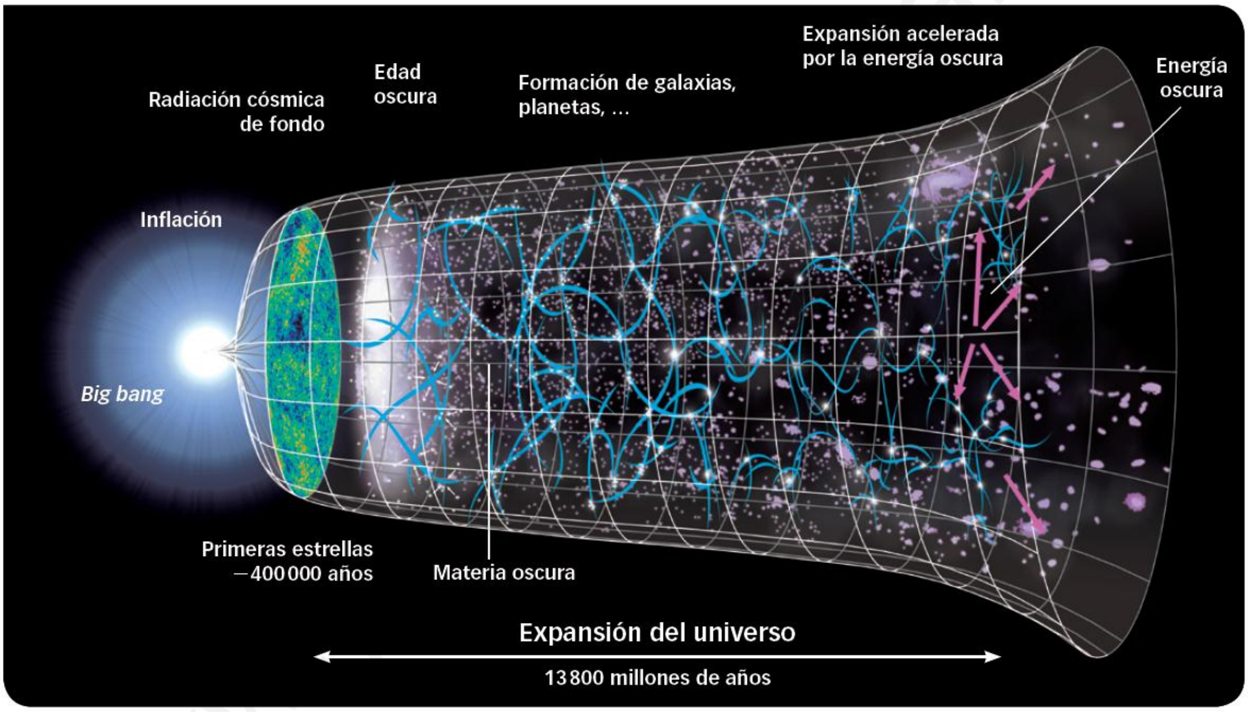
En primer lugar se observó en los cúmulos de galaxias que las galaxias se movían a una velocidad tan grande que el cúmulo debería haberse disgregado.

A continuación la observación de la velocidad de rotación de diferentes estrellas alrededor del centro de su galaxia permitió saber que esta velocidad se mantenía constante a medida que nos alejamos del centro galáctico, algo que no debe ocurrir si la masa de la galaxia es la que se infiere de las observaciones, que muestran una acumulación de materia en el núcleo galáctico.

Como las estrellas de la periferia se mueven más o menos a la misma velocidad alrededor del centro galáctico que las estrellas más internas, esto quiere decir que hay materia en la periferia que no vemos, pero que ejerce una fuerza gravitatoria sobre las estrellas haciendo que aumente su velocidad alrededor del centro galáctico.

12. ¿Qué quiere decir que la expansión del universo se está acelerando? Explícalo con un esquema.

Quiere decir que la velocidad de las galaxias más lejanas es cada vez mayor. Si medimos la velocidad de recesión de las galaxias en la actualidad, es mayor que la que tenían en el pasado.



13. Explica con pocas palabras la relación existente entre la física de partículas y la cosmología.

La física de partículas estudia las características de partículas que se forman cuando chocan entre sí otras partículas con una energía muy elevada. Estas condiciones son precisamente las que reinaban cuando el universo tenía solo unos instantes de vida. Por eso, estudiar el comportamiento de la materia con estas altas energías nos proporciona información sobre las condiciones reinantes en el universo temprano.

14. Explica por qué debería existir la misma cantidad de materia que de antimateria en el universo según la teoría del *big bang*.

Cuando dos partículas chocan con una energía elevada, puede dar lugar a la aparición de varias partículas y antipartículas, pero el número de partículas y de antipartículas se conserva. Es decir, si chocan una partícula y su antipartícula, se pueden formar varias partículas, pero siempre se forman el mismo número de partículas y de antipartículas.

Por eso, en el universo temprano deberían haberse formado el mismo número de partículas y de antipartículas. Por ejemplo, un fotón puede dar lugar a un electrón y un positrón si tiene la energía suficiente.

15. **¿Por qué resulta tan difícil de estudiar la materia oscura?**

Porque es una materia invisible que no interacciona ni con la materia ordinaria ni con la radiación. Solamente se dejan sentir sus efectos gravitatorios, pero no se ha detectado qué partículas hipotéticas podrían constituir esa materia oscura.

16. **Resume la información del texto en unas pocas líneas.**

Respuesta personal. El satélite Planck lanzado por la Agencia Espacial Europea (ESA) ha descubierto que las primeras estrellas nacieron más tarde de lo que se pensaba hasta ahora. Lo ha hecho estudiando las propiedades de la radiación cósmica de fondo.

