

Ejercicio 1

a) (1,25 puntos) Dadas las rectas $r: \frac{x-2}{3} = \frac{3-y}{-2}$ y $s: y = 3x - 5$, se pide calcular el ángulo que forman.

b) (1,25 puntos) Desarrollar por el Binomio de Newton: $\left(2x^3 y^4 - \frac{3x^2}{y^3}\right)^5$

Ejercicio 2 (2,5 puntos)

Operar las fracciones algebraicas y simplificar resultado:

$$\frac{x-1}{x-2} - \frac{x-3}{4-x^2} - \frac{x+1}{x+2} =$$

Ejercicio 3 (2,5 puntos)

Calcular el valor de k para que el punto $A=(3, 2-k)$ pertenezca a la recta r de

ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = -2 - 3t \end{cases}$

Ejercicio 4

a) (1,25 puntos) Simplificar la fracción algebraica: $\frac{2x^5 - 3x^4 - 2x^3 + 3x^2}{2x^6 - 5x^5 - x^4 + 6x^3} =$

b) (1,25 puntos) Simplifica la expresión: $\frac{3^{n-2} \cdot (n+3)!}{3^n \cdot \binom{n+3}{3}} =$

Ejercicio 5 (2,5 puntos)

Dado el triángulo de vértices $A(-2, -1)$, $B(-1, 2)$ y $C(3, 1)$ halla su circuncentro (punto de corte de las mediatrices).

Ejercicio 6 (2,5 puntos)

Calcula k para que las rectas $r: kx + y = 12$ y $s: 4x - 3y = k+1$ sean paralelas.

Calcula la distancia entre ellas para ese valor de k .

Ejercicio 7 (2,5 puntos)

Calcula el simétrico del punto $P(1,1)$ respecto de la recta $r: y = 3x - 7$

Ejercicio 8

a) (1,25 puntos) Demuestra que los vectores $\vec{u} = (1, -2)$ y $\vec{v} = (3, 1)$ forman base de V^2 .

Calcula las coordenadas del vector $(-2, 6)$ en esa base.

b) (1,25 puntos) Calcula el valor de k para que los vectores

$\vec{u} = (1 + k, +2)$ y $\vec{v} = (k, k - 2)$ sean perpendiculares

Ejercicio 1

a) (1,25 puntos) Dadas las rectas $r: \frac{x-2}{3} = \frac{3-y}{-2}$ y $s: y = 3x - 5$, se pide calcular el ángulo que forman.

$$\frac{y-3}{2}$$

$$3x - y - 5 = 0$$

$$\vec{n}_s = (3, -1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{v}_s = (1, 3)$$

$$\vec{v}_r = (3, 2) \text{ y } \vec{v}_s = (1, 3)$$

$$\cos(\hat{r}_s) = |\cos(\vec{v}_r, \vec{v}_s)| = \frac{|(3, 2) \cdot (1, 3)|}{\sqrt{3^2 + 2^2} \cdot \sqrt{1^2 + 3^2}} =$$

$$= \frac{|3 \cdot 1 + 2 \cdot 3|}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{10}} = \frac{9}{\sqrt{130}} = \frac{9}{\sqrt{130}} = 0,7893 \Rightarrow$$

$$\boxed{(\hat{r}_s) = \arccos 0,7893 = 37,8799^\circ}$$

b) (1,25 puntos) Desarrollar por el Binomio de Newton: $\left(2x^3 y^4 - \frac{3x^2}{y^3}\right)^5 =$

$$\begin{aligned} & (2x^3 y^4)^5 - 5 \cdot (2x^3 y^4)^4 \frac{3x^2}{y^3} + 10 (2x^3 y^4)^3 \left(\frac{3x^2}{y^3}\right)^2 - 10 (2x^3 y^4)^2 \left(\frac{3x^2}{y^3}\right)^3 + \\ & + 5 (2x^3 y^4) \left(\frac{3x^2}{y^3}\right)^4 - \left(\frac{3x^2}{y^3}\right)^5 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & = 32 x^{15} y^{20} - 5 \cdot 16 x^{12} y^{16} \frac{3x^2}{y^3} + 10 \cdot 8 x^9 y^{12} \cdot \frac{9x^4}{y^6} - 10 \cdot 4 x^6 y^8 \cdot \frac{27x^6}{y^9} + \\ & + 10 x^3 y^4 \cdot \frac{81x^8}{y^{12}} - \frac{243x^{10}}{y^{15}} = \end{aligned}$$

