1. **[1,5 puntos]** Factorizar el siguiente polinomio: $p(x) = 6x^4 + 13x^3 - 4x$. ¿Cuáles son las soluciones de la ecuación polinómica $6x^4 + 13x^3 - 4x = 0$?

2. **[4,5 puntos]** Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{x+1}{2} + \frac{3}{x+2} = 3x-1$

b) $\sqrt{x+1} = 3 - \sqrt{2x-5}$

c) $9^x - 2 \cdot 3^{x+2} + 81 = 0$

3. **[1,5 puntos]** Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones y expresa las soluciones en forma de pareja ordenada.

$$\begin{cases} \frac{xy}{4} - x + y = 1 \\ x - \frac{y+7}{3} = -1 \end{cases}$$

4. **[1,5 puntos]** Resuelve la siguiente inecuación y expresa las soluciones en forma de intervalo o de unión de intervalos, según corresponda.

$$\frac{x}{2} + x^2 \geq \frac{4x+7}{3}$$

5. **[1 punto]** Para resolver este problema es obligatorio plantear una ecuación o un sistema de ecuaciones de primer grado.

Luis y Penélope tienen 45 canicas entre los dos. Si Penélope presta 5 canicas a Luis, éste tendría el doble que Penélope. ¿Cuántas canicas tiene cada uno?

Soluciones

1. **[1,5 puntos]** Factorizar el siguiente polinomio: $p(x) = 6x^4 + 13x^3 - 4x$. ¿Cuáles son las soluciones de la ecuación polinómica $6x^4 + 13x^3 - 4x = 0$?

Sacando x factor común tenemos que $p(x) = x(6x^3 + 13x^2 - 4)$. Ahora, haciendo uso de la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 6 & 13 & 0 & -4 \\ & & -12 & -2 & 4 \\ \hline & 6 & 1 & -2 & 0 \end{array}$$

Esto quiere decir que $p(x) = x(x+2)(6x^2 + x - 2)$. Resolvamos ahora la ecuación de segundo grado $6x^2 + x - 2 = 0$:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-2)}}{2 \cdot 6} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 48}}{12} = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{12} = \frac{-1 \pm 7}{12} = \begin{cases} x_1 = \frac{6}{12} \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2} \\ x_2 = -\frac{8}{12} \Rightarrow x_2 = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

Por tanto, la factorización del polinomio es la siguiente: $p(x) = 6x(x+2)\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{2}{3}\right)$.

Puesto que las soluciones de la ecuación $p(x) = 0$ coinciden con las raíces del polinomio $p(x)$, las soluciones de la ecuación $6x^4 + 13x^3 - 4x = 0$ son cuatro: $x_1 = 0$, $x_2 = -2$, $x_3 = \frac{1}{2}$, $x_4 = -\frac{2}{3}$.

2. **[4,5 puntos]**. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{x+1}{2} + \frac{3}{x+2} = 3x-1 \Rightarrow [\text{mcm} = 2(x+2)] \Rightarrow (x+1)(x+2) + 6 = 6x(x+2) - 2(x+2) \Rightarrow$

$$\Rightarrow x^2 + 2x + x + 2 + 6 = 6x^2 + 12x - 2x - 4 \Rightarrow 5x^2 + 7x - 12 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta = 7^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-12) = 49 + 240 = 289 \Rightarrow x = \frac{-7 \pm 17}{10} = \begin{cases} x_1 = \frac{10}{10} \Rightarrow x_1 = 1 \\ x_2 = -\frac{24}{10} \Rightarrow x_2 = -\frac{12}{5} \end{cases}$$

b) $\sqrt{x+1} = 3 - \sqrt{2x-5} \Rightarrow (\sqrt{x+1})^2 = (3 - \sqrt{2x-5})^2 \Rightarrow x+1 = 9 - 6\sqrt{2x-5} + 2x-5 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 6\sqrt{2x-5} = 9 + 2x - 5 - x - 1 \Rightarrow 6\sqrt{2x-5} = x + 3 \Rightarrow (6\sqrt{2x-5})^2 = (x+3)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 36(2x-5) = x^2 + 6x + 9 \Rightarrow 72x - 180 = x^2 + 6x + 9 \Rightarrow x^2 - 66x + 189 = 0. \Delta = 4356 - 756 = 3600.$$

$$x = \frac{66 \pm 60}{2} = \begin{cases} x_1 = 63 \\ x_2 = 3 \end{cases} \cdot \begin{cases} \sqrt{63+1} = 3 - \sqrt{2 \cdot 63 - 5} \Rightarrow \sqrt{64} = 3 - \sqrt{121} \Rightarrow 8 = 3 - 11 \Rightarrow 8 = -8 \\ \sqrt{3+1} = 3 - \sqrt{2 \cdot 3 - 5} \Rightarrow \sqrt{4} = 3 - \sqrt{1} \Rightarrow 2 = 2 \end{cases}$$