17. **Según el texto, ¿qué información puede extraerse del análisis de la radiación cósmica de fondo?**

Del análisis de la radiación cósmica de fondo puede deducirse cómo estaba agrupada la materia en el momento en que se formó esta radiación. Además, también puede conocerse información sobre la edad del universo, la temperatura del universo cuando se formó esta radiación o el ritmo al que se expande el universo.

18. **Explica qué es la luz polarizada.**

La luz polarizada es luz que tiene una dirección preferente para la dirección en que vibran los campos eléctricos y magnéticos que forman la luz. Cuando la luz está sin polarizar, estos campos eléctricos y magnéticos vibran por igual en todas las direcciones del espacio.

19. **¿Cómo ha llegado la luz que capta el telescopio Planck? ¿De dónde procede? ¿Qué significan los diferentes colores que muestra la imagen obtenida por la sonda Planck?**

El telescopio Planck capta luz emitida en el universo en el momento en que la luz comenzó a tener libertad para recorrer el universo. Anteriormente, la luz se veía dispersada continuamente por los electrones libres presentes en el universo, que no se habían unido a los núcleos atómicos. En el momento en que los electrones se unieron a los núcleos y se formaron los átomos, la luz tuvo libertad para atravesar el universo y esa es precisamente la luz que recibimos como radiación cósmica de fondo.

La luz procede de los fotones presentes en el universo cuando comenzaron a unirse electrones y núcleos, cuando el universo tenía unos 4000 000 años.

Los diferentes colores que muestra la imagen obtenida por Planck representan variaciones en la temperatura en diferentes regiones del universo primitivo. Estas variaciones de la temperatura están relacionadas con fluctuaciones en la densidad.

20. **¿Qué datos han permitido deducir que las primeras estrellas nacieron más tarde de lo que se creía hasta ahora?**

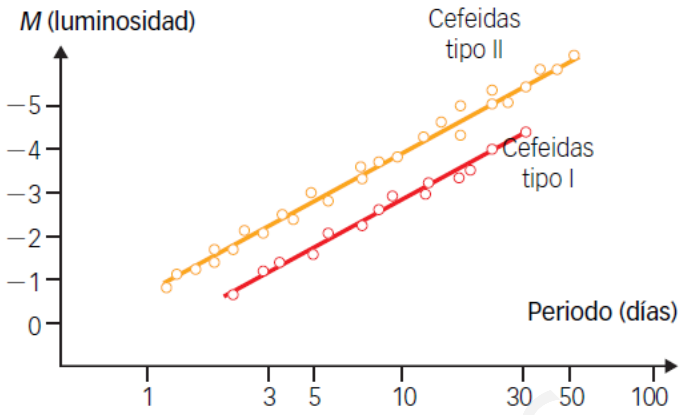
El estudio de la polarización de la radiación cósmica de fondo. La polarización de la radiación refleja cuáles eran las condiciones cuando comenzaron a formarse los átomos, es decir, cuando se pasó de una amalgama de protones, electrones y neutrinos a la formación de átomos y la posibilidad para los fotones que ahora constituyen la radiación de fondo de viajar por el universo sin verse continuamente dispersados por electrones libres.

21. Observa la gráfica.

a) ¿Qué cefeida emitirá más luz, una de tipo I con un periodo de 5 días o una con un periodo de 10 días?

b) ¿Qué cefeida emitirá más luz, una de tipo II con un periodo de 5 días o una de tipo I con un periodo de 10 días?

c) Si ambas se observan desde la Tierra con el mismo brillo, ¿cuál estará a mayor distancia?



a) Emitirá más luz una cefeida de tipo I con un periodo de 5 días, pues su magnitud absoluta es algo mayor, según se aprecia en la gráfica.

b) La de tipo I también, pues su magnitud absoluta es mayor.

c) Si ambas se observan con el mismo brillo, estará a mayor distancia aquella que tiene una mayor luminosidad, es decir, la cefeida de tipo I.

22. Imagina ahora que dos cefeidas de tipo I con periodos de 5 y 10 días respectivamente se han observado con el mismo brillo en diferentes galaxias. ¿En cuál de ellas cabría esperar un mayor desplazamiento hacia el rojo de las líneas espectrales? ¿Por qué?

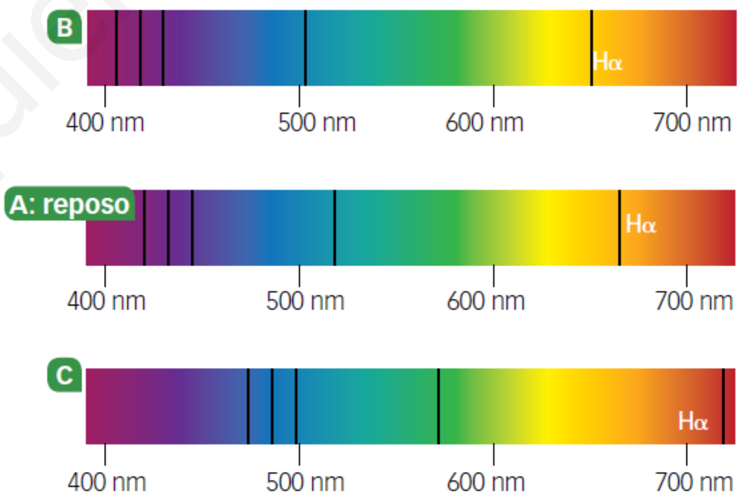
La cefeida que tiene un mayor periodo de variabilidad será también la que tiene una magnitud absoluta mayor, es decir, la más luminosa. Por tanto, si ambas tienen el mismo brillo, la cefeida más luminosa es la que se encuentra más lejos de la Tierra; es decir, es aquella en la que deberían aparecer líneas espectrales con mayor desplazamiento al rojo.