$$\boxed{= 32x^{15}y^{20} - 240x^{14}y^{13} + 720x^{13}y^6 - 1080\frac{x^{12}}{y} + 810\frac{x^{11}}{y^8} - \frac{243x^{10}}{y^{15}}}$$

Ejercicio 2 (2,5 puntos)

Operar las fracciones algebraicas y simplificar resultado:

$$\frac{x-1}{x-2} - \frac{x-3}{4-x^2} - \frac{x+1}{x+2} =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{x-1}{x-2} + \frac{x-3}{\underbrace{x^2-4}_{(x-2)(x+2)}} - \frac{x+1}{x+2} = \frac{(x-1)(x+2) + (x-3) - (x+1)(x-2)}{(x^2-4)} \\ &= \frac{x^2+2x-x-2+x-3-(x^2-2x+x-2)}{x^2-4} = \frac{\cancel{x^2}+2x-\cancel{x}-2+\cancel{x}-3-\cancel{x^2}+2x-\cancel{x}+2}{x^2-4} \\ &= \frac{3x-3}{x^2-4} \end{aligned}$$

$$= \boxed{\frac{3x-3}{x^2-4}}$$

Ejercicio 3 (2,5 puntos)

Calcular el valor de k para que el punto A=(3, 2-k) pertenezca a la recta r de

ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = -2 - 3t \end{cases}$

Sustituimos punto en ec. recta:

$$\begin{cases} 3 = 5 + 2t \Rightarrow 3 - 5 = 2t \Rightarrow -2 = 2t \Rightarrow \frac{-2}{2} = t \Rightarrow \underline{t = -1} \\ 2 - k = -2 - 3t \Rightarrow 2 - k = -2 - 3(-1) \Rightarrow 2 - k = -2 + 3 \Rightarrow 2 - k = 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow 2 - 1 = k \Rightarrow \boxed{1 = k} \end{cases}$$

Ejercicio 4

a) (1,25 puntos) Simplificar la fracción algebraica: $\frac{2x^5-3x^4-2x^3+3x^2}{2x^6-5x^5-x^4+6x^3} =$

$$= \frac{x^2 \cdot (2x^3 - 3x^2 - 2x + 3)}{x^3 \cdot (2x^3 - 5x^2 - x + 6)} = \frac{\cancel{x} \cdot \cancel{2} \cdot (x-1) \cdot \cancel{(x-\frac{3}{2})} \cdot \cancel{(x+1)}}{\cancel{x^2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{(x+1)} \cdot (x-2) \cdot \cancel{(x-\frac{3}{2})}} = \boxed{\frac{x-1}{x(x-2)}}$$

$$2x^3 - 3x^2 - 2x + 3 = 0 \Rightarrow \text{Divisores t.i. } \{1, -1, 3, -3\}$$

$$P(1) = 2 \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 + 3 = 2 - 3 - 2 + 3 = 0 \Rightarrow x=1 \text{ es raíz} \Rightarrow (x-1) \text{ es factor}$$

$$2x^3 - 3x^2 - 2x + 3 = (x-1) \cdot Q(x) = (x-1) \cdot (2x^2 - x - 3) = (x-1) \cdot 2 \cdot (x - \frac{3}{2})(x+1)$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 2 & -3 & -2 & 3 \\ & & 2 & -1 & -3 \\ \hline & 2 & -1 & -3 & 0=R \end{array}$$

$$2x^2 - x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{4} = \frac{1 \pm 5}{4} \begin{cases} x = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \\ x = \frac{-4}{4} = -1 \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{3}{2} \text{ es raíz} \Rightarrow x - \frac{3}{2} \text{ es factor} \\ x = -1 \text{ es raíz} \Rightarrow x + 1 \text{ es factor} \end{array} \right.$$

