

1. **[1,5 puntos]** Factorizar el siguiente polinomio: $p(x) = 2x^4 - x^3 - 13x^2 - 6x$. ¿Cuáles son las soluciones de la ecuación polinómica $2x^4 - x^3 - 13x^2 - 6x = 0$?

2. **[4,5 puntos]** Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $2x - \frac{1-2x}{3} = 3x - \frac{3}{x+1}$

b) $1 + \sqrt{2-x} = \sqrt{2x+2}$

c) $3 \cdot 2^{x+2} - 4^x - 20 = 0$

3. **[1,5 puntos]** Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones y expresa las soluciones en forma de pareja ordenada.

$$\begin{cases} xy - \frac{x}{2} = -5 \\ \frac{2y+3}{3} + x = 1 \end{cases}$$

4. **[1,5 puntos]** Resuelve la siguiente inecuación y expresa las soluciones en forma de intervalo o de unión de intervalos, según corresponda.

$$\frac{x^2}{3} < 4 - \frac{3x-7}{2}$$

5. **[1 punto]** Para resolver este problema es obligatorio plantear una ecuación o un sistema de ecuaciones de primer grado.

Un padre tiene 29 años, y su hija, 3. Calcular cuántos años han de transcurrir para que la edad del padre sea el triple de la edad de su hija.

Soluciones

1. **[1,5 puntos]** Factorizar el siguiente polinomio: $p(x) = 2x^4 - x^3 - 13x^2 - 6x$. ¿Cuáles son las soluciones de la ecuación polinómica $2x^4 - x^3 - 13x^2 - 6x = 0$?

Sacando x factor común tenemos que $p(x) = x(2x^3 - x^2 - 13x - 6)$. Ahora, haciendo uso de la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 2 & -1 & -13 & -6 \\ & & -4 & 10 & 6 \\ \hline & 2 & -5 & -3 & 0 \end{array}$$

Esto quiere decir que $p(x) = x(x+2)(2x^2 - 5x - 3)$. Resolvamos ahora la ecuación de segundo grado $2x^2 - 5x - 3 = 0$:

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{2 \cdot 2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{4} = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{4} = \frac{5 \pm 7}{4} = \begin{cases} x_1 = \frac{12}{4} \Rightarrow x_1 = 3 \\ x_2 = -\frac{2}{4} \Rightarrow x_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Por tanto, la factorización del polinomio es la siguiente: $p(x) = 2x(x+2)(x-3)\left(x + \frac{1}{2}\right)$.

Puesto que las soluciones de la ecuación $p(x) = 0$ coinciden con las raíces del polinomio $p(x)$, las soluciones de la ecuación $2x^4 - x^3 - 13x^2 - 6x = 0$ son cuatro: $x_1 = 0$, $x_2 = -2$, $x_3 = 3$, $x_4 = -\frac{1}{2}$.

2. **[4,5 puntos]**. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $2x - \frac{1-2x}{3} = 3x - \frac{3}{x+1} \Rightarrow [\text{mcm} = 3(x+1)] \Rightarrow 3(x+1)2x - (x+1)(1-2x) = 3(x+1)3x - 3 \cdot 3 \Rightarrow$
 $\Rightarrow 6x^2 + 6x - x + 2x^2 - 1 + 2x = 9x^2 + 9x - 9 \Rightarrow x^2 + 2x - 8 = 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow \Delta = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 4 + 32 = 36 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm 6}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{4}{2} \Rightarrow x_1 = 2 \\ x_2 = \frac{-8}{2} \Rightarrow x_2 = -4 \end{cases}$

b) $1 + \sqrt{2-x} = \sqrt{2x+2} \Rightarrow (1 + \sqrt{2-x})^2 = \sqrt{2x+2}^2 \Rightarrow 1 + 2\sqrt{2-x} + 2 - x = 2x + 2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow 2\sqrt{2-x} = 2x + 2 - 1 - 2 + x \Rightarrow 2\sqrt{2-x} = 3x - 1 \Rightarrow (2\sqrt{2-x})^2 = (3x-1)^2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow 4(2-x) = 9x^2 - 6x + 1 \Rightarrow 8 - 4x = 9x^2 - 6x + 1 \Rightarrow 9x^2 - 2x - 7 = 0$. $\Delta = 4 + 252 = 256$.
 $x = \frac{2 \pm 16}{18} = \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -\frac{7}{9} \end{cases}$ $\begin{cases} 1 + \sqrt{2-1} = \sqrt{2 \cdot 1 + 2} \Rightarrow 1 + \sqrt{1} = \sqrt{2+2} \Rightarrow 1+1 = \sqrt{4} \Rightarrow 2 = 2 \\ 1 + \sqrt{2+\frac{7}{9}} = \sqrt{2 \cdot \left(-\frac{7}{9}\right) + 2} \Rightarrow 1 + \sqrt{\frac{25}{9}} = \sqrt{-\frac{14}{9} + 2} \Rightarrow 1 + \frac{5}{3} = \sqrt{\frac{4}{9}} \Rightarrow \frac{8}{3} = \frac{2}{3} \end{cases}$