23. El espectro A corresponde al obtenido en un laboratorio en la Tierra. Los espectros B y C corresponden a estrellas situadas en diferentes galaxias.

a) ¿Cuál de las dos galaxias se está acercando a la Tierra?

b) ¿Cuál se está alejando de la Tierra?

c) ¿Cómo es posible que una galaxia se esté acercando a la Tierra si el universo se está expandiendo?



a) Se está acercando a la Tierra la galaxia B, pues se ve que las líneas del espectro están desplazadas hacia el azul con respecto al espectro obtenido en reposo.

b) Se está alejando a la Tierra la galaxia C, pues se ve que las líneas del espectro están desplazadas hacia el rojo con respecto al espectro obtenido en reposo.

c) Porque el fenómeno de expansión del universo es un fenómeno global, a gran escala, pero puede ocurrir que las velocidades peculiares de galaxias cercanas sean mayores que la velocidad de recesión correspondiente al fenómeno de la expansión del universo.

24. Una galaxia se encuentra a 10 millones de años luz de nuestro planeta.

a) Calcula a qué velocidad se aleja de nosotros.

b) Suponiendo que se moviese a esa velocidad, ¿qué distancia recorrería en 100 años?

Datos: $H_0 = 21{,}8$ (km/s)/millón de años luz; $c = 3 \cdot 10^8$ m/s.

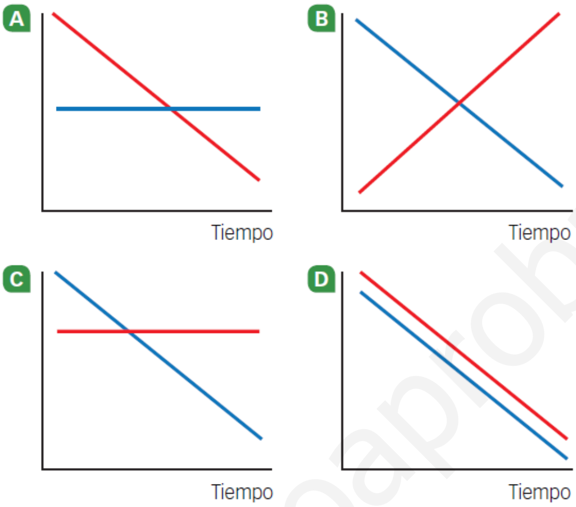
a) La velocidad a la que se aleja la galaxia puede calcularse a partir de la ley de Hubble:

$$v = H_0 \cdot d = 21{,}8\,(\text{km/s})/\text{millón de años luz} \cdot 10 \text{ millones de años luz} = 218\,\text{km/s}$$

b) La distancia recorrida en 100 años sería:

$$v = \frac{d}{t} \rightarrow d = v \cdot t = 218\,\frac{\text{km}}{1\,\cancel{\text{s}}} \cdot \frac{3600\,\cancel{\text{s}}}{1\,\cancel{\text{h}}} \cdot \frac{24\,\cancel{\text{h}}}{1\,\cancel{\text{día}}} \cdot \frac{365{,}25\,\cancel{\text{días}}}{1\text{ año}} \cdot 100 = 6{,}88 \cdot 10^{11}\ \text{km/año}$$

25. Señala cuál de las siguientes gráficas muestra una correcta variación de la temperatura y de la densidad del universo.



Tanto la temperatura como la densidad del universo eran mayores cuando el universo era más joven, y en ambos casos su valor va disminuyendo a lo largo de la historia del universo. Por tanto, la gráfica correcta es la d.

26. La radiación cósmica de fondo está formada por fotones ubicados en la región de microondas del espectro electromagnético. Cuando se formaron, ¿cómo era su longitud de onda, mayor o menor que ahora? Explica tu respuesta.

Cuando se formaron la longitud de onda de los fotones era mucho menor que ahora. A medida que el universo se ha expandido, también lo ha hecho la longitud de onda de los fotones que ahora constituyen la radiación cósmica de fondo. La expansión del universo causa que se «estiren» los fotones.

27. ¿Qué momento del universo podríamos llegar a observar analizando la luz que llega al telescopio más potente que se pueda construir? Explica tu respuesta relacionándola con la radiación cósmica de fondo.

Con el telescopio más potente podríamos llegar a observar el instante en que se formó la radiación cósmica de fondo, es decir, cuando el universo tenía unos 4000 000 años. Antes de esa época el universo no era transparente a los fotones presentes, por lo que no podemos observar fotones procedentes de una época más antigua.

28. ¿Tiene sentido hablar de antes del *big bang*? Explica tu respuesta.

El *big bang* es el nombre de la teoría que explica la evolución del universo, y también el término con el que se conoce al instante en que nació nuestro universo. En principio, podemos pensar que el universo nació en ese instante y no podemos hablar de instantes anteriores.

Sin embargo, existen teorías que se atreven a hablar de instantes anteriores al *big bang*. Por ejemplo, que hablan de universos cíclicos en los que el universo «rebota» y vuelve tras expandirse a contraerse y realizar un ciclo inverso a la expansión que actualmente vivimos.