$$2x^3 - 5x^2 - x + 6 = 0 \Rightarrow \text{Divisores t.i. } \{1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6\}$$

$$P(-1) = 2 \cdot (-1)^3 - 5 \cdot (-1)^2 - (-1) + 6 = 2 \cdot (-1) - 5 \cdot 1 + 1 + 6 = -2 - 5 + 1 + 6 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = -1 \text{ es raíz} \Rightarrow x + 1 \text{ es factor}$$

$$2x^3 - 5x^2 - x + 6 = (x+1) \cdot Q(x) = (x+1) \cdot (2x^2 - 7x + 6) = (x+1) \cdot 2 \cdot (x-2) \cdot (x - \frac{3}{2})$$

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 2 & -5 & -1 & 6 \\ & & -2 & 7 & -6 \\ \hline & 2 & -7 & 6 & 0=R \end{array}$$

$$2x^2 - 7x + 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 6}}{2 \cdot 2} = \frac{7 \pm \sqrt{49-48}}{4} = \frac{7 \pm 1}{4} \begin{cases} x = \frac{8}{4} = 2 \Rightarrow (x-2) \text{ es factor} \\ x = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \Rightarrow (x - \frac{3}{2}) \text{ es factor} \end{cases}$$

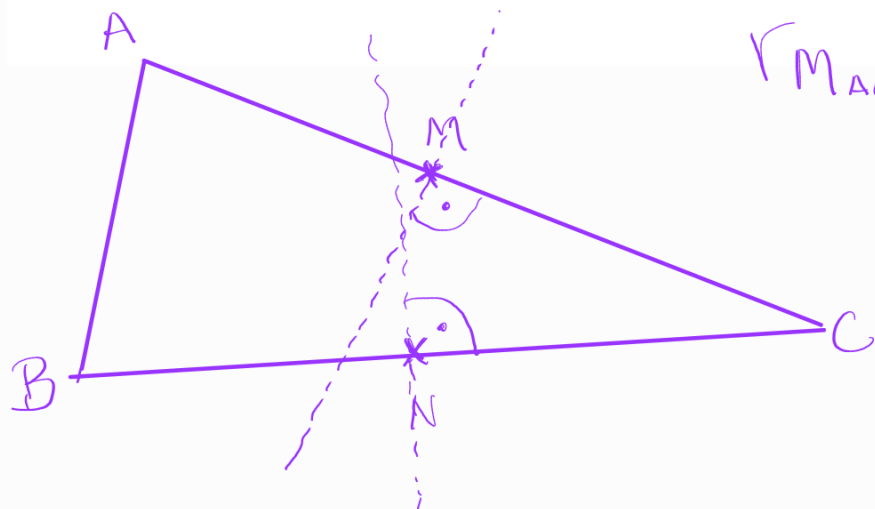
b) (1,25 puntos) Simplifica la expresión: $\frac{3^{n-2} \cdot (n+3)!}{3^n \cdot \binom{n+3}{3}} =$

$$= 3^{n-2-n} \cdot \frac{(n+3)!}{\frac{(n+3)!}{3! (n+3-3)!}} = 3^{-2} \cdot \frac{(n+3)! \cdot n! \cdot 3!}{(n+3)!} =$$

$$= \frac{n! \cdot \cancel{3} \cdot 2 \cdot 1}{3^2} = \boxed{\frac{2n!}{3}}$$

Ejercicio 5 (2,5 puntos)

Dado el triángulo de vértices $A(-2, -1)$, $B(-1, 2)$ y $C(3, 1)$ halla su circuncentro (punto de corte de las mediatrices).