Por tanto $x = 63$ no es solución, pero $x = 3$ sí que es solución de la ecuación.

c) $9^x - 2 \cdot 3^{x+2} + 81 = 0 \Rightarrow (3^x)^2 - 2 \cdot 3^2 \cdot 3^x + 81 = 0$. Llamando $z = 3^x$: $z^2 - 18z + 81 = 0$.

$$\Delta = (-18)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 81 = 324 - 324 = 0. \text{ Entonces solamente hay una solución para } z: z = \frac{18}{2} \Rightarrow z = 9.$$

Deshaciendo el cambio: $3^x = 9 \Rightarrow x = 2$.

3. [1,5 puntos] Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{cases} \frac{xy}{4} - x + y = 1 \\ x - \frac{y+7}{3} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy - 4x + 4y = 4 \\ 3x - y - 7 = -3 \end{cases} . \text{ De la segunda ecuación: } y = 3x - 4 . \text{ Sustituyendo en la primera:}$$

$$x(3x-4) - 4x + 4(3x-4) = 4 \Rightarrow 3x^2 - 4x - 4x + 12x - 16 = 4 \Rightarrow 3x^2 + 4x - 20 = 0 . \text{ Entonces:}$$

$$\Delta = 4^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-20) = 16 + 240 = 256 \Rightarrow x = \frac{-4 \pm 16}{6} = \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -\frac{10}{3} \end{cases} . \text{ Calculemos ahora las soluciones para } y .$$

$$\text{Si } x = 2 \Rightarrow y = 3 \cdot 2 - 4 \Rightarrow y = 2 . \text{ Y si } x = -\frac{10}{3} \Rightarrow y = 3 \cdot \left(-\frac{10}{3}\right) - 4 \Rightarrow y = -14 .$$

En forma de pareja ordenada las soluciones las podemos escribir así: $(2, 2)$ y $\left(-\frac{10}{3}, -14\right)$.

4. [1,5 puntos] Resuelve la siguiente inecuación y expresa las soluciones en forma de intervalo o de unión de intervalos, según corresponda.

$$\frac{x}{2} + x^2 \geq \frac{4x+7}{3} \Rightarrow 3x + 6x^2 \geq 8x + 14 \Rightarrow 6x^2 - 5x - 14 \geq 0 . \text{ Como las soluciones de } 6x^2 - 5x - 14 = 0 \text{ son}$$

$$x = -\frac{7}{6} \text{ y } x = 2 \text{ (¡compruébese!)}. \text{ Entonces la inecuación es equivalente a esta otra: } 6\left(x + \frac{7}{6}\right)(x - 2) \geq 0 .$$

Hagamos una tabla y estudiemos los signos:

	$\left(-\infty, -\frac{7}{6}\right)$	$\left(-\frac{7}{6}, 2\right)$	$(2, +\infty)$
$6\left(x + \frac{7}{6}\right)(x - 2)$	+	-	+

De este modo, la solución en forma de intervalo es: $x \in \left(-\infty, -\frac{7}{6}\right] \cup [2, +\infty)$.

5. [1 punto] *Para resolver este problema es obligatorio plantear una ecuación o un sistema de ecuaciones de primer grado.*

Luis y Penélope tienen 45 canicas entre los dos. Si Penélope presta 5 canicas a Luis, éste tendría el doble que Penélope. ¿Cuántas canicas tiene cada uno?

Llamemos x a las canicas que tiene Luis, y llamemos y a las canicas que tiene Penélope. Si Penélope presta 5 canicas a Luis, entonces Penélope tendrá $y - 5$ y Luis tendrá $x + 5$. Según el enunciado podemos plantear el

siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x + y = 45 \\ x + 5 = 2(y - 5) \end{cases}$. De la primera ecuación $y = 45 - x$. Sustituyendo en la

segunda ecuación: $x + 5 = 2(45 - x - 5) \Rightarrow x + 5 = 2(40 - x) \Rightarrow x + 5 = 80 - 2x \Rightarrow 3x = 75 \Rightarrow x = 25$.

Sustituyendo este valor en $y = 45 - x$: $y = 45 - 25 \Rightarrow y = 20$.

Por tanto, Luis tiene 25 canicas y Penélope tiene 20 canicas.