29. **La radiación de fondo de microondas está formada por fotones. Ahora pertenecen a la región de las microondas.**

a) **¿Cómo era su longitud de onda cuando fueron emitidos?**

b) **Si los detectamos con una frecuencia de 160,2 GHz, ¿qué longitud de onda tienen?**

c) **La intensidad de la radiación de fondo de microondas es de 10^{-9} W/cm^2. Determina entonces cuántos fotones atraviesan en un segundo una superficie cuadrada de 5 cm de lado.**

Datos: $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ J · s; $c = 3 \cdot 10^8$ m/s.

a) Cuando fueron emitidos tenían una longitud de onda menor que ahora.

b) La longitud de onda puede calcularse aplicando la expresión que relaciona la frecuencia, la longitud de onda y la velocidad de la luz en el vacío:

$$c = \lambda \cdot f \rightarrow \lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{160{,}2 \cdot 10^9 \text{ Hz}} = 1{,}87 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 1{,}87 \text{ mm}$$

c) La intensidad de la radiación indica la energía por unidad de tiempo y unidad de superficie. Entonces:

$$I = \frac{N \cdot E_{\text{Fotón}}}{t \cdot S} \rightarrow N = \frac{I \cdot t \cdot S}{E_{\text{Fotón}}} = \frac{I \cdot t \cdot S}{h \cdot f} = \frac{10^{-9} \dfrac{\text{J/s}}{\cancel{\text{cm}^2}} \cdot 1 \text{ s} \cdot 5^2 \cancel{\text{cm}^2}}{6{,}63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \cdot 160{,}2 \cdot 10^9 \text{ Hz}} = 2{,}35 \cdot 10^{14} \text{ fotones}$$

30. **La vida existe sobre la Tierra unos 13 800 millones de años después del *big bang*, cuando la temperatura del universo es de unos 2,7 K. Explica cómo es posible que, en estas circunstancias, tenga lugar la vida que conocemos.**

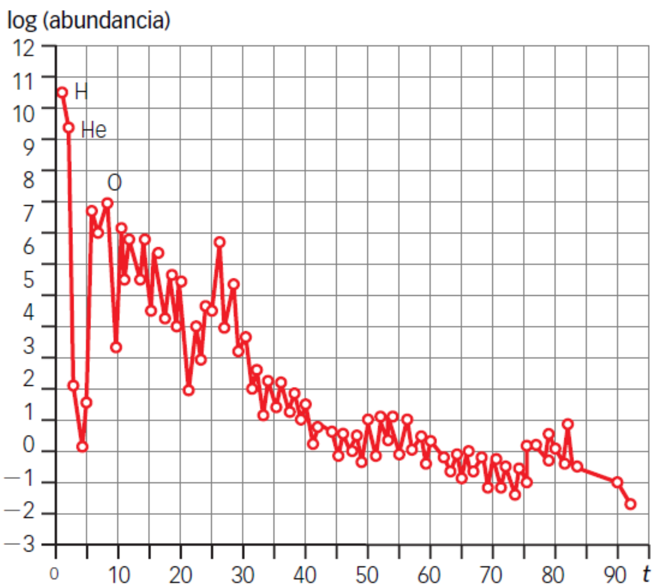
La temperatura mencionada en el enunciado es la temperatura correspondiente a la radiación cósmica de fondo, como si fuese la temperatura media del universo. A esa temperatura la vida tal y como la conocemos no puede existir. Sin embargo, la temperatura, evidentemente, no es constante en diferentes regiones. Existen regiones donde la temperatura es mucho mayor. Y por eso existen regiones donde las condiciones para la vida, hablando de la temperatura, son adecuadas.

31. **La gráfica siguiente muestra las abundancias relativas de los distintos elementos del sistema periódico en el sistema solar.**

a) **¿Dónde y en qué época del universo se han formado los tres elementos más abundantes?**

b) **¿Y el fósforo?**

c) **Explica cómo y dónde se han formado los elementos con número atómico *Z* mayor que el hierro.**



a) Los elementos más abundantes son H, He y O. El H y el He se formaron en los primeros instantes del universo, aunque el He sigue formándose en cierta medida en el interior de muchas estrellas. El O, por el contrario, solo se ha podido formar en el interior de las estrellas, tras reacciones de fusión nuclear en las que el H y el He se van transformando sucesivamente en elementos más pesados.

b) El fósforo se ha formado en el interior de las estrellas.

c) Los átomos pertenecientes a elementos con número atómico mayor que el hierro solo pueden formarse durante las explosiones de supernova. En el interior de las estrellas el elemento más pesado del que se forman átomos es el hierro, pues para los siguientes elementos que le siguen en número atómico es necesario aportar energía, pues al hierro le corresponde la mayor energía de enlace por nucleón.

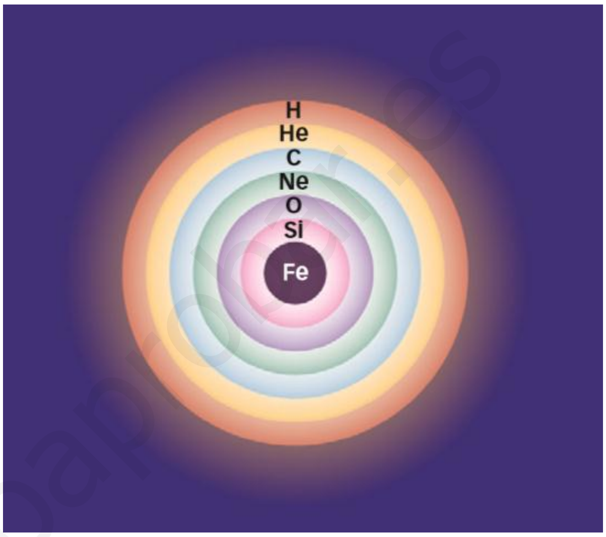
32. La siguiente imagen ilustra cómo se distribuye la materia en una estrella justo antes de convertirse en supernova.