$$r_{MAC} \begin{cases} M \in r_{MAC} \text{ pto medio } \overline{AC} \\ r_{MAC} \perp \overrightarrow{AC} \Rightarrow \\ \Rightarrow \vec{n} = \overrightarrow{AC} \end{cases}$$

$$M = \left(\frac{-2+3}{2}, \frac{-1+1}{2} \right)$$

$$M = \left(\frac{1}{2}, 0 \right)$$

$$\overrightarrow{AC} = (3, 1) - (-2, -1) = (5, 2) = \vec{n}$$

$$r_{MAC} \begin{cases} M \left(\frac{1}{2}, 0 \right) \\ \vec{n} (5, 2) \Rightarrow \vec{v} = (2, -5) \end{cases} \Rightarrow r_{MAC} \begin{cases} x = \frac{1}{2} + 2\lambda \\ y = -5\lambda \end{cases}$$

$$r_{MBC} \begin{cases} K \in r_{MBC} \text{ pto medio } \overline{BC} \Rightarrow K = \left(\frac{-1+3}{2}, \frac{2+1}{2} \right) = \left(1, \frac{3}{2} \right) \\ r_{MBC} \perp \overrightarrow{BC} \Rightarrow \vec{n} = \overrightarrow{BC} = (3, 1) - (-1, 2) = (4, -1) \end{cases}$$

$$r_{MBC} : 4(x-1) - 1(y-\frac{3}{2}) = 0$$

$$4x - y - 4 + \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow 4x - y - \frac{5}{2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{8x - 2y - 5 = 0 : r_{MBC}}$$

$$\text{CIRCUNCENTRO} = r_{MAC} \cap r_{MBC}$$

Sustituyo paramétricas (r_{MAC}) en general (r_{MBC})

$$8 \cdot \left(\frac{1}{2} + 2\lambda\right) - 2 \cdot (-5\lambda) - 5 = 0$$

$$4 + 16\lambda + 10\lambda - 5 = 0$$

$$26\lambda - 1 = 0$$

$$26\lambda = 1$$

$$\lambda = \frac{1}{26}$$

que sustituyo en V_{MAC}

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{2} + 2 \cdot \left(\frac{1}{26}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{13} = \frac{13+2}{26} = \frac{15}{26} \\ y = -5 \cdot \left(\frac{1}{26}\right) = -\frac{5}{26} \end{array} \right.$$

$$\boxed{\text{CIRCUNCENTRO} = \left(\frac{15}{26}, -\frac{5}{26}\right)}$$

Ejercicio 6 (2,5 puntos)

a) Calcula k para que las rectas $r: kx + y = 12$ y $s: 4x - 3y = k+1$ sean paralelas.

b) Calcula la distancia entre ellas para ese valor de k .

$$a) r \parallel s \Leftrightarrow \frac{k}{4} = \frac{1}{-3} \neq \frac{12}{k+1} \Rightarrow -3k = 4 \Rightarrow \boxed{k = -\frac{4}{3}}$$

Comprobación:

$$\frac{12}{-\frac{4}{3}+1} = \frac{12}{-\frac{1}{3}} = -36$$

$$b) r: \frac{4}{3}x + y - 12 = 0 \Rightarrow 4x + 3y - 36 = 0$$

$$d(r, s) = d(P_r, s)$$

$$P_r \rightarrow \begin{cases} y=0 \Rightarrow \\ \Rightarrow 4x - 36 = 0 \\ 4x = 36 \Rightarrow \underline{x=9} \end{cases}$$

$$P_r = (9, 0)$$

$$s: 4x - 3y = -\frac{4}{3} + 1 \Rightarrow 4x - 3y = -\frac{1}{3} \Rightarrow \\ \Rightarrow 12x - 9y + 1 = 0 : 3$$

$$d(P_r, s) = \frac{|12 \cdot 9 - 9 \cdot 0 + 1|}{\sqrt{12^2 + (-9)^2}} = \frac{|109|}{\sqrt{144 + 81}} =$$

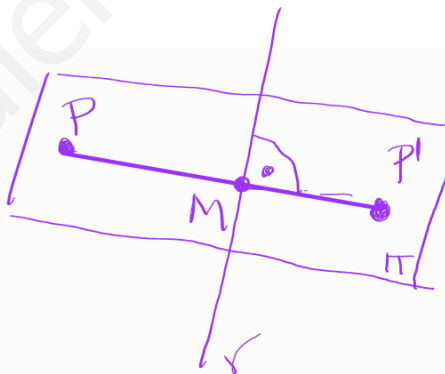
$$= \boxed{\frac{109}{15} u}$$

Ejercicio 7 (2,5 puntos)