Por tanto, $x = 1$ sí que es solución, pero $x = -7/9$ no es solución de la ecuación.

c) $3 \cdot 2^{x+2} - 4^x - 20 = 0 \Rightarrow 3 \cdot 2^2 \cdot 2^x - (2^x)^2 - 20 = 0$. Llamando $z = 2^x$: $12z - z^2 - 20 = 0 \Rightarrow z^2 - 12z + 20 = 0$
 $\Delta = 12^2 - 4 \cdot 1 \cdot 20 = 144 - 80 = 64$. $z = \frac{12 \pm 8}{2} = \begin{cases} z = 10 \\ z = 2 \end{cases}$. Si $z = 10 \Rightarrow 2^x = 10 \Rightarrow x = \log_2 10 \Rightarrow x \cong 3,32$.
 Y si $z = 2 \Rightarrow 2^x = 2 \Rightarrow x = 1$.

3. [1,5 puntos] Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} xy - \frac{x}{2} = -5 \\ \frac{2y+3}{3} + x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2xy - x = -10 \\ 2y+3+3x=3 \end{cases} \text{ De la segunda ecuación: } y = \frac{-3x}{2} \text{ . Sustituyendo en la primera:}$$

$$2x \frac{-3x}{2} - x = -10 \Rightarrow -3x^2 - x = -10 \Rightarrow 3x^2 + x - 10 = 0 \text{ . Entonces:}$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-10) = 1 + 120 = 121 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm 11}{6} = \begin{cases} x_1 = \frac{5}{3} \\ x_2 = -2 \end{cases} \text{ . Calculemos ahora las soluciones para } y \text{ .}$$

$$\text{Si } x = \frac{5}{3} \Rightarrow y = \frac{-3 \cdot \frac{5}{3}}{2} \Rightarrow y = -\frac{5}{2} \text{ . Y si } x = -2 \Rightarrow y = \frac{-3 \cdot (-2)}{2} \Rightarrow y = 3 \text{ .}$$

En forma de pareja ordenada las soluciones las podemos escribir así: $\left(\frac{5}{3}, -\frac{5}{2}\right)$ y $(-2, 3)$.

4. [1,5 puntos] Resuelve la siguiente inecuación y expresa las soluciones en forma de intervalo o de unión de intervalos, según corresponda.

$$\frac{x^2}{3} < 4 - \frac{3x-7}{2} \Rightarrow 2x^2 < 24 - 9x + 21 \Rightarrow 2x^2 + 9x - 45 < 0 \text{ . Como las soluciones de } 2x^2 + 9x - 45 = 0 \text{ son}$$

$$x = -\frac{15}{2} \text{ y } x = 3 \text{ (icompruébese!) , la inecuación es equivalente a esta otra: } 2\left(x + \frac{15}{2}\right)(x-3) < 0 \text{ . Hagamos}$$

una tabla y estudiemos los signos:

	$\left(-\infty, -\frac{15}{2}\right)$	$\left(-\frac{15}{2}, 3\right)$	$(3, +\infty)$
$2\left(x + \frac{15}{2}\right)(x-3)$	+	-	+

De este modo, la solución en forma de intervalo es: $x \in \left(-\frac{15}{2}, 3\right)$.

5. [1 punto] Para resolver este problema es obligatorio plantear una ecuación o un sistema de ecuaciones de primer grado.

Un padre tiene 29 años, y su hija, 3. Calcular cuántos años han de transcurrir para que la edad del padre sea el triple de la edad de su hija.

Llamemos x a los años que han de transcurrir para que la edad del padre sea el triple de la edad de su hija.

Cuando transcurran esos años el padre tendrá $29 + x$ años, y la hija tendrá $3 + x$ años.

En ese momento la edad del padre es triple de la edad de su hija, con lo que podemos plantear la ecuación:

$$29 + x = 3(3 + x)$$

Resolviéndola: $29 + x = 9 + 3x \Rightarrow x - 3x = 9 - 29 \Rightarrow -2x = -20 \Rightarrow x = 10$.

Por tanto, han de transcurrir 10 años para que la edad del padre sea el triple de la edad de su hija.