a) Explica la estructura que se muestra.

b) ¿De qué depende que se formen o no ciertas sustancias en el interior de la estrella?

c) ¿Se formará siempre un agujero negro?

d) ¿Qué relación tienen las explosiones de supernova con los elementos químicos presentes en la Tierra? Pon un ejemplo de objeto que uses habitualmente y cuyos átomos se hayan formado necesariamente en una explosión de supernova.



a) La estructura indica que en el núcleo más interno existen núcleos de hierro. A medida que nos desplazamos hacia el exterior de la estrella el número atómico de los átomos presentes va disminuyendo, hasta llegar a las capas más externas, donde el elemento más abundante es el hidrógeno.

b) Que se formen ciertas sustancias depende de la masa de la estrella. En las estrellas poco masivas, como el Sol, se forman los elementos ligeros que siguen al hidrógeno en orden de número atómico. En las estrellas más masivas, sin embargo, se pueden formar átomos más pesados.

c) No siempre se formará un agujero negro, porque esto depende de que la estrella tenga una masa inicial mucho mayor que la del Sol.

d) En las explosiones de supernova se forman los átomos de los elementos químicos más pesados que el hierro. Por tanto, todos los átomos presentes en la Tierra que corresponden a átomos de elementos químicos con número atómico mayor que 26, el número atómico del hierro, se han formado en explosiones de supernova. Por ejemplo, los átomos de oro, de plata, de plomo, etc., se han formado en el interior de una supernova.

33. Explica por qué las estrellas de neutrones tienen una densidad enorme: una sola estrella tiene un diámetro de unos pocos kilómetros.

Porque en una estrella de neutrones los electrones se unen a los protones de los núcleos y se forman neutrones, de manera que no existe el espacio vacío típico de los átomos, en los que los electrones giran alrededor de los núcleos a cierta distancia, de tal modo que la mayor parte de los átomos está vacío. Esto hace posible que en unos pocos kilómetros pueda condensarse toda la materia de una estrella.

34. ¿Es lo mismo materia oscura que agujero negro?

No, agujero negro es una acumulación de materia muy densa que no permite escapar ni siquiera a la luz. Mientras que la materia oscura, que debería llamarse materia invisible, es materia que no podemos detectar salvo por sus efectos gravitatorios sobre materia cercana.

35. **Explica qué se entiende por materia oscura y energía oscura. Razona qué evidencias podemos tener de las mismas.**

La materia oscura hace referencia a materia que no interacciona con la materia ordinaria y cuyos efectos únicamente se dejan notar por sus efectos gravitatorios sobre otros tipos de materia. La energía oscura es algo muy diferente: no se sabe muy bien en qué consiste, pero su consecuencia es una especie de repulsión gravitatoria a gran escala en el universo.

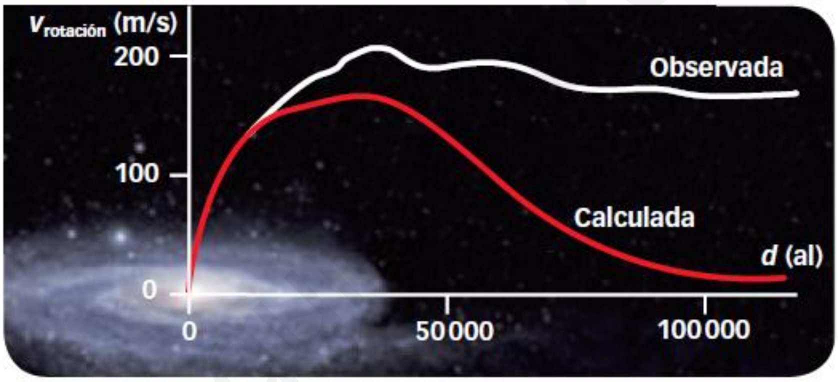
De la materia oscura tenemos varias evidencias. Por ejemplo, en los cúmulos galácticos se observa menos materia de la necesaria para que las galaxias del cúmulo no escapen del mismo. Y en las galaxias espirales se observa que la velocidad de las estrellas no disminuye como sería de esperar a medida que nos alejamos del núcleo galáctico, lo que indica la existencia de materia que no podemos ver. También se buscan evidencias de la materia oscura en detectores de partículas o en experimentos realizados en colisionadores de partículas.

De la energía oscura tenemos una evidencia: la aceleración en la expansión del universo deducida del estudio de supernovas lejanas.

36. **Explica la frase: «La materia oscura es transparente».**

Quiere decir que la materia oscura no interacciona con la luz. Es decir, los fotones pasan a través de la materia oscura sin interaccionar con ella en absoluto.

37. **Explica la siguiente gráfica relacionada con el descubrimiento de materia oscura en las galaxias.**