Calcula el simétrico del punto $P(1,1)$ respecto de la recta $r: y = 3x - 7$

$$r: 3x - y - 7 = 0$$

$$\vec{n}_r = (3, -1) \Rightarrow \vec{U}_r = (1, 3)$$



M pto medio de PP' y $M = r \cap \pi$

donde $\pi \begin{cases} P(1,1) \in \pi \\ \pi \perp r \Rightarrow \vec{n}_\pi = \vec{U}_r(1,3) \end{cases}$

$$\pi: 1 \cdot (x-1) + 3(y-1) = 0 \\ x - 1 + 3y - 3 = 0$$

$$\pi: x + 3y - 4 = 0$$

$$r \cap \pi \Rightarrow x + 3(3x - 7) - 4 = 0$$

$$x + 9x - 21 - 4 = 0$$

$$x + 9x - 25 = 0$$

$$10x = 25$$

$$\underline{x = \frac{25}{10} = \frac{5}{2}}$$

$$\underline{y = 3 \cdot \frac{5}{2} - 7 = \frac{15}{2} - 7 = \frac{1}{2}}$$

$$\underbrace{M = \left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2} \right)}_{M \text{ pto medio } PP'} \Rightarrow \begin{cases} \frac{5}{2} = \frac{1 + x_{P'}}{2} \Rightarrow 5 = 1 + x_{P'} \Rightarrow \underline{x_{P'} = 4} \\ \frac{1}{2} = \frac{1 + y_{P'}}{2} \Rightarrow 1 = 1 + y_{P'} \Rightarrow \underline{y_{P'} = 0} \end{cases}$$

$$\boxed{P'(4, 0)}$$

Ejercicio 8

a) (1,25 puntos) Demuestra que los vectores $\vec{u} = (1, -2)$ y $\vec{v} = (3, 1)$ forman base de V^2 .

Calcula las coordenadas del vector $(-2, 6)$ en esa base.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = (1, -2) \\ \vec{v} = (3, 1) \end{array} \right\} \frac{1}{3} \neq \frac{-2}{1} \Rightarrow \underbrace{\vec{u} \neq \lambda \vec{v}}_{\text{No proporcionales}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{Son l.i.} \Rightarrow B = \{\vec{u}, \vec{v}\} \text{ forman BASE}$$

$$(-2, 6) = \alpha(1, -2) + \beta(3, 1)$$

$$(-2, 6) = (\alpha, -2\alpha) + (3\beta, \beta)$$

$$\begin{cases} -2 = \alpha + 3\beta \\ 6 = -2\alpha + \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} 2E_1 \\ \hline \end{array} \begin{cases} -4 = 2\alpha + 6\beta \\ 6 = -2\alpha + \beta \end{cases}$$

$$\oplus \quad 2 = 7\beta \Rightarrow \underline{\underline{\beta = \frac{2}{7}}}$$

$$6 = -2\alpha + \frac{2}{7} \Rightarrow 6 - \frac{2}{7} = -2\alpha$$

$$\frac{40}{7} = -2\alpha$$

$$\frac{40 \cdot (-1)}{7 \cdot (-2)} = \alpha$$

$$\underline{\underline{-\frac{20}{7} = \alpha}}$$

$$(-2, 6) \rightarrow \boxed{\left(-\frac{20}{7}, \frac{2}{7}\right)}$$

b) (1,25 puntos) Calcula el valor de k para que los vectores

$\vec{u} = (1+k, +2)$ y $\vec{v} = (k, k-2)$ sean perpendiculares

¿k? t.q. $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

$$(1+k, +2) \cdot (k, k-2) = 0$$

$$(1+k) \cdot k + (+2)(k-2) = 0$$

$$k + k^2 + 2k - 4 = 0$$

$$k^2 + 3k - 4 = 0 \quad \begin{cases} \oplus -3 \\ \ominus -4 \end{cases} \quad \boxed{\begin{matrix} k_1 = -4 \\ k_2 = 1 \end{matrix}}$$