1. **[6 puntos; 1,5 puntos por apartado]** Resuelve las siguientes ecuaciones:

   a) $\dfrac{2+x}{x}-\dfrac{5(x-2)}{2x-1}=8$

   b) $\dfrac{x^2-1}{2}-\dfrac{x+1}{4}=x+\dfrac{2x-6}{3}$

   c) $x+\sqrt{2x+3}=6$

   d) $\dfrac{x}{x^2-4}+\dfrac{x-1}{x+2}=\dfrac{3}{x-2}-2$

2. **[4 puntos; 2 puntos por apartado]** Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones.

   a) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+1-y=0 \\ x-1=y-2 \end{cases}$

   b) $\begin{cases} \sqrt{x+y}=2 \\ \dfrac{x-1}{y}=y-3 \end{cases}$

Soluciones

1. **[6 puntos; 1,5 puntos por apartado]** Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{2+x}{x}-\frac{5(x-2)}{2x-1}=8 \Rightarrow \frac{(2+x)(2x-1)}{x(2x-1)}-\frac{5x(x-2)}{x(2x-1)}=\frac{8x(2x-1)}{x(2x-1)} \Rightarrow$

$\Rightarrow 4x-2+2x^2-x-5x^2+10x=16x^2-8x \Rightarrow -3x^2+13x-2=16x^2-8x \Rightarrow 19x^2-21x+2=0$.

El discriminante de la ecuación de segundo grado es $\Delta=(-21)^2-4\cdot 19\cdot 2=441-152=289$. Entonces:

$$x=\frac{21\pm\sqrt{289}}{2\cdot 19}=\frac{21\pm 17}{38}=\begin{cases} x_1=\frac{38}{38}\Rightarrow x_1=1 \\ x_2=\frac{4}{38}\Rightarrow x_2=\frac{2}{19}\end{cases}$$

b) $\frac{x^2-1}{2}-\frac{x+1}{4}=x+\frac{2x-6}{3} \Rightarrow \frac{6(x^2-1)}{12}-\frac{3(x+1)}{12}=\frac{12x}{12}+\frac{4(2x-6)}{12} \Rightarrow$

$\Rightarrow 6x^2-6-3x-3=12x+8x-24 \Rightarrow 6x^2-3x-9=20x-24 \Rightarrow 6x^2-23x+15=0$.

$\Delta=(-23)^2-4\cdot 6\cdot 15=529-360=169$. Entonces: $x=\frac{23\pm 13}{12}=\begin{cases} x_1=\frac{36}{12}\Rightarrow x_1=3 \\ x_2=\frac{10}{12}\Rightarrow x_2=\frac{5}{6}\end{cases}$.

c) $x+\sqrt{2x+3}=6 \Rightarrow \sqrt{2x+3}=6-x \Rightarrow \left(\sqrt{2x+3}\right)^2=(6-x)^2 \Rightarrow 2x+3=36-12x+x^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2-14x+33=0$. $\Delta=(-14)^2-4\cdot 1\cdot 33=196-132=64$. Entonces: $x=\frac{14\pm 8}{2}=\begin{cases} x_1=11 \\ x_2=3\end{cases}$.

Comprobemos: $\begin{cases} 11+\sqrt{2\cdot 11+3}=11+\sqrt{25}=11+5=16\neq 6 \\ 3+\sqrt{2\cdot 3+3}=3+\sqrt{9}=3+3=6\end{cases}$.

De aquí se deduce que $x=11$ no es solución de la ecuación, pero que $x=3$ sí que lo es.

d) $\frac{x}{x^2-4}+\frac{x-1}{x+2}=\frac{3}{x-2}-2 \Rightarrow \frac{x}{(x+2)(x-2)}+\frac{x-1}{x+2}=\frac{3}{x-2}-2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{x}{(x+2)(x-2)}+\frac{(x-2)(x-1)}{(x+2)(x-2)}=\frac{3(x+2)}{(x+2)(x-2)}-\frac{2(x+2)(x-2)}{(x+2)(x-2)} \Rightarrow$

$\Rightarrow x+x^2-x-2x+2=3x+6-2x^2+8 \Rightarrow x^2-2x+2=-2x^2+3x+14 \Rightarrow 3x^2-5x-12=0$.

$\Delta=(-5)^2-4\cdot 3\cdot(-12)=25+144=169$. Entonces: $x=\frac{5\pm 13}{6}=\begin{cases} x_1=\frac{18}{6}\Rightarrow x_1=3 \\ x_2=\frac{-8}{6}\Rightarrow x_2=-\frac{4}{3}\end{cases}$

2. **[4 puntos; 2 puntos por apartado]** Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones.

a) $\begin{cases} \frac{1}{x}+1-y=0 \\ x-1=y-2 \end{cases}$. Despejando y en la primera ecuación tenemos que $y=\frac{1}{x}+1$. Sustituyendo este valor en la segunda ecuación: $x-1=\frac{1}{x}+1-2$; $x^2-x=1+x-2x$; $x^2-1=0$; $x^2=1$; $\begin{cases} x=-1 \\ x=1 \end{cases}$.

Para $x=-1$ es $y=\frac{1}{-1}+1 \Rightarrow y=-1+1 \Rightarrow y=0$. Para $x=1$ es $y=\frac{1}{1}+1 \Rightarrow y=1+1 \Rightarrow y=2$.

Por tanto, tenemos dos soluciones del sistema: $(-1,0)$ y $(1,2)$.

b) $\begin{cases} \sqrt{x+y}=2 \\ \frac{x-1}{y}=y-3 \end{cases}$. Elevando al cuadrado los dos términos de la primera ecuación: $x+y=4 \Rightarrow x=4-y$.

Sustituyendo en la 2ª ecuación: $\frac{4-y-1}{y}=y-3 \Rightarrow \frac{3-y}{y}=y-3 \Rightarrow 3-y=y^2-3y \Rightarrow y^2-2y-3=0$.

El discriminante de esta última ecuación es $\Delta=(-2)^2-4\cdot 1\cdot(-3)=4+12=16$.

Entonces: $y=\frac{2\pm 4}{2}=\begin{cases} y_1=3 \\ y_2=-1 \end{cases}$. Si $y=3$, $x=4-3 \Rightarrow x=1$. Y si $y=-1$, $x=4-(-1) \Rightarrow x=5$.

Por tanto, tenemos dos parejas de posibles soluciones: $(1,3)$ y $(5,-1)$.

Hagamos la comprobación sustituyendo en la primera ecuación del sistema.

- $\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2$, con lo que $(1,3)$ sí que es solución.
- $\sqrt{5+(-1)}=\sqrt{4}=2$, con lo que $(5,-1)$ también es solución.