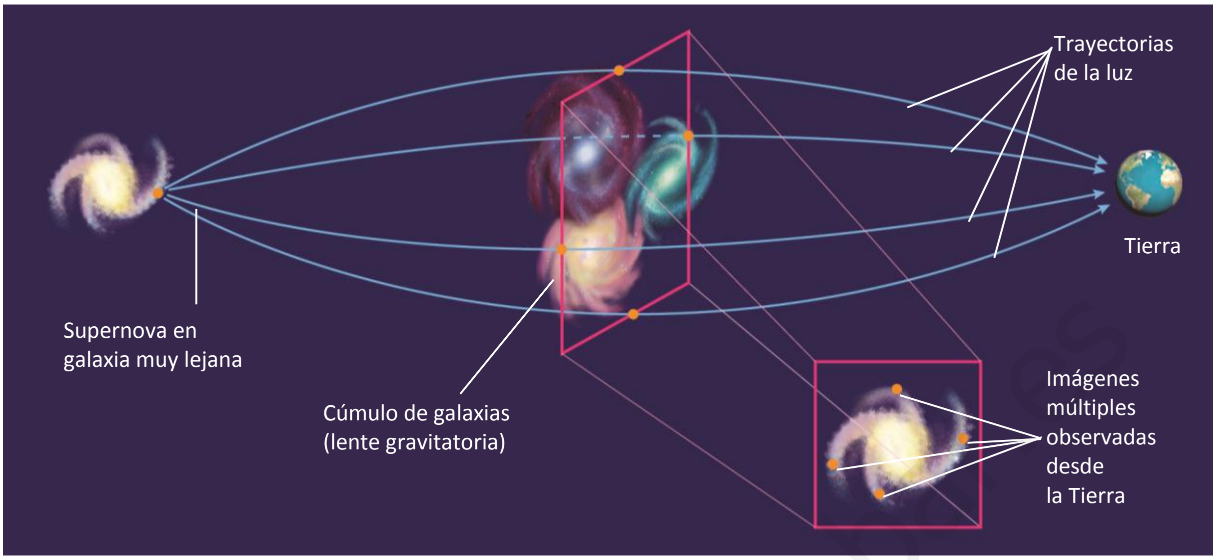
La velocidad de rotación de las estrellas alrededor del núcleo galáctico debería disminuir a medida que nos alejamos del centro galáctico, pues la cantidad de materia va disminuyendo. Sin embargo, se aprecia que la velocidad se mantiene prácticamente constante, lo que confirma la existencia de materia que no podemos ver, pero cuyos efectos gravitatorios se dejan notar.

38. **La siguiente imagen obtenida por el telescopio espacial Hubble en 2014 muestra múltiples imágenes de una supernova observada en una galaxia situada a 9300 millones de años luz de la Tierra. Se aprecian múltiples imágenes de la supernova porque el cúmulo de galaxias situado entre la supernova y nuestra galaxia actúa como una lente y desvía la luz.**

a) **Haz un esquema que muestre la situación de la Tierra, la galaxia que aloja la supernova y el cúmulo de galaxias que provoca la aparición de múltiples imágenes.**

b) **Explica cómo pueden aprovecharse imágenes cómo esta para estudiar la materia oscura.**

a) Entre la supernova y la Tierra existe un cúmulo de galaxias que desvía la luz procedente de la supernova, la desdobla y esto hace que apreciemos varias imágenes de la supernova en regiones diferentes y adyacentes del cielo.



b) Este tipo de imágenes nos permite llegar a medir la masa que tiene el cúmulo que actúa como lente gravitatoria y que modifica la trayectoria de la luz de las estrellas lejanas. A partir de estas imágenes se puede deducir la masa de los objetos intermedios y comparar este valor con la masa deducida de la materia visible.

39. ¿Por qué los grandes colisionadores de partículas nos sirven para comprobar cuáles eran las condiciones del universo en los instantes posteriores al *big bang*?

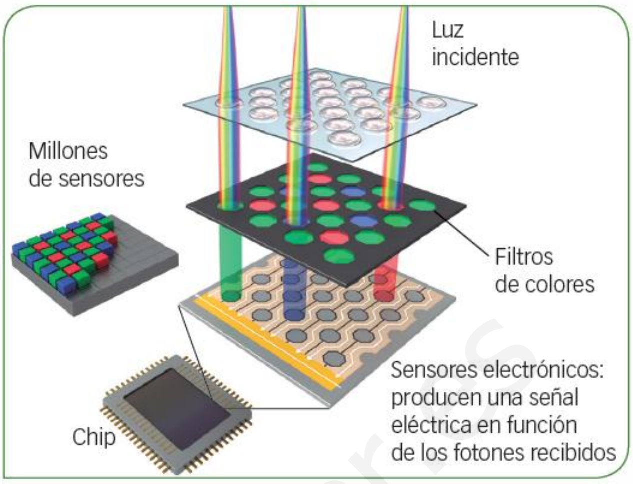
Porque en los colisionadores las partículas involucradas alcanzan energías similares a las que tenían cuando el universo acababa de nacer. Y las reacciones observadas en los colisionadores serían parecidas a las que tuvieron lugar en los primeros instantes de vida del universo.

40. Una de las debilidades del modelo estándar es que no permite hacer un estudio de la interacción gravitatoria similar al de las otras interacciones fundamentales. Busca información y argumenta sobre las posibilidades de detectar el gravitón en experimentos similares a los que se llevaron a cabo en el LHC para detectar otras partículas.

Respuesta personal. La detección del gravitón no parece estar cercana experimentalmente hablando. Realmente no hay predicciones que muestren que en un futuro inmediato algunos experimentos vayan a detectar gravitones.

FÍSICA EN TU VIDA

1. Explica con un esquema la formación de imagen en una cámara digital.



En una cámara digital la luz que llega por el objetivo llega hasta un sensor después de pasar por filtros de varios colores: rojo, verde y azul. Al incidir sobre el chip, se aprovecha el efecto fotoeléctrico y los fotones incidentes provocan la aparición de pequeñas corrientes en el sensor de la cámara. Esta corriente luego se amplifica y se convierte en información útil, de manera que la imagen se forma identificando a qué sensores han llegado los fotones.

2. ¿Por qué la cosmología y otros campos de la astronomía experimentaron un notable avance con la llegada de las cámaras CCD?

Porque la llegada de los sensores digitales hizo que aumentara espectacularmente la eficiencia de los detectores, de manera que se aprovechaba una mayor cantidad de la luz que llegaba al sensor. Esto hizo que los tiempos necesarios para obtener imágenes de los objetos más tenues y lejanos se acortaran.

Y además, los detectores digitales permiten manipular las imágenes mucho más fácilmente, con lo cual es posible, por ejemplo, tomar muchas imágenes con un tiempo de exposición de unos pocos minutos, y luego sumar digitalmente las imágenes para conseguir imágenes más nítidas.

Esto ha permitido, por ejemplo, obtener imágenes de objetos muy lejanos y tenues que no habrían podido detectarse empleando las películas fotográficas tradicionales.

3. Si un sensor CCD es capaz de obtener una imagen de una galaxia utilizando un tiempo de exposición de 45 minutos, ¿cuánto tiempo habría sido necesario empleando una película fotografía analógica? ¿Se habría podido tomar realmente la imagen con un telescopio terrestre?

La respuesta de los sensores digitales es mucho más eficiente que la de las películas fotográficas. En concreto, los sensores digitales aprovechan en torno a un 70 % de la luz que reciben, mientras que las películas fotográficas solamente convierten en información útil el 2 % de los fotones que llegan.

Por tanto, un sensor digital es 35 veces más eficiente, de manera que si un CCD necesita 45 minutos para obtener una imagen de una galaxia, empleando una película fotográfica el tiempo necesario es:

$$45\ \text{min} \cdot 35 = 1575\ \text{min} \cdot \frac{1\ \text{h}}{60\ \text{min}} = 26{,}25\ \text{h}$$

Este tiempo de exposición es mayor que el tiempo que dura una noche en latitudes convencionales en cualquier época del año, por lo que la imagen no se habría podido tomar con una película fotográfica. Además, en el caso de las películas fotográficas las imágenes no pueden tratarse digitalmente de una manera tan sencilla para sumar y restar el fondo del cielo, por ejemplo, con lo cual si queremos obtener imágenes de una galaxia como esta, los sensores CCD han ofrecido la única opción viable.

Sistema periódico de los elementos

GRUPO		1	2	3	4	5	6	7	8
Configuración electrónica		s^1	s^2	d^1	d^2	d^3	d^4	d^5	d^6
ORBITALES	PERIODO	I A	II A	III B	IV B	V B	VI B	VII B	
1s	1	1 H Hidrógeno 1,0							
2s 2p	2	3 Li Litio 6,9	4 Be Berilio 9,0						
3s 3p	3	11 Na Sodio 23,0	12 Mg Magnesio 24,3						
4s 3d 4p	4	19 K Potasio 39,1	20 Ca Calcio 40,1	21 Sc Escandio 45,0	22 Ti Titanio 47,9	23 V Vanadio 50,9	24 Cr Cromo 52,0	25 Mn Manganeso 54,9	26 Fe Hierro 55,8
5s 4d 5p	5	37 Rb Rubidio 85,5	38 Sr Estroncio 87,6	39 Y Itrio 88,9	40 Zr Circonio 91,2	41 Nb Niobio 92,9	42 Mo Molibdeno 96,0	43 Tc Tecnecio (97)	44 Ru Rutenio 101,1
6s 4f 5d 6p	6	55 Cs Cesio 132,9	56 Ba Bario 137,3	Lantanoides	72 Hf Hafnio 178,5	73 Ta Tántalo 180,9	74 W Wolframio 183,8	75 Re Renio 186,2	76 Os Osmio 190,2
7s 5f 6d 7p	7	87 Fr Francio (223)	88 Ra Radio (226)	Actinoides	104 Rf Rutherfordio (267)	105 Db Dubnio (270)	106 Sg Seaborgio (271)	107 Bh Bohrio (270)	108 Hs Hassio (277)

Número atómico: 20 — Masa atómica (u): 40,1 — Símbolo: Ca — Nombre: Calcio

Los símbolos con texto hueco corresponden a elementos creados artificialmente

			f^1	f^2	f^3	f^4	f^5
LANTANOIDES →	6	57 La Lantano 138,9	58 Ce Cerio 140,1	59 Pr Praseodimio 140,9	60 Nd Neodimio 144,2	61 Pm Prometio (145)	62 Sm Samario 150,4
ACTINOIDES →	7	89 Ac Actinio (227)	90 Th Torio 232,0	91 Pa Protactinio 231,0	92 U Uranio 238,0	93 Np Neptunio (237)	94 Pu Plutonio (244)

9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
d^7	d^8	d^9	d^{10}	p^1	p^2	p^3	p^4	p^5	p^6
									VIII A
									2 **He** Helio 4,0
				III A	IV A	V A	VI A	VII A	
				5 **B** Boro 10,8	6 **C** Carbono 12,0	7 **N** Nitrógeno 14,0	8 **O** Oxígeno 16,0	9 **F** Flúor 19,0	10 **Ne** Neón 20,2
VIII		I B	II B	13 **Al** Aluminio 27,0	14 **Si** Silicio 28,1	15 **P** Fósforo 31,0	16 **S** Azufre 32,1	17 **Cl** Cloro 35,5	18 **Ar** Argón 39,9
27 **Co** Cobalto 58,9	28 **Ni** Níquel 58,7	29 **Cu** Cobre 63,5	30 **Zn** Cinc 65,4	31 **Ga** Galio 69,7	32 **Ge** Germanio 72,6	33 **As** Arsénico 74,9	34 **Se** Selenio 79,0	35 **Br** Bromo 79,9	36 **Kr** Criptón 83,8
45 **Rh** Rodio 102,9	46 **Pd** Paladio 106,4	47 **Ag** Plata 107,9	48 **Cd** Cadmio 112,4	49 **In** Indio 114,8	50 **Sn** Estaño 118,7	51 **Sb** Antimonio 121,8	52 **Te** Teluro 127,6	53 **I** Yodo 126,9	54 **Xe** Xenón 131,3
77 **Ir** Iridio 192,2	78 **Pt** Platino 195,1	79 **Au** Oro 197,0	80 **Hg** Mercurio 200,6	81 **Tl** Talio 204,4	82 **Pb** Plomo 207,2	83 **Bi** Bismuto 209,0	84 **Po** Polonio (209,0)	85 **At** Astato (210,0)	86 **Rn** Radón (222,0)
109 **Mt** Meitnerio (276)	110 **Ds** Darmstadtio (281)	111 **Rg** Roentgenio (282)	112 **Cn** Copernicio (285)	113 **Uut** Ununtrio (285)	114 **Fl** Flerovio (289)	115 **Uup** Ununpentio (289)	116 **Lv** Livermorio (293)	117 **Uus** Ununseptio (294)	118 **Uuo** Ununoctio (294)

NO METALES

METALES

GASES NOBLES

f^6	f^7	f^8	f^9	f^{10}	f^{11}	f^{12}	f^{13}	f^{14}
63 **Eu** Europio 152,0	64 **Gd** Gadolinio 157,3	65 **Tb** Terbio 158,9	66 **Dy** Disprosio 162,5	67 **Ho** Holmio 164,9	68 **Er** Erbio 167,3	69 **Tm** Tulio 168,9	70 **Yb** Iterbio 173,0	71 **Lu** Lutecio 175,0
95 **Am** Americio (243)	96 **Cm** Curio (247)	97 **Bk** Berkelio (247)	98 **Cf** Californio (251)	99 **Es** Einstenio (252)	100 **Fm** Fermio (257)	101 **Md** Mendelevio (258)	102 **No** Nobelio (259)	103 **Lr** Laurencio (262)

Dirección de arte: José Crespo.

Proyecto gráfico: Estudio Pep Carrió.

Fotografía de portada: Leila Méndez.

Jefa de proyecto: Rosa Marín.

Coordinación de ilustración: Carlos Aguilera.

Ilustración: Enrique Cordero, Emilio del Peso, Roberto Hernández y Eduardo Leal.

Jefe de desarrollo de proyecto: Javier Tejeda.

Desarrollo gráfico: Raúl de Andrés, Rosa Barriga, Olga de Dios, Jorge Gómez y Julia Ortega.

Dirección técnica: Jorge Mira Fernández.

Coordinación técnica: Francisco Moral.

Corrección: Ángeles San Román y Nuria del Peso

Documentación y selección fotográfica: Nieves Marinas.

Fotografía: D. Sánchez; J. Jaime; KAIBIDE DE CARLOS FOTÓGRAFOS; M. G. Vicente; M. Sánchez; P. Esgueva; 123RF; A. G. E. FOTOSTOCK/Image Asset Managemen, Science Source, Cavallini/BSIP, ESP-Photo, GIPhotoStock, US DEPARTMENT OF ENERGY/SCIENCE PHOTO LIBRARY, Edward Kinsman, SCIENCE PHOTO LIBRARY/Erich Schrempp, Carolina Biological S., SPL, Javier Larrea; ACI AGENCIA DE FOTOGRAFÍA/Alamy Images; AGENCIA ZARDOYA; EFE/Observatorioa Austral Europeo (ESO), Agencia Espacial Europea (ESA), J. J. Guillén; GETTY IMAGES SALES SPAIN/Photos.com Plus, Walter Bibikow, Don Farrall, Thinkstock; HIGHRES PRESS STOCK/AbleStock.com; I. PREYSLER; ISTOCKPHOTO/ Getty Images Sales Spain; NASA/ESA, H. Teplitz & M. Rafelski (IPAC/Caltech), A Koekemoer (STScI), R. Windhorst (ASU), Z. Levay (STScI), NASA/JPL-Caltech/J. Stauffer (SSC/Caltech), ESA and the Planck Collaboration, ESA and M. Livio and the Hubble, ESA, Postman and D. Coe, JPL-Caltech/MSSS, Hubble Heritage, ESA and Rodney, ESA and Riess, Robert Gendler, Subaru Telescope (NOAJ), ESA-D.Ducros, JPL, ESA; SHUTTERSTOCK; Lawrence Berkeley National Lab; Fermilab Visual Media Services; Meade; SONY; AEMET/Agencia Estatal de Meteorología; AIP EMILIO SEGRÈ VISUAL ARCHIVES/Photograph by Paul Ehrenfest, courtesy AIP Emilio Segre Visual Archives, Ehrenfest Collection; Canon España, S.A; ESA/European Space Research an Technology Centre, ESTEC, the Netherlands, ATG medialab; JVC; Kamioka Observatory, ICRR (Institute for Cosmic Ray Research), The University of Tokyo; KODANSHA; MATTON-BILD; NORDEX SE; PALAIS DE LA DÉCOUVERTE, PARIS; PHOTO CERN/ Maximilien Brice, Thomas McCauley, Lucas Taylor; SERIDEC PHOTOIMAGENES CD; Thomas Jefferson National Accelerator Facility / Jefferson Lab/Photo courtesy of Steve Gagnon, The Department of Energy's Jefferson Lab; ARCHIVO SANTILLANA

Avenida de los Artesanos, 6
28760 Tres Cantos, Madrid
Printed in Spain

CP: 790859

BIBLIOTECA DEL PROFESORADO

SOLUCIONARIO

2 BACHILLERATO

Física

SERIE **INVESTIGA**

SANTILLANA

PROYECTO SABER